Université Abou berkBelkaid Tlemcen (2019/2020)
Faculté des sciences
Département de mathématiques (MI)
TD N°3 (statistiques)
W.BENYELLES

1 Exercice N°1

1. Montrer que :
   - $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
   - $C_2^0 + C_3^1 + C_4^2 + C_5^3 + C_6^4 = C_7^4$ (en utilisant le triangle de Pascal), généraliser la démonstration pour $\sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^k = C_p^0 + C_{p+1}^1 + C_{p+2}^2 + ... + C_{p+n}^n = C_{p+n+1}^n$
2. Démontrer ce qui suit:
   - $\sum_{k=1}^{n} C_{k+1}^2 = C_{n+2}^3$
3. En utilisant le binôme de Newton et pour tout n $\succ$ 1 démontrer:
   - $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$
   - $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n \cdot C_n^n = 0$
   - $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = 2^{n-1}$
   - $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}$
4. résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation :
   - $C_{x+10}^{x+4} = C_{x+10}^{2x-10}$
   - $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$

2 Exercice N°2

1. Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

- Combien y-a-t-il de codes possibles?
- Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair?
- Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?
- Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4?

2. On souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
   - Combien y-a-t-il de codes possibles?
   - Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair?
   - Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6?
3. Combien y a t-il d'anagrammes des mots suivants : MATHS, MINI, ANANAS.

3 Exercice N°3

Une équipe de 10 joueurs de jeu d'échecs (6 garçons et 4 filles). On décide de fabriquer un comité de 5 joueurs. Nassima et son frére Salim jouent dans cette équipe.

1. Combien y-a-t-il de comités possibles?
2. Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 3 garçons et 2 filles?
3. Combien y-a-t-il de comités contenant au moins une fille?
4. On veut que Nassima et Salim soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles?
5. On ne veut pas que Nassima et son frére Salim soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles?

4 Exercice N°4

1. Démontrer que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2. Démontrer que $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
3. Application: Dans le département MI, il y a 800 étudiants. 300 sont des garçons, 352 veulent choisir option informatique, 424 ont réussi leur S1, 208 veulent faire informatique et ont eu leur S1

188 des garçons veulent choisir l'option informatique, 166 des garçons ont eu leur S1, 144 sont des garçons qui ont eu leur S1 et qui ont choisi l'option informatique.

Combien y-a-t-il de filles qui n'ont pas eu leur S1 et veulent choisir option mathématiques ?

Soient les événements:
G " l'étudiant est un garçon"
F " l'étudiant est une fille"
N " l'étudiant choisit l'option informatique"
S " l'étudiant a réussi son S1; premier semestre"

5 Exercice N°5

1. Soient A, B et C trois événements tels que :
   $P(A)=P(B)=1/3$, $P(A \cap B)=1/9$, $P(C)=1/4$
   - Calculer les probabilités des événements suivants :

   E1 « Aucun des événements A, B ne se réalisent »
   E2 « A se réalise, B ne se réalise pas »
   - Calculer $P(A \cup C)$, si A et C sont des événements indépendants.
   - Calculer $P(A \cup C)$, si A et C sont des événements disjoints.

2. Soient A, B, C, trois événements de Ω
   On donne : $P(A) = 0.65$, $P(A \cap B) = 0.15$, $P(B \cap C) = 0.1$, $P(A \cap C) = 0.1$,
   $P(A \cap B \cap C) = 0.05$
   On pose $H1 = A \cup (B \cap C)$, $H2 = A \cap (B \cup C)$, $H3 = A \cup B \cup C$ et $H4 = \{$ ni A , ni B $\}$.
   - Calculer P(H1) et P(H2).
   - Calculer P (H3), P(H4) si P(B) = 0, 35 et P(C)=0.05.

6 Exercice N°6

Dans un laboratoire, on a fait les constats suivants:
si une souris porte l'anticorps A, alors 2 fois sur 5 elle porte aussi l'anticorps B;
si une souris ne porte pas l'anticorps A, alors 4 fois sur 5 elle ne porte pas l'anticorps B.
La moitié de la population porte l'anticorps A.

1. Si une souris porte l'anticorps B, calculez la probabilité qu'elle porte aussi l'anticorps A.
2. Si une souris ne porte pas l'anticorps B, calculez la probabilité qu'elle ne porte pas l'anticorps A.

7 Exercice N°7

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de clés USB. 5%des boites sont abîmées. Le gérant estime que :
60% des boites abîmées contiennent au moins une clé défectueuse.
98% des boites non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse.

Un client achète une boite du lot. On désigne par :
A l'événement : "la boite est abîmée" et par
D l'événement "la boite achetée contient au moins une clé défectueuse".

1. Donner les probabilités de P(A), P($\overline{A}$), P(D/A),P($\overline{D}$ /$\overline{A}$), P($\overline{D}$ / A), P(D/$\overline{A}$). En déduire la probabilité de D.
2. Sachant que le client constate que l'une des clés est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abimée ?

8 Exercice N°8

Dans une ville ravagée par un terrible tremblement de terre, certains promoteurs immobiliers n'ont pas respecté les normes de construction, soit en ayant omis de placer une dalle de fondation spéciale et très coûteuse, soit en ayant sous dimensionner cette dalle. Sur la base d'un modèle théorique, on a estimé que pour le tremblement de terre ayant lieu, les risques d'effondrement d'un immeuble sont 85% si la dalle n'est pas présente, de 25¨% si elle est sous dimensionnée et de 1% si elle est correctement dimensionnée. Des contrôles antérieurs à l'accident ont montré que pour 5% des constructions, il y avait une fraude ; la dalle était sous dimensionnér dans 80% des cas et absente dans 20% des cas.

- Si un immeuble, pris au hasard, est effondré, quelle est la probabilité :

- i) qu'il ne soit pas muni d'une dalle
- ii) que la dalle soit sous dimensionnée
- iii) que la dalle soit correctement dimensionnée

Soient les événements:
A « l'immeuble s'est effondré »
B1 « Il n'y a pas de dalle »
B2 «La dalle est sous dimensionnée »
B3« La dalle est correctement dimensionnée »

9 SOLUTIONS

9.1 Exercice N°1

1. Montrer que :

   - $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

En effet

$$\begin{aligned}
C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{k\cdot(n-1)! + (n-k)\cdot(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!\,[k-(n-k)]}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k \text{ cqfd}
\end{aligned}$$

1. - $C_2^0 + C_3^1 + C_4^2 + C_5^3 + C_6^4 = C_7^4$ (il suffit de regarder le triangle de Pascal: Quand on descend dans le triangle de PASCAL, le long de la colonne p si l'on additionne ces coefficients jusqu'à la ligne n (en diagonale) , on trouve une ligne plus bas (n+1) qui est la somme de ces coefficients),

généralisation de la démonstration pour $\sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^k = C_p^0 + C_{p+1}^1 + C_{p+2}^2 + ... + C_{p+n}^n = C_{p+n+1}^n$

(on a aussi $\sum_{k=0}^{n-p} C_{p+k}^p = C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + ... + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$ *à faire*)

en effet, en utilisant la propriété qu'on vient de démontrer on a:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^k &= \sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^p \quad \text{car } C_{p+k}^k = C_{p+k}^p = \frac{(p+k)!}{k!p!} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[C_{p+k+1}^{p+1} - C_{p+k}^{p+1}\right] \qquad \text{car } C_{p+k+1}^{p+1} = C_{p+k}^p + C_{p+k}^{p+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} C_{p+k+1}^{p+1} - \sum_{k=1}^{n} C_{p+k}^{p+1} \\
&= 1 + \sum_{K=2}^{n+1} C_{p+K}^{p+1} - \sum_{k=1}^{n} C_{p+k}^{p+1}, \qquad \text{on pose K=k+1} \\
&= 1 + C_{p+n+1}^{p+1} - C_{p+1}^{p+1} = 1 + C_{p+n+1}^{p+1} - 1 \\
&= C_{p+n+1}^{p+1} \\
&= C_{p+n+1}^{n} \text{ car } C_{p+n+1}^{n} = \frac{(p+n+1)!}{n!(p+1)!} = C_{p+n+1}^{p+1}
\end{aligned}$$

2. On utilise le raisonnement par récurrence. pour démontrer:

   - $\sum_{k=1}^{n} C_{k+1}^{2} = C_{n+2}^{3}$

   Pour k=1 $\quad$ *montrons que* $C_2^2 = C_3^3$
   ce qui est vrai car $\forall p \;\; C_p^p = 1$ *donc* $C_2^2 = C_3^3$ =1
   Hypothése de réccurence pour (n): $\sum_{k=1}^{n} C_{k+1}^{2} = C_{n+2}^{3}$
   Montrons que l'hypothése reste vraie pour (n+1):
   montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} C_{k+1}^{2} = C_{n+3}^{3}$
   En effet

$$\begin{aligned} C_{n+3}^{3} &= C_{n+2}^{3} + C_{n+2}^{2} \\ &= C_{n+2}^{2} + \sum_{k=1}^{n} C_{k+1}^{2} = \sum_{k=1}^{n+1} C_{k+1}^{2} \end{aligned}$$

3. En utilisant le binôme de Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$

   - Il sufiit de prendre a=1 et b=1, on aura:

$$\begin{aligned} (1+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} \quad \text{or , } 1^p = 1, \forall p \\ 2^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \qquad \text{cqfd} \end{aligned}$$

     donc $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$
   - il suffir de prendre a=-1 et b=1, on aura:

$$\begin{aligned} (-1+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (-1)^k \cdot 1^{n-k} \\ 0 &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \quad \text{cqfd} \end{aligned}$$

     donc $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n \cdot C_n^n = 0$
   - Il sufiit de remarquer que si on somme de chaque coté , on aura:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + C_n^5 + C_n^6 + ... = 2^n$$

$$+$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + C_n^6 - ... = 0$$

On a:

$$2 \cdot C_n^0 + 2 \cdot C_n^2 + 2 \cdot C_n^4 + 2 \cdot C_n^6 + ... = 2^n$$

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot \left(C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + ...\right) & = & 2^n \\ C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + ... & = & 2^{n-1} \quad \text{cqfd} \end{array}$$

- Il sufiit de remarquer que si on soustrait de chaque coté , on aura:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + C_n^5 + C_n^6 + ... = 2^n$$

$$-$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + C_n^6 - ... = 0$$

on a:

$$2 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^3 + 2 \cdot C_n^5 + ... = 2^n$$

$$2 \cdot \left(C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ...\right) = 2^n$$

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1} \quad \text{cqfd}$$

4. résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation :

- $C_{x+10}^{x+4} = C_{x+10}^{2x-10}$

  $$\text{On sait que : } C_n^p = C_n^q \Longleftrightarrow \begin{cases} p = q \\ ou \\ p = n - q \end{cases} \quad avec\ p \prec n\ et\ q \prec n$$

  donc

  $$\begin{array}{rcl} C_{x+10}^{x+4} & = & C_{x+10}^{2x-10} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+4 = 2x-10 \\ ou \\ x+4 = x+10-2x+10 \end{cases} \text{de plus} \begin{cases} x+4 \prec x+10 \\ et \\ 2x-10 \prec x+10 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{cases} x = 14 \\ ou \\ 2x = 16 \end{cases} \text{et} \begin{cases} 4 \prec 10 \text{ vrai } \forall x \\ et \\ x \prec 20 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{cases} x = 14 \\ ou \\ x = 8 \end{cases} \text{et } x \prec 20 \end{array}$$

  donc les deux solutions sont acceptées ainsi :

pour x=14, on aura:$C_{24}^{18} = C_{24}^{18}$ et pour x=8, on aura: $C_{18}^{12} = C_{18}^{6}$

- $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$

$$\begin{aligned} C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 &= \frac{2n!}{1!\,(2n-1)!} + \frac{2n!}{2!\,(2n-2)!} + \frac{2n!}{3!\,(2n-3)!} \\ &= \frac{2n\cdot(2n-1)!}{(2n-1)!} + \frac{2n\cdot(2n-1)\,(2n-2)!}{2\times(2n-2)!} + \frac{2n\cdot(2n-1)\,(2n-2)\,(2n-3)!}{6\times(2n-3)!} \\ &= 2n + n\cdot(2n-1) + \frac{2n\cdot(2n-1)\,(n-1)}{3} \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 &= 387n \Longleftrightarrow \frac{6n + 3n\cdot(2n-1) + 2n\cdot(2n-1)\,(n-1)}{3} = 387n \\ &\Longleftrightarrow 6 + 3(2n-1) + 2(2n-1)(n-1) = 1161 \\ &\Longleftrightarrow 6 + 6n - 3 + 4n^2 - 4n - 2n + 2 = 1161 \\ &\Longleftrightarrow 4n^2 = 1156 \\ &\Longleftrightarrow n^2 = 289 \\ &\Longleftrightarrow n = 17 \quad \text{car n} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

9.2 Exercice N°2

1. Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

- Combien y-a-t-il de codes possibles?

$$\text{selon PFAC on a: } 9\times 9\times 9 \left\{ \begin{array}{c} \text{ie 9 possibilités pour le 1ér chiffre} \\ \text{9 possibilités pour le 2éme chiffre} \\ \text{et 9 possibilités pour le dernier chiffre} \end{array} \right.$$

ou bien c'est un arrangement avec répétition: $n^p = 9^3 = 9 \times 9 \times 9$

- Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair?

$$\text{selon PFAC on a: } 9\times9\times4 \left\{ \begin{array}{c} \text{ie 9 possibilités pour le 1ér chiffre} \\ \text{9 possibilités pour le 2éme chiffre} \\ \text{et 4 possibilités pour le dernier chiffre choisi parmi } \{2,4,6,8\} \end{array} \right.$$

- Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?

un code contenant au moins un chiffre 4 est un code qui contient un ou deux ou trois fois le chiffre 4 donc

$méthode1 : 3\cdot(1\times 8\times 8 + 1\times 1\times 8) + 1\times1\times1 = 64+8+1 = 3(64+8)+1 = 217$

un code contenant au moins un chiffre 4 est un code contenant tous les cas possibles hormis le code ne contenant aucun chiffre 4

$méthode2 :\ 9\times 9\times 9 - 8\times 8\times 8 = 729 - 512 = 217$

- Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4?

  On a 3 choix pour l'emplacement du chiffre 4 puis le choix du code

  $$ie\ 3 \cdot (1 \times 8 \times 8) = 192$$

2. On souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

   - Combien y-a-t-il de codes possibles?

     selon PFAC on a: $9 \times 8 \times 7 \begin{cases} \text{ie 9 possibilités pour le 1ér chiffre} \\ \text{8 possibilités pour le 2éme chiffre (on ote le 1ér chiffre)} \\ \text{et 7 possibilités pour le dernier (on ote le 1ér et le 2éme chiffre)} \end{cases}$

     ou bien c'est un arrangement sans répétition $A_n^p = A_9^3 = \dfrac{9!}{(9-3)!} = \dfrac{6!7.8.9}{6!} = 7 \times 8 \times 9$

   - Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair?

     on aura : $5 \times 7 \times 8 \begin{cases} \text{5 possibilités pour le chiffre impair} \\ \text{8 possibilités pour le chiffre suivant (different du 1ér choisit)} \\ \text{7 possibilites (on ote le 1ér et le 2éme chiffre de nos choix)} \end{cases}$

   - Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6?

     $3.(1 \times 7 \times 8)$ ie 3 choix pour l'emplacement du nombre 6 et
     (7et 8 choix) pour les autres chiffres différents de 6

3. Combien d'anagrammes des mots suivants : MATHS, MINI, ANANAS.

   On utilisera des permutaions avec et sans répétions

pour le mot MATHS, on aura : $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
pour le mot MINI, on aura: $\frac{4!}{2!} = \frac{2!3.4}{2!} = 12$
pour le mot ANANAS, on aura: $\frac{6!}{3!2:} = \frac{3!4.5.6}{3!1.2} = 60$

9.3 Exercice N°3

Une équipe de 10 joueurs de jeu d'échecs (6 garçons et 4 filles). On décide de fabriquer un comité de 5 joueurs.

Dans cet exercice, on remarque que l'ordre n'est pas important, ainsi l'utilisation des combinaisons s'impose.

1. Combien y-a-t-il de comités possibles?

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = \frac{5!6.7.8.9.10}{5!1.2.3.4.5} = 252\ comités$$

2. Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 3 garçons et 2 filles?

   Il faut choisir 3 garçons parmi 6 et 2 filles parmi 4

$$\begin{aligned} C_6^3 \times C_4^2 &= \frac{6!}{3!3!} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{3!4.5.6}{3!1.2.3} \times \frac{2!3.4}{2!1.2} \\ &= 20 \times 6 = 120 \end{aligned}$$

3. Combien y-a-t-il de comités contenant au moins une fille?

   méthode 1: On prend tous les comités possibles auxquels ont ote les comités n'ayant aucune fille

$$C_{10}^5 - C_6^5 = 252 - 6 = 246$$

   méthode 2: le nombre de comités ayant une fille $C_6^4 \times C_4^1 = 60$

   le nombre de comités ayant deux filles $C_6^3 \times C_4^2 = 120$

   le nombre de comités ayant trois filles $C_6^2 \times C_4^3 = 60$

   le nombre de comités ayant quatre filles $C_6^1 \times C_4^4 = 6$

   ainsi le nombre de comités ayant au moins une fille est de:

$$C_6^4 \times C_4^1 + C_6^3 \times C_4^2 + C_6^2 \times C_4^3 + C_6^1 \times C_4^4 = 60 + 120 + 60 + 6 = 246$$

4. On veut que Nassima et Salim soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles?

   On a un choix possible pour nassima et salim et reste a choisir

   3 parmi 8 (10-2) on ote des 10 joueurs ,Nassima et Salim

$$1 \times 1 \times C_8^3 = 56$$

5. On ne veut pas que Nassima et son frére Salim soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles?

   On choisit les comités avec nassima, puis ceux avec salim et ceux ne contenant ni salim, ni nassima

$$1 \times C_8^4 + 1 \times C_8^4 + C_8^5 = 2 \times \frac{8!}{4!4!} + \frac{8!}{5!3!} = 140 + 56 = 196$$

Ou bien on pouvait tout simplement soustraire le nombre total des comités (question 1) du nombre de comités contenant simultanément nassima et salim (question 4), ainsi on aura:

$$C_{10}^5 - 1 \times 1 \times C_8^3 = 252 - 56 = 196$$

Remarque
comme nous sommes dans un cas uniforme
si on veut calculer les probabilités des événements précedants,

$$P(A) = \frac{\text{card A}}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possible}}$$

ainsi pour calculer la probailité de l'événement A " nassima et salim sont ensemble dans le comité" (question 4) il suffit P(A) $= \frac{56}{252} = 0.222$

10 Exercice N°4

1. Démontrer que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, P définit bien une probabilité

$$\text{On a } A \cup B = A \cup (B - A) \text{ de plus } A \cap (A - B) = \emptyset$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P\left[A \cup (B - A)\right] \\ &= P\left(A\right) + P(B - A) \quad \textit{en utilisant propriéte } 3.bis \ (cours) \\ &= P\left(A\right) + P(B) - P(A \cap B) \ \text{ cqfd} \end{aligned}$$

2. Démontrer que $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(E \cup C) \ \text{ avec } E = A \cup B \\ &= P(E) + P(C) - P(E \cap C) \\ &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \ \text{ cqfd} \end{aligned}$$

3. Application: Dans le département MI, il y a 800 étudiants. 300 sont des garçons, 352 veulent choisir option informatique, 424 ont réussi leur S1, 208 veulent faire informatique et ont réussi leur S1,188 des garçons veulent choisir l'option informatique, 166 des garçons ont eu leur S1, 144 sont des garçons qui ont eu leur S1 et qui ont choisi l'option informatique.

Combien y-a-t-il de filles qui n'ont pas réussi leur S1 et veulent choisir option mathématiques ?

Soient les événements, on aura:

G " l'étudiant est un garçon" P(G) = $\frac{cardG}{card\Omega}$

F " l'étudiant est une fille" P(F) = P($\overline{G}$) = 1-P(G)

N " l'étudiant choisit l'option informatique" P(N) = $\frac{cardN}{card\Omega}$

S " l'étudiant a réussi son S1; premier semestre" P(S) = $\frac{cardS}{card\Omega}$

On a les données suivantes: $card\Omega = 800$, $cardG = 300$, $cardN = 352$, $cardS = 424$

$card(N \cap S) = 208$, $card(G \cap N) = 188$, $card(G \cap S) = 166$, $P(G \cap N \cap S) = 144$

on cherche $P(\overline{G} \cap \overline{N} \cap \overline{S})$ =??

on utilisera la propriéte des ensembles (vu en Algèbre) qui dit que

$$\begin{aligned} \overline{E \cup F} &= \overline{E} \ \cap \ \overline{F} \qquad et \qquad \overline{E \cap F} = \overline{E} \ \cup \ \overline{F} \\ donc \quad \overline{G} \cap \overline{N} \cap \overline{S} &= \overline{G \cup N \cup S} \end{aligned}$$

chercher la $P(\overline{G}\cap\overline{N}\cap\overline{S})$ revient donc a chercher la probabilité de : $P(\overline{G\cup N\cup S})$:

$$\begin{aligned}
P(\overline{G}\cap\overline{N}\cap\overline{S}) &= P(\overline{G\cup N\cup S})\\
&= 1-P(G\cup N\cup S) \qquad car\ P(\overline{A})=1-P(A)\\
&= 1-[P(G)+P(N)+P(S)-P(G\cap N)-P(G\cap S)-P(N\cap S)+P(G\cap N\cap S)]\\
&= 1-\frac{300}{800}-\frac{352}{800}-\frac{424}{800}+\frac{188}{800}+\frac{166}{800}+\frac{208}{800}-\frac{144}{800}\\
&= \frac{142}{800}=0.177
\end{aligned}$$

11 Exercice N°5

1. Soient A, B et C trois événements tels que :
   P(A)=P(B)=1/3, P(A∩B)=1/9, P(C)=1/4

   - Calculer les probabilités des événements suivants :

$$\text{un événement A se réalise} \iff \omega\in A$$

E1 « Aucun des événements A, B ne se réalisent »

$$\begin{aligned}
l'\acute{e}v\acute{e}nement\ E_1\ se\ r\acute{e}alise &\iff A\ ne\ se\ r\acute{e}alise\ pas\ \underline{et}\ B\ ne\ se\ r\acute{e}alise\ pas\\
&\iff \omega\notin A\ \underline{et}\ \ \omega\notin B\\
&\iff \omega\in\overline{A}\ \underline{et}\ \ \omega\in\overline{B}\\
&\iff \omega\in\overline{A}\ \cap\overline{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } P(E_1) &= P(\overline{A}\ \cap\overline{B})\\
&= P(\overline{A\cup B})\\
&= 1-P(A\cup B)\\
&= 1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)\\
&= 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9-3-3+1}{9}\\
&= \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

E2 « A se réalise, B ne se réalise pas »

$$\begin{aligned}
l'\acute{e}v\acute{e}nement\ E_2\ se\ r\acute{e}alise &\iff A\ se\ r\acute{e}alise\ \underline{et}\ B\ ne\ se\ r\acute{e}alise\ pas\\
&\iff \omega\in A\ \underline{et}\ \ \omega\notin B\\
&\iff \omega\in A\ \underline{et}\ \ \omega\in\overline{B}\\
&\iff \omega\in A\ \cap\overline{B}=A-B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } P(E_2) &= P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\\
&= \frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

- Calculer P(A∪C), si A et C sont des événements indépendants.

$$\text{A et C sont indépendants } \Longleftrightarrow P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup C) &= P(A) + P(C) - P(A \cap C) \\ &= P(A) + P(C) - P(A) \times P(C) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{4+3-1}{12} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

=

- Calculer P(A∪C), si A et C sont des événements disjoints.

$$\begin{aligned} \text{A et C sont disjoints} &\Longleftrightarrow A \cap C = \emptyset \\ &\Longleftrightarrow P(A \cap C) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup C) &= P(A) + P(C) - P(A \cap C) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0 = \frac{4+3}{12} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

2. Soient A, B, C, trois événements de Ω

   On donne : P(A) = 0.65, P(A ∩ B) = 0.15, P(B∩ C) = 0.1, P(A ∩ C) = 0.1,

   P(A ∩ B ∩ C) = 0.05

   On pose H1 = A ∪ (B ∩ C), H2 = A∩ (B ∪ C), H3= A ∪ B ∪ C et H4 = { ni A , ni B }.

   - Calculer P(H1), P(H2).

   $$\begin{aligned} P(H_1) &= P(A \cup (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= 0.65 + 0.1 - 0.05 = 0.7 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} P(H_2) &= P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= 0.15 + 0.1 - 0.05 = 0.2 \end{aligned}$$

   - Calculer P (H3), P(H4) si P(B) = 0, 35 et P(C)=0.05.

   $$\begin{aligned} P(H_3) &= P(A \cup B \cup C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0.65 + 0.35 + 0.05 - 0.15 - 0.1 - 0.1 + 0.05 = 0.75 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(H_4) &= P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) \\
&= 1 - P(A\cup B) \\
&= 1 - [P(A) + P(B) - P(A\cap B)] \\
&= 1 - 0.65 - 0.35 + 0.15 \\
&= 0.15
\end{aligned}
$$

12 Exercice N°6

Soient les événement suivants:

A "la souris porte l'anticorps A"   B " la souris porte l'anticorps B"

- si une souris porte l'anticorps A, alors 2 fois sur 5 elle porte aussi l'anticorps B;

  $$P(B/A) = \frac{2}{5}$$

  On peut en déduire que : $P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

- si une souris ne porte pas l'anticorps A, alors 4 fois sur 5 elle ne porte pas l'anticorps B.

  $$P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{4}{5}$$

  On peut en déduire que : $P(B/\overline{A}) = 1 - P(\overline{B}/\overline{A}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

- La moitié de la population porte l'anticorps A.

  $$P(A) = 1/2$$

1. Si une souris porte l'anticorps B, calculer la probabilité qu'elle porte aussi l'anticorps A. On cherche donc $P(A/B) = ?$

   $$\text{On utilise la formule de Bayes: } P(A/B) = \frac{P(B/A)\times P(A)}{P(B)}$$

   Le problème est qu'on n'a pas P(B), pour cela, on utilise la formule des probailités totales

   $$
   \begin{aligned}
   P(B) &= P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A}) \\
   &= \frac{2}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{2} \\
   &= \frac{2+1}{10} = 0.3
   \end{aligned}
   $$

   Conclusion

   $$P(A/B) = \frac{P(B/A)\times P(A)}{P(B)} = \frac{0.4\times 0.5}{0.3} = \frac{2}{3}$$

2. Si une souris ne porte pas l'anticorps B, calculer la probabilité qu'elle ne porte pas l'anticorps A. On cherche $P(\overline{A}/\overline{B})$ =?

$$\text{On utilise la formule de Bayes: } P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}/\overline{A}) \times P(\overline{A})}{P(\overline{B})}$$

Le problème est qu'on n'a pas P(B), pour cela, on a deux solutions:

1) on utilise la formule des probabilités totales ou 2) la formule de l'événement contraire , ainsi:

$$\begin{aligned} P(\overline{B}) &= P(\overline{B}/A)P(A) + P(\overline{B}/\overline{A})P(\overline{A}) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3+4}{10} = 0.7 \end{aligned}$$

ou

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.3 = 0.7$$

Conclusion

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}/\overline{A}) \times P(\overline{A})}{P(\overline{B})} = \frac{0.8 \times 0.5}{0.7} = \frac{4}{7}$$

Remarque

On utilise la formule des probabiltiés totales et Bayes , quand on a (dans notre exercice) un système complet de Ω

13 Exercice N°7

Soient les événements:

A l'événement : “la boite est abîmée” on a: $P(A) = 5\% = 0.05$

D l'événement “la boite achetée contient au moins une clé défectueuse”.

60% des boites abîmées contiennent au moins une clé défectueuse ie $P(D/A) = 60\% = 0.60$

98% des boites non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse ie $P(\overline{D}\ /\overline{A}) = 98\% = 0.98$

1. On a $P(A) = 5\% = 0.05$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.95$, $P(D/A) = 0.6$, $P(\overline{D}\ /\overline{A}) = 0.98$,

$$\text{On a } P(\overline{F}/G) = 1 - P(F/G)$$

donc $P(\overline{D}\ /\ A) = 1 - P(D/A) = 0.4$, $P(D/\overline{A}) = 1 -\ P(\overline{D}\ /\overline{A}) = 0.02$.

Pour calculer la probabilité de D, on utilise la loi des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D/A)P(A) + P(D/\overline{A})P(\overline{A}) \\ &= 0.6 \times 0.05 + 0.02 \times 0.95 \\ &= 0.03 + 0.019 = 0.049 \end{aligned}$$

2. Sachant que le client, en ouvrant, la boite constate que l'une des clés est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abimée ?ici on cherche à calculer $P(A/D)$

   selon la formule de Bayes: $P(A/D) = \dfrac{P(D/A)P(A)}{P(D)} = \dfrac{0.6 \times 0.05}{0.049} = 0.612$

14 Exercice N°8

Soient les événements:

A « l'immeuble s'est effondré »

B1 « Il n'y a pas de dalle »

B2«La dalle est sous dimensionnée »

B3« La dalle est correctement dimensionnée »

on a les données suivantes:

$P(A/B_1) = 85\% = 0.85$, $P(A/B_2) = 25\% = 0.25$, $P(A/B_3) = 1\% = 0.01$

5% il y a fraude (triche) donc 95% des cas on n'a pas fraudé ie $P(B_3) = 95\% = 0.95$

Les cas de fraude c'est les cas ou la dalle est ou sous dimensionné ou n'existe pas, donc $P(B_1)+ P(B_2) = 5\% = 0.05$

Or, on nous dit s'il y avait une fraude ; la dalle était sous dimensionnér dans 80% des cas et absente dans 20% des cas.

donc

$$P(B_2) = 0.8 \times 0.05 \ = 0.04 \quad \text{et } P(B_1) = 0.2 \times 0.05 = 0.01$$

- Si un immeuble, pris au hasard, est effondré, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas muni d'une dalle, ie on cherche à calculer $P(B_1/A)$

  $$\text{selon la formule de Bayes, on :} \quad P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A)}$$

  Pour calculer A, on utilise la formule des probabilités totales donc

  $$\begin{aligned} P(A) &= P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3) \\ &= 0.85 \times 0.01 + 0.25 \times 0.04 + 0.01 \times 0.95 \\ &= 0.0085 + 0.01 + 0.0095 = 0.028 \end{aligned}$$

  $$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.85 \times 0.01}{0.028} = 0.303$$

- Si un immeuble, pris au hasard, est effondré, quelle est la probabilité que la dalle soit sous dimensionnée, ie on cherche à calculer $P(B_2/A)$

  $$\text{selon la formule de Bayes, on :} \quad P(B_2/A) = \frac{P(A/B_2)P(B_2)}{P(A)}$$

  $$P(B_2/A) = \frac{P(A/B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{0.25 \times 0.04}{0.028} = 0.357$$

- Si un immeuble, pris au hasard, est effondré, quelle est la probabilité que la dalle soit sous dimensionnée que la dalle soit correctement dimensionnée, ie on cherche à calculer $P(B_3/A)$

$$\text{selon la formule de Bayes, on :} \quad P(B_3/A) = \frac{P(A/B_3)P(B_3)}{P(A)}$$

$$P(B_3/A) = \frac{P(A/B_3)P(B_3)}{P(A)} = \frac{0.01 \times 0.95}{0.028} = 0.339$$