Etablissement des équations de transport

L'état microscopique d'un gaz pur est assez bien défini si l'on connaît la fonction de distribution simple des vitesses $f\left(\vec{r},\vec{\mathrm{v}},t\right)$. Dans de nombreux cas, il est difficile ou inutile de chercher à connaître cette fonction. On utilisera alors une description plus simple en introduisant les grandeurs macroscopiques suivantes :

- La densité :

$$n\left(\vec{r},t\right)=\int f\left(\vec{r},\vec{\mathrm{v}},t\right)d^3\mathrm{v} \qquad \text{(II-27)}$$

- La vitesse moyenne du fluide :

$$\vec{u}\left(\vec{r},t\right)=\frac{1}{n\left(\vec{r},t\right)}\int \vec{\mathrm{v}}.f\left(\vec{r},\vec{\mathrm{v}},t\right)d^3\mathrm{v} \qquad \text{(II-28)}$$

- L'énergie cinétique moyenne des particules :

$$\overline{U}=\frac{1}{n}\int\frac{1}{2}mv^2\,fdv$$

Soit $f\left(\vec{r},\vec{v},t\right)$ la fonction de distribution qui obéit à l'équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{\mathrm{v}}.\vec{\nabla}_r f+\frac{\vec{F}}{m}.\vec{\nabla}_{\mathrm{v}} f=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{coll}}$$

Soit, de façon générale, $A\left(\vec{r},\vec{v},t\right)$ une fonction du vecteur vitesse, du vecteur position et du temps, dont la valeur moyenne de la grandeur $A\left(\vec{r},\vec{v},t\right)$ est définie par l'équation :

$$A\left(\vec{r},t\right)=\frac{1}{n\left(\vec{r},t\right)}\int \mathrm{A}\left(\vec{r},\vec{\mathrm{v}},t\right)f\left(\vec{r},\vec{\mathrm{v}},t\right)d^3\mathrm{v} \qquad \text{(II-30)}$$

Afin de déduire les équations de transport multiplions l'équation de Boltzmann par la grandeur $A\left(\vec{r},\vec{v},t\right)$, puis intégrons sur toutes les vitesses :

$$\int_{\mathrm{v}} A\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)d^3\mathrm{v}+\int_{\mathrm{v}} A\vec{\mathrm{v}}.\vec{\nabla}_r f d^3\mathrm{v}+\int_{\mathrm{v}} A\frac{\vec{F}}{m}.\vec{\nabla}_{\mathrm{v}} fd^3\mathrm{v}=\int_{\mathrm{v}} A\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{coll}} d^3\mathrm{v} \qquad \text{(II-31)}$$

1- Déduire les différents termes de cette équation

2- Evaluer les équations de conservation correspondant au deux premiers moments (A=1 et $A=m\vec{\mathrm{v}}$)

Solution

Terme de variation temporelle

Le premier terme de l'équation (II-31) peut s'écrire sous la forme :

$$\int_{(v)} A\frac{\partial f}{\partial t}d^3\mathrm{v} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{(v)} Afd^3\mathrm{v}\right] - \int_{(v)} \frac{\partial A}{\partial t}fd^3\mathrm{v} \qquad \text{(II-32)}$$

$$\int_{(v)} A\frac{\partial f}{\partial t}d^3\mathrm{v} = \frac{\partial}{\partial t}\left(n\langle A\rangle\right) - n\frac{\partial\langle A\rangle}{\partial t} \qquad \text{(II-33)}$$

Terme faisant intervenir le gradient spatial de f

Nous pouvons le transformer pour l'écrire sous la forme :

$$\int_{(\mathrm{v})} A\mathrm{v}_i\frac{\delta f}{\delta x_i}d^3\mathrm{v} = \frac{\delta}{\delta x_i}\left[\int_{(\mathrm{v})} f\mathrm{v}_iAd^3v\right] - \int_{(\mathrm{v})} \frac{\delta A}{\delta x_i}\mathrm{v}_i fd^3\mathrm{v} \qquad \text{(II-35)}$$

$$\int_{(\mathrm{v})} A\mathrm{v}_i\frac{\delta f}{\delta x_i}d^3\mathrm{v} = \frac{\delta}{\delta x_i}\left(n\langle \mathrm{v}_iA\rangle\right) - n\left\langle \mathrm{v}_i\frac{\delta A}{\delta x_i}\right\rangle \qquad \text{(II-36)}$$

$$\int_{(\mathrm{v})} A\vec{\mathrm{v}}.\vec{\nabla}_r f d^3\mathrm{v} = \vec{\nabla}_r\left(n\left\langle\vec{\mathrm{v}}A\right\rangle\right) - n\left\langle\vec{\mathrm{v}}.\vec{\nabla}_r A\right\rangle \qquad \text{(II-37)}$$

Terme faisant intervenir le gradient de f dans l'espace des vitesses

On simplifie le troisième terme en faisant une intégration par partie :

$$\int_{(\mathrm{v})} A\frac{F_i}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}_i}d^3\mathrm{v} = \int_{(\mathrm{v})} \frac{\partial}{\partial \mathrm{v}_i}\left(A\frac{F_i}{m}f\right)d^3\mathrm{v} - \int_{(\mathrm{v})} \frac{1}{m}\frac{\partial(AF_i)}{\partial \mathrm{v}_i}fd^3\mathrm{v} \qquad \text{(II-38)}$$

Or

$$\int_{(\mathrm{v})} \frac{\partial}{\partial \mathrm{v}_i}\left(A\frac{F_i}{m}f\right)d^3\mathrm{v} = \iint\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{AF_i}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}_i}d\mathrm{v}_i\right]d\mathrm{v}_jd\mathrm{v}_k = 0 \qquad \text{(II-39)}$$

car $\left[\frac{AF_i}{m}f\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ la fonction f infinie n'est pas acceptable physiquement.

Donc il reste :

$$\int_{(\mathrm{v})} \frac{1}{m}\frac{\partial(AF_i)}{\partial \mathrm{v}_i}fd^3\mathrm{v} = -\frac{n}{m}\left\langle\vec{\nabla}_\mathrm{v}AF_i\right\rangle = -\frac{nF_i}{m}\left\langle\vec{\nabla}_\mathrm{v}A\right\rangle \qquad \text{(II-40)}$$

Car la force est indépendante de la vitesse des particules

Et on trouve finalement :

$$\int_{v} A\frac{\vec{F}}{m}.\vec{\nabla}_{v} f d^3\mathrm{v} = -\frac{n}{m}\vec{F}.\left\langle \vec{\nabla}_{v} A\right\rangle \qquad (\text{II-41})$$

Remplaçons dans l'équation (II-31) chaque terme par sa valeur

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n\langle A\rangle\right) - n\frac{\partial\langle A\rangle}{\partial t} + \vec{\nabla}_r\left(n\left\langle \vec{\mathrm{v}}A\right\rangle\right) - n\left\langle \vec{\mathrm{v}}.\vec{\nabla}_r A\right\rangle - \frac{n}{m}\vec{F}.\left\langle \vec{\nabla}_{v} A\right\rangle = \int_{v} A\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} d^3\mathrm{v} \qquad (\text{II-42})$$

Nous allons maintenant utiliser cette relation pour obtenir les différents moments hydrodynamiques.

2- Les trois équations fondamentales de conservation

Equation de continuité

Elle correspond au premier moment de l'équation de transport (moment d'ordre 0), elle est obtenue en posant $A = 1$

De sorte que :

$$\frac{\partial\langle A\rangle}{\partial t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{\nabla}_r A = \vec{\nabla}_{v} A = 0$$

L'équation (II-42) se réduit à :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla}_r\left(n\left\langle \vec{\mathrm{v}}\right\rangle\right) = \int_{\vec{v}} \mathrm{s}(f)\,\mathrm{d}^3\mathrm{v} \qquad (\text{II-43})$$

Cette équation est appelée équation de conservation du nombre de particules ou équation de continuité. Elle est de nature scalaire (tenseur d'ordre zéro).

Le facteur $S(f)d^3v$ représente le nombre net de particules qui ont rejoint (quitté si le facteur est négatif) l'élément de volume d^3v de l'espace des vitesses par suite de collisions. Dans le cas de collisions élastiques, il n'y a ni création ni disparition de particules dans le volume du plasma. En effet, ces collisions ne font que modifier la distribution des vitesses des particules, ce qui ne change pas, localement, leur nombre total, et l'intégrale est donc forcément nulle.

Alors :

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla_r}\left(n\left\langle \vec{\mathrm{v}}\right\rangle\right)=0 \qquad \text{(II-44)}$$

On peut alors remplacer $\langle\vec{v}\rangle$ par $\vec{u}$ =vitesse moyenne de l'ensemble des particules :

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla_r}\left(n\vec{\mathrm{u}}\right)=0 \qquad \text{(II-44)}$$

C'est l'équation de conservation de l'ensemble des particules, le terme de collision étant nul (globalement, les termes de collision se compensent).

En multipliant (II-44) par la masse de l'espèce, ou par la charge de l'espèce, on obtient respectivement la loi de conservation de la masse ou celle de la charge électrique,

Equation de transport de la quantité de mouvement

Ce moment correspond à la variable microscopique : $A=m\vec{\mathrm{v}}$

Ce vecteur ainsi défini entraînant :

$$\frac{\partial m\vec{\mathrm{v}}}{\partial t}=0\ ,\ \vec{\nabla}_r m\vec{\mathrm{v}}=0\ ,\quad \vec{\nabla}_v m\vec{\mathrm{v}}=m\underline{I}$$

L'équation (II-42) se réduit à :

$$m\frac{\partial}{\partial t}\left(n\vec{u}\right)+m\overrightarrow{\nabla_r}\left(n\left\langle\vec{\mathrm{v}}.\vec{\mathrm{v}}\right\rangle\right)-n\vec{F}.\vec{I}\ =\int_{\mathrm{v}} m\vec{\mathrm{v}}s(f)d^3\mathrm{v} \qquad \text{(II-45)}$$

Posons : $\vec{\mathrm{v}}=\vec{u}+\vec{c}$ (II-47)

où $\vec{c}$ est la vitesse d'une particule relativement à la vitesse moyenne $\left\langle\vec{\mathrm{v}}\right\rangle=\vec{u}$ de l'ensemble des particules. vitesse de moyenne La vitesse $\vec{c}$ est donc une vitesse de moyenne nulle $\left\langle\vec{c}\right\rangle=\vec{0}$

Nous obtenons alors, compte tenu de (II-47):

$$\left\langle\vec{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{v}}\right\rangle=\left\langle\left(\vec{u}+\vec{c}\right)\left(\vec{u}+\vec{c}\right)\right\rangle$$
$$\left\langle\vec{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{v}}\right\rangle=\left\langle\vec{u}\vec{u}\right\rangle+\left\langle\vec{c}\vec{c}\right\rangle+2\vec{u}.\left\langle\vec{c}\right\rangle$$
$$\left\langle\vec{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{v}}\right\rangle=\vec{u}\vec{u}+\left\langle\vec{c}\vec{c}\right\rangle$$

D'autre part on a :

$$\vec{\nabla}\left(mn\langle\vec{v}\vec{v}\rangle\right)=\vec{\nabla}\left(mn\langle\vec{c}\vec{c}\rangle\right)+\vec{\nabla}\left(mn\langle\vec{u}\vec{u}\rangle\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(mn\langle\vec{v}\vec{v}\rangle\right)=\vec{\nabla}\left(mn\langle\vec{c}\vec{c}\rangle\right)+m\vec{u}\vec{\nabla}\left(n\vec{u}\right)+nm\left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{u}$$

$$m\frac{\partial}{\partial t}\left(n\vec{u}\right)+m\overrightarrow{\nabla_r}\left(n\left\langle\vec{\mathrm{v}}.\vec{\mathrm{v}}\right\rangle\right)+\vec{\nabla}_r\left(mn\langle\vec{c}\vec{c}\rangle\right)-n\vec{F}.\vec{I}\;=\int_{\mathrm{v}} m\vec{\mathrm{v}}s(f)d^3\mathrm{v} \quad (\text{II-48})$$

On définit un tenseur de pression cinétique $\overline{\overline{P}}=mn\langle\vec{c}\vec{c}\rangle$ et en tenant compte de la relation de continuité (II-44) (cas particulier d'un terme collisionnel nul) :

$$\frac{m\partial\left(n\vec{u}\right)}{\partial t}=m\left[n\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}-\vec{u}\nabla\left(n\vec{u}\right)\right] \qquad (\text{II-46})$$

Puisque :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n\langle m\vec{\mathrm{v}}\rangle\right)=m\left[n\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\frac{\partial n}{\partial t}\right]$$

la relation (II-48) prend la forme usuelle suivante :

$$mn\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{u}+\vec{\nabla}\overline{\overline{P}}-n\vec{F}=\int_{\mathrm{v}} m\vec{\mathrm{v}}s(f)d^3\mathrm{v} \qquad (II-49)$$

avec

$$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$$

$$\overline{\overline{P}}=nm\begin{bmatrix}\langle c_x^2\rangle & \langle c_xc_y\rangle & \langle c_xc_z\rangle\\ \langle c_yc_x\rangle & \langle c_y^2\rangle & \langle c_yc_z\rangle\\ \langle c_zc_x\rangle & \langle c_zc_y\rangle & \langle c_z^2\rangle\end{bmatrix}$$

Si la pression est isotrope $\langle c_xc_y\rangle\;,\langle c_xc_z\rangle,\langle c_yc_x\rangle,\langle c_yc_z\rangle,\langle c_zc_x\rangle,\langle c_zc_y\rangle$ disparaissent.

$$\langle c_x^2\rangle=\langle c_y^2\rangle=\langle c_z^2\rangle=\frac{c^2}{2}$$

$$\overline{\overline{P}}=\frac{nm}{3}\begin{bmatrix}c^2 & 0 & 0\\ 0 & c^2 & 0\\ 0 & 0 & c^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P & 0 & 0\\ 0 & P & 0\\ 0 & 0 & P\end{bmatrix}=PI$$

$$mn\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{u}+\vec{\nabla}P-n\vec{F}=\int_{\mathrm{v}} m\vec{\mathrm{v}}s(f)d^3\mathrm{v} \qquad (II-49)$$

Remarque :

Il est intéressant de comparer l'équation (II-49) avec l'équation hydro- dynamique du transfert de quantité de mouvement de NAVIER-STOKES dans I 'hypothèse d'un fluide incompressible.

$$\rho M\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\mathrm{v}}\vec{\nabla}\right)\mathrm{v}=-\vec{\nabla}P+n\vec{F}+\eta\vartriangle v \qquad (II-50)$$