Chapitre IV : Interpolation polynomiale

I/ Introduction Générale :

Soit un ensemble de points x_0 à x_{n-1} (n points), On connait la valeur de f en ces points $f(x_0), f(x_1) \dots f(x_{n-1})$.

Quelle est la valeur de f sur les points intermédiaires ?

On suppose donc, un modèle mathématique pour f (polynôme, somme de sinus, splines...etc.)

Deux situations se présentent :

- $f(x_i)$ sont des valeurs exactes.
- $f(x_i)$ sont des valeurs approchées (mesures par exemple)

II/ $f(x_i)$ sont des valeurs exactes

Dans ce cas là, on construit un polynôme de degré $(n-1)$ telque :

$$f(x) \approx P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x$$

On doit calculer les a_i, pour cela, on a "n" équations

$$\begin{cases} a_0 x_0^0 + a_1 x_0^1 + \dots + a_{n-1} x_0^{n-1} = f(x_0) \\ a_0 x_1^0 + a_1 x_1^1 + \dots + a_{n-1} x_1^{n-1} = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 x_{n-1}^0 + a_1 x_{n-1}^1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^{n-1} = f(x_{n-1}) \end{cases}$$

On obtient alors le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \ddots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{Bmatrix}$$

exemple :

Soient les 4 points suivants définis par leurs $f(x_i)$:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	0	2	4	6
	f_0	f_1	f_2	f_3
$f(x_i)$	0	4	0	4

Nous avons 4 points, donc notre polynôme $P(x)$ est de degré 3, le système matriciel défini plus haut s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

C'est un système linéaire dont sa résolution par l'une des méthodes évoquées en chapitres 1 et 2 peut être obtenue. La solution finale donne :

$a_0 = 0$, $a_1 = \frac{20}{3}$, $a_2 = -3$, et $a_3 = \frac{1}{3}$

I.1/ Interpolation de Lagrange:

Fondée sur le développement en série de Taylor, l'approximation polynomiale permet d'approcher une fonction f suffisamment régulière par un polynôme de degré "n"

Soit f une fonction continue d'un intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, (n) points distincts de l'intervalle $[a,b]$. Le polynôme de Lagrange aux points x_i est le polynôme de degré $(n-1)$

$$\boxed{P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i(x)}$$

avec $\boxed{a_i = f_i}$ et $\boxed{L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}$

I.2/ Polynôme de Newton

Pour calculer le polynôme d'interpolation "P(x)", Newton propose :

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +$$

$$\dots + f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-2})$$

$$\boxed{P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f[x_0, x_1, \dots x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)}$$

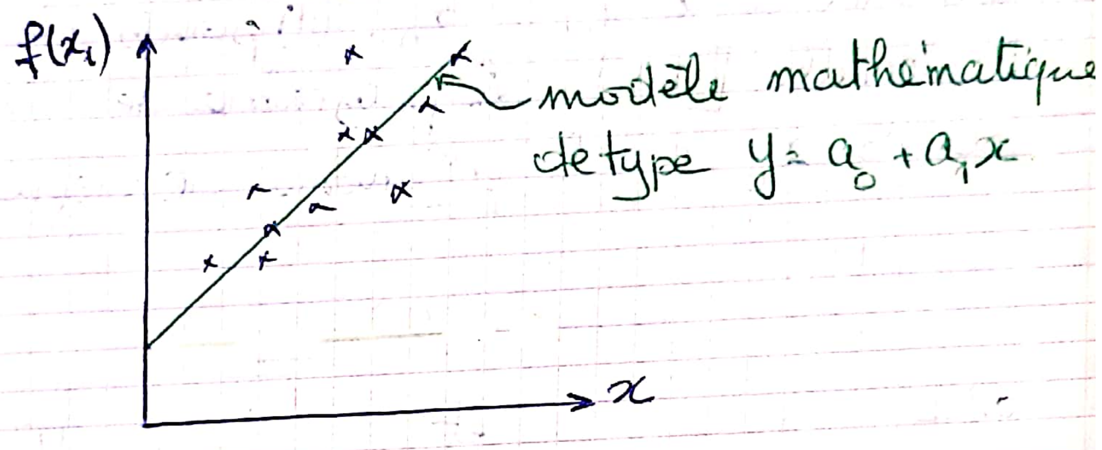
On a : $f[x_0] = f(x_0)$, $f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$ ... etc.

III/ $f(x_i)$ sont des valeurs approchées

III.1/ Approximation Quadratique (de moindres carrés)

Si $f(x_i)$ sont des valeurs approchées (mesures par exemple), on ne cherche pas à interpoler mais à trouver le meilleur modèle mathématique qui représente les données (fitter)



Pour cet effet, on doit minimiser l'erreur

$$E(a_0, -a_1) = \sum_{\substack{\text{tous les} \\ \text{points}}} \left(y_i^* - y(x_i) \right)^2$$

avec $\begin{cases} y_i^* : \text{ se sont les mesures.} \\ y(x_i) : \text{ se sont les valeurs sur le modèle mathématique.} \end{cases}$

Pour calculer les a_i :

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial E}{\partial a_j} = 0$$