**Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen** **Année Universitaire 2019-2020**
**Faculté des Sciences**
**Département de Mathématiques**

1ère Année LMD Mathématique et Informatique Algèbre 2

**Cours sur : Les Matrices (PARTIE I)**

Soit $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

# 1 Définitions générales

**Définition .1** *On appelle matrice de type $(n,p)$, ou bien matrice à $n$ lignes et $p$ colonnes, un tableau à éléments de $\mathbb{K}$ rangés en $n$ lignes et $p$ colonnes comme suit :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & . & . & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & . & . & a_{2,p} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & . & . & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

*Dans ce cas, la matrice $A$ est de taille $n \times p$.*
*L'ensemble des matrices de type $(n,p)$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

**Remarque .1**

1. *Si $p = 1$ alors $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$ est dite matrice colonne.*
2. *Si $n = 1$ alors $A = \begin{pmatrix} a_1, a_2, ..., a_n \end{pmatrix}$ est dite matrice ligne.*
3. *Si $p = n$ alors $A$ est dite matrice carrée d'ordre $n$. Les éléments $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ forment la diagonale principale de la matrice.*
   *L'ensemble des matrices carrées est noté $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

**Définition .2** *Deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont dite égales si et seulement si $A$ et $B$ sont de même type $(n,p)$ et $a_{i,j} = b_{i,j}$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.*

## 1.1 Matrice associée à une application linéaire

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels donnés, tels que $\dim E = p$ et $\dim F = n$, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
Si $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ une base de $E$, et $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ une base de $F$, avec,

$$\text{pour tout } i = 1, ..., p, \quad f(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + ... + a_{ni}w_n.$$

alors on appelle matrice associée à $f$ par rapport aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ notée $M(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ la matrice $(n,p)$ dont les colonnes sont les coefficient $a_{ij}$

$$\mathrm{M}(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & \dots & f(v_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{array}$$

Inversement, si on a une matrice $A$, comment déterminer l'application linéaire associée ?
Soit $x \in E$, il s'écrit sous la forme $x = \sum_{i=1}^{p} x_i v_i$. Donc :

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{p} x_i v_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i (a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + ... + a_{ni}w_n) = \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{k=1}^{n} a_{ki} w_k.$$

On obtient

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \big(\sum_{i=1}^{p} a_{ki} x_i\big) w_k,$$

or $f(x)$ est un élément de $F$ donc $f(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k w_k$, ce qui nous donne

$$y_k = \sum_{i=1}^{p} a_{ki} x_i.$$

## 1.2 Rang d'une matrice

**Définition .3** *On appelle rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le rang de l'application linéaire associée à cette matrice.*

**Corollaire .1** *Le rang d'une matrice $A$ est le nombre de vecteurs colonnes linéairement indépendants.*

**Exemple .1** *Calculons le rang de la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Notons les vecteurs colonnes de $A$ par $v_1 = (-1,0,0,0), v_2 = (0,-1,1,0), v_3 = (0,0,-1,2)$ et $v_4 = (1,1,0,-2)$.*
*Question 1 : est-ce-que $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ est libre ?*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 \Rightarrow rgA < 4.$$

*Question 2 : est-ce-que $\{v_1,v_2,v_3\}$ est libre ? Réponse :**OUI**, donc le $rgA = 3$.*

## 1.3 Opérations sur les matrices

### 1.3.1 Addition de matrices

Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B=(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de même type (de mêmes dimensions) $(n,p)$. La somme $A+B$ est aussi une matrice $(n,p)$, définie par $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

### 1.3.2 Multiplication par un scalaire

Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et soit $\lambda$ un nombre réel (ou complexe) donné, alors $\lambda A=(\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.
On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

**Corollaire .2** $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

### 1.3.3 Produit de matrices

Soit $A=(a_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant p}}$ une matrice $(n,p)$, et soit $B=(b_{kj})_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ une matrice $(p,m)$, alors le produit $C=AB$ est une matrice $(n,m)$, définie par $C=(c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ où

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}.$$

**Remarque .2** *Pour que le produit de deux matrices existe, il est nécessaire que le nombre de colonnes de la première soit égal au nombre de lignes de la seconde.*

**Remarque .3** *Soient* $f:E\longrightarrow F$ *et* $g:F\longrightarrow G$ *deux applications linéaires, alors on a la relation*

$$M\left((g\circ f),\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3\right)=M\left(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\right)M\left(g,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3\right)$$

*ainsi la matrice associée à la composée de deux applications est égale au produit des matrices associées a chacune des deux applications.*

### 1.3.4 Matrice transposée

Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice $(n,p)$ donnée, on appelle matrice transposée de $A$, ou plus simplement transposée de $A$, la matrice $(p,n)$ notée ${}^tA$ définie par ${}^tA=(a_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ 1\leqslant i\leqslant n}}$.
On a les propriétés suivantes :

1. ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$.
2. ${}^t(\alpha A)=\alpha.{}^tA$.
3. ${}^t({}^tA)=A$.
4. ${}^t(A.B)={}^tB.{}^tA$.

**Exemple .2** $A=\begin{pmatrix}1&-6\\3&-4\\0&2\end{pmatrix}$ *alors* ${}^tA=\begin{pmatrix}1&3&0\\-6&-4&2\end{pmatrix}$

**Remarque .4** *Une matrice (carrée) qui vérifie* ${}^tA=A$*, est dite matrice symétrique.*

### 1.3.5 Matrices carrées particulières

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre $n$.

1. $A$ est dite Matrice carrée diagonale si et seulement si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{2,2} & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

2. Si $A$ est une matrice diagonale telle que $a_{i,i} = 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ alors elle est dite matrice identité. On note $A = I_n$ :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $A$ est dite Matrice carrée triangulaire supérieure si et seulement si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & . & . & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & . & . & . & . & a_{2,n} \\ . & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

4. $A$ est dite Matrice carrée triangulaire inférieure si et seulement si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i < j$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & . & . & . & . & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & . & . & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

5. $A$ est dite Matrice carrée symétrique si et seulement si $a_{i,j} = a_{j,i}$.
6. $A$ est dite Matrice carrée anti-symétrique si et seulement si $a_{i,j} = -a_{j,i}$.
7. A est dite inversible si et seulement si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A.B = B.A = I_n$. On note $B = A^{-1}$.

**Remarque .5** *Si $f$ est l'application linéaire associée à $A$ alors $A^{-1}$ est associée à $f^{-1}$.*

On a les propriétés suivantes :

1. $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

---

## Références

---


1. Algèbre, Cours de Mathématiques pour la première année , site web : http ://exo7.emath.fr/
2. Algèbre linéaire, 5e édition, de Joseph Grifone.
3. Le succès en algèbre en fiches-méthodes : 1re année, de Abdelaziz El Kaabouchi.


---

## Auteur

---


M. Mamchaoui

Laboratoire de Statistiques et Modélisation Aléatoires (LSMA). Faculté des Sciences. Département de Mathématiques. Université Abou Bakr Belkaïd, Tlemcen, BP 119, 13000 Tlemcen, Algérie.

`E-mail: mohamed.mamchaoui@univ-tlemcen.dz`

`Site-web:`

`https://sites.google.com/view/mamcha/enseignements/l1-mathématiques-informatique`