Distribution d'équilibre

On se propose de déterminer la forme de la fonction de distribution d'une particule lorsque le système atteint une situation d'équilibre statistique, cet état l'équilibre est atteint, lorsque :

$$Df(\vec{r},\vec{v},t)=\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}+\vec{v}.\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{r}}+\frac{\vec{F_1}}{m}.\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{v}}=0$$

Nous savons que les collisions entre particules sont responsables des pertes et de la création des particules. Ces deux termes sont équilibrés lorsque le système atteint l'équilibre. Nous supposons que les collisions sont élastiques.

1- Ecrire l'expression du second membre de l'équation de Bolzmann

2- Trouver une relation entre les fonctions $f,\ f_1,\ f^{'} et\ f_1^{'}$ montrer que :

$$\log f^{'}+\ \log f_1^{'}=\log f\ +\ \log f_1$$

3- Comparer cette équation de conservation avec celles obtenus au cours d'une collision élastiqur

4- Déduire la forme générale de la fonction de distribution f

5- En utilisant les expression des moyennes locales pour déduire l'expression exacte de f.

solution

1-Nous allons considérer un système homogène en l'absence de champ extérieur et déduire la distribution d'équilibre. Lorsque l'équilibre est atteint, on a :

$$Df(\vec{r},\vec{v},t)=\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}+\vec{v}.\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{r}}+\frac{\vec{F_1}}{m}.\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{v}}=0$$

ce traduit par :

$$\int_{v_1}\int_{\Omega'}\sigma(\Omega^{'})v_{rel}\left(f^{'}f_1^{'}-f\ f_1\right)d\Omega' d^3v_1=0 \qquad (III-22)$$

2- soit

$$f^{'}f_1^{'}=f\ f_1$$

ou $$\log f^{'}+\ \log f_1^{'}=\log f\ +\ \log f_1 \qquad (III-23)$$

3- Ceci revient à dire que Logf est une quantité conservée dans la collision de deux particules. Or, nous savons qu'au cours d'une collision élastique entre deux particules, 5 quantités sont conservées entre l'état initial et l'état final :

- toute constante, la masse m par exemple,
- l'impulsion $m\vec{v}$ $(m\vec{v}+m\vec{v}_1 = m\vec{v}'+m\vec{v}_1')$), soit 3 composantes mv_x, mv_y et mv_z,
- l'énergie cinétique.

4- Il s'ensuit que Log$f$ ne peut être qu'une combinaison linéaire de ces 5 invariants :

$$\log f \ = A''+\vec{B}m\vec{v}-D\frac{1}{2}mv^2 \qquad (III-24)$$

où A, D sont des scalaires et **B** un vecteur. Ceci permet d'écrire f sous la forme :

$$f \ = A'\exp\left(\vec{B}m\vec{v}-D\frac{1}{2}mv^2\right) = A\exp\left[-\frac{mD}{2}\left(\vec{v}-\frac{\vec{B}}{D}\right)^2\right] \qquad (III-25)$$

5-où A et A sont aussi des constantes définies à partir des précédentes. Le nombre moyen de particules par unité de volume et la vitesse moyenne (ou hydrodynamique) sont définis par :

$$n = \int fd^3v \quad \text{et} \quad n\vec{u} = \int \vec{v} fd^3v$$

Ceci nous donne, après intégration, les deux relations suivantes :

$$n = A\left(\frac{2\pi}{mD}\right)^{3/2} \quad \text{et} \quad n\vec{u} = \frac{A\vec{B}}{D}\left(\frac{2\pi}{mD}\right)^{3/2} \qquad (III-26)$$

Doù : $\vec{u} = \dfrac{\vec{B}}{D}$ $\qquad (III-27)$

Par conséquent :

$$f = n\left(\frac{mD}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{mD}{2}\left(\vec{v}-\vec{u}\right)^2\right] \qquad (III-28)$$

Nous allons définir la température du gaz à partir de l'énergie cinétique moyenne des particules en utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie. Toutefois, il convient de noter que la vitesse des particules qu'il faut utiliser n'est pas $\vec{v}$ mais la vitesse intrinsèque $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$

La raison provient de ce que la vitesse hydrodynamique ne correspond qu'à un mouvement d'entraînement d'ensemble du système alors que $\vec{w}$ est la vitesse de nature aléatoire qui est responsable de la température du gaz. Pour s'en convaincre il suffit d'imaginer que l'on soumette le gaz à un mouvement de translation d'ensemble. La vitesse **u** augmente mais la température du gaz reste la même. Par conséquent :

$$\frac{1}{2}m\overline{(\vec{u}-\vec{v})^2} = \frac{1}{2}m\overline{w^2} = \frac{3}{2}KT \qquad (III-28)$$

Soit

$$3n\frac{K_BT}{m} = \int (\vec{u}-\vec{v})^2 \, f d^3v \qquad (III-29)$$

d'où

$$D = \frac{1}{K_BT}$$

$$f = n\left(\frac{m}{2\pi K_BT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mw^2}{2K_BT}\right) \qquad (III-30)$$

C'est la distribution de Maxwell dont nous avons déjà parlé dans le chapitre 8. La distribution de Maxwell est donc la solution d'équilibre de l'équation de Boltzmann. Cette dernière décrit donc l'évolution vers l'équilibre statistique d'un gaz dilué.