1ère année sciences de la terre et de l'univers **AU 2018-2019**

Matière : Mathématiques 2

Variable aléatoire

1-Variable aléatoire discrète

1-Notions des variables aléatoires

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$\omega \to X(\omega)$

Définition :

● Soit ξ une expérience aléatoire et Ω l'ensemble des résultats possibles de cette expérience. Une variable aléatoire définie sur Ω est une application de Ω dans R, telle que à chaque ω elle associe un nombre réel $X(\omega) = x_i$ appelé réalisation.

● Une variable aléatoire X est dite discrète si l'ensemble des réalisations possibles pour cette variable aléatoire est de la forme $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ où $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ (les x_i sont des valeurs isolées et ordonnées).

Exemple : Dans une usine de fabrication de pièces mécaniques, l'expérience consiste à prélever au hasard 3 pièces, et observer si ces pièces sont défectueuses. Par conséquent, les valeurs prises par X sont : 0, 1 , 2, 3.

2-Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition : Soient P une probabilité sur Ω, et X une variable aléatoire sur Ω. Alors on définit la loi de probabilité P_X de la variable aléatoire X comme suit :

$$\boldsymbol{P_X(x_i) = P(\{\omega \in \Omega \,/\, \mathrm{X}(\omega) = x_i\})}$$

Notation : $P_X(x_i) = P(X = x_i)$

Remarque : $P_X(x_i) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} P_X(x_i) = 1$

Exemple 1: Une urne contient 3 sortes de boules de poids différents : 8 boules de poids 1kg, 9 boules de poids 3kg et 3 boules de poids 5kg. On tire au hasard une boule de l'urne et on note X son poids.

1) $X : \Omega \to$ C , déterminer les valeurs de l'ensemble C.

$C = \{1, 3, 5\}$

2) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

C'est-à-dire il faut calculer : $P_X(1), P_X(3)$ et $P_X(5)$

$P_X(1) = P(\{\omega \in \Omega \, / \, X(\omega) = 1\}) = \frac{8}{8+9+3} = \frac{8}{20} = 0{,}4$

$P_X(3) = P(\{\omega \in \Omega \, / \, X(\omega) = 3\}) = \frac{9}{20} = 0{,}45$

$P_X(5) = P(\{\omega \in \Omega \, / \, X(\omega) = 5\}) = \frac{3}{20} = 0{,}15$

On voit bien que $P_X(1) + P_X(3) + P_X(5) = 0{,}4 + 0{,}45 + 0{,}15 = 1$

3-Représentation graphique de la loi de probabilité

Soit $X : \Omega \to \{x_1, \ x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. La représentation graphique s'effectue avec un diagramme en battons.

Exemple : On lance un dé deux fois et on compte le nombre de six obtenus. L'ensemble de réalisations est $\{0, 1, 2\}$ La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{36} = 0{,}69$	$\frac{10}{36} = 0{,}28$	$\frac{1}{36} = 0{,}03$

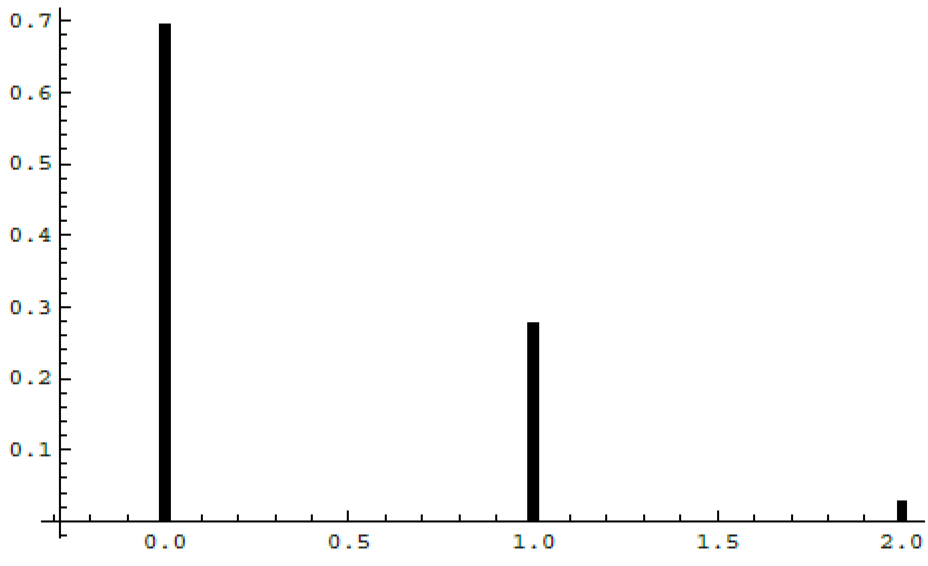


Diagramme en bâtons

4-La fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire telle que $X : \Omega \to \{x_1, \ x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Et soit P une probabilité sur Ω et P_X est une loi de probabilité de la variable aléatoire X. Nous adaptons les notions suivantes :

$(X = x) = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = x\}$

$(X \geq x) = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \geq x\}$

$(X > x) = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) > x\}$

Définition : La fonction de répartition F de X est définie par :

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \leq x\})$

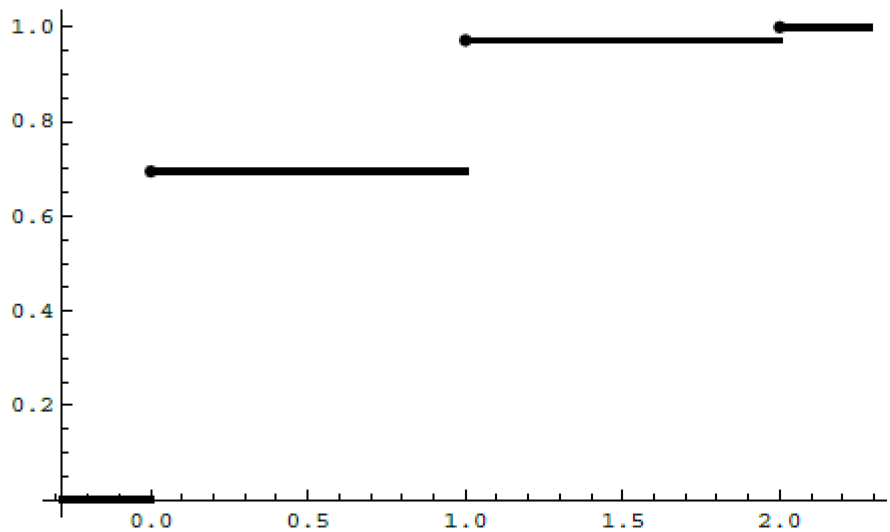
Exemple :

$F(x) = 0 \;\; pour \;\; x < 0$

$F(x) = P(X = 0) = 0{,}69 \;\; pour \;\; 0 \leq x < 1$

$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}69 + 0{,}28 = 0{,}97 \;\; pour \;\; 1 \leq x < 2$

$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}69 + 0{,}28 + 0{,}03 = 1 \;\; pour \;\; 0 \leq x < 1$



Fonction de répartition

Propriétés de la fonction de répartition :

1) $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$
3) F est croissante c.-à-d. si $x_1 \leq x_2$ alors $F(x_1) \leq F(x_2)$
4) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

5) F est continue à droite c.-à-d. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \mathrm{F}(x) = F(x_0)$

5-Valeurs caractéristiques

□ L'espérance mathématique :

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_1,\ x_2, \dots, x_n\}$ et P_X est une loi de X. On appelle espérance mathématique de X, la quantité :

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P_X(x_i)}$$

Remarque : $E(X)$ est dite valeur moyenne de X

Exemple 2 : $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i\, P_X(x_i) = \big(0 \times P_X(0)\big) + \big(1 \times P_X(1)\big) + \big(2 \times P_X(2)\big)$

$$= (0 \times 0{,}69) + (1 \times 0{,}28) + (2 \times 0{,}03) = 0{,}34$$

□ La variance :

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_1,\ x_2, \dots, x_n\}$ de loi de probabilité P_X . On appelle variance de X, la quantité : $V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2$.

Propriété utilisée en pratique :

$$\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2} \text{ avec } \boldsymbol{E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, P_X(x_i)}$$

Exemple 2 : $E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2\, P_X(x_i) = \big(0^2 \times P_X(0)\big) + \big(1^2 \times P_X(1)\big) + \big(2^2 \times P_X(2)\big)$

$$= (0^2 \times 0{,}69) + (1^2 \times 0{,}28) + (2^2 \times 0{,}03) = 0{,}4$$

Donc : $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 0{,}4 - (0{,}34)^2 = 0{,}2844$

□ L'écart type :

On appelle écart type d'une variable aléatoire X discrète la quantité :

$$\boldsymbol{\sigma_X = \sqrt{V(X)}}$$

Exemple 2 : $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}2844} = 0{,}533$

□ Moment d'ordre r :

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_1,\ x_2, \dots, x_n\}$ de loi de probabilité P_X.

Définition 1: On appelle moment d'ordre r de X par rapport à l'origine la quantité :

$M_r(X) = E(X^r - 0) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r\, P_X(x_i)$

Définition 2: On appelle moment d'ordre r de X par rapport à sa moyenne la quantité :

$$M_r(X) = E\big(X^r - E(X)\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - E(X)\big)^r \, P_X(x_i)$$

Remarque :

♦ Pour $r = 1$, on a $M_1(X) = E(X)$

♦ Pour $r = 2$, on a $M_2(X) = V(X)$

2-Variable aléatoire continue

Définition :

Une variable aléatoire est dite continue si son domaine de variation est l'ensemble $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$.

1-La fonction de répartition

Définition : On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire continue X la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme pour les variables aléatoires discrètes par :

$$\boldsymbol{F_X(x) = P(X \leq x)}$$

Propriétés :

1) F_X est continue
2) F_X est croissante.
3) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

Exemple : La fonction F_X définie par : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ x & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$

Remplit les conditions pour représenter une fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire continue.

Propriété :

A partir de la fonction de répartition, il est possible de calculer la probabilité que la variable aléatoire continue X appartienne à un intervalle :

$$\boldsymbol{P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)}$$

Exemple : Soit X une variable aléatoire continue décrite par la fonction de répartition de l'exemple précédent. Calculer $P(0{,}8 < X \leq 0{,}3)$; $P(-0{,}2 < X \leq 0{,}7)$; $P(0{,}5 < X \leq 2)$

$P(0{,}3 < X \leq 0{,}8) = F_X(0{,}8) - F_X(0{,}3) = 0{,}8 - 0{,}3 = 0{,}5$

$P(-0{,}2 < X \leq 0{,}7) = F_X(0{,}7) - F_X(-0{,}2) = 0{,}7 - 0 = 0{,}7$

$P(0{,}5 < X \leq 2) = F_X(2) - F_X(0{,}5) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

2-La densité de probabilité

Définition :

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X. On appelle fonction de densité de probabilité de X, la fonction f telle que :

$$\boldsymbol{f(x) = F'_X(x)}$$

Exemple : Considérons la fonction de répartition $F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ x & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$

Sa densité de probabilité est donnée par : $f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$

Propriétés :

• $\forall x, f(x) \geq 0$

• f est une fonction intégrable et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

A partir de la fonction densité de probabilité, on peut calculer la fonction de répartition :

$$\boldsymbol{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

Exemple : Soit X une variable aléatoire continue, dont la densité de probabilité est donnée par : $f(x) = x - \frac{1}{2}$ pour $1 \leq x \leq 2$. Calculer la fonction de répartition correspondante.

Tout d'abord, on remarque qu'on peut écrire $f(x)$ comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ x - \frac{1}{2} & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Ceci veut dire qu'il faut calculer la fonction de répartition sur les trois intervalles :

$x < 1; 1 \leq x \leq 2;\ x > 2.$

▪ Si $x < 1$: $f(x) = 0$

$\Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

▪ Si $1 \leq x \leq 2$: $f(x) = x - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt$

$\Rightarrow F_X(x) = 0 + \int_{1}^{x} \left(t - \frac{1}{2}\right) dt$

$\Rightarrow F_X(x) = \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + c\right]_1^x = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c\right) - \left(\frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}1 + c\right)$

$\Rightarrow F_X(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)$

▪ Si $x > 2$: $f(x) = 0$

$\Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{x} f(t)dt$

$\Rightarrow F_X(x) = 0 + \int_{1}^{2} \left(t - \frac{1}{2}\right) dt + 0$

$\Rightarrow F_X(x) = \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + c\right]_1^2 = \left(\frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2}2 + c\right) - \left(\frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}1 + c\right)$

$\Rightarrow F_X(x) = 1$

▪ On conclut alors que : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 1 \\ \frac{1}{2}(x^2 - x) & si & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & si & x > 2 \end{cases}$

3-Valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire continue

□ Espérance mathématique :

Définition : Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f, alors on définit l'espérance mathématique comme suit :

$$\boldsymbol{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}$$

Exemple : Soit X une variable aléatoire continue, dont la densité de probabilité est donnée par : $f(x) = x - \frac{1}{2}$ pour $1 \leq x \leq 2$. Calculer l'espérance mathématique.

E(X) = $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{1} xf(x)dx + \int_{1}^{2} xf(x)dx + \int_{2}^{+\infty} xf(x)dx$

$\Rightarrow E(X) = 0 + \int_{1}^{2} x\left(x - \frac{1}{2}\right) dx + 0$

$\Rightarrow E(X) = \int_{1}^{2} \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) dx$

$\Rightarrow E(X) = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + c\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{4}2^2 + c\right) - \left(\frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{4}1^2 + c\right)$

$\Rightarrow E(X) = \frac{19}{12} = 1{,}58$

Cas particulier : Une variable aléatoire continue est dite **centrée** si son espérance est nulle $\boldsymbol{E(X) = 0}$

□ La variance :

Définition : Soit X une variable aléatoire continue, alors la variance de X est donnée par :

$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathrm{E(X)})^2 f(t) dt$

Propriété pratique :

$$\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2} \text{ avec } \boldsymbol{E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx}$$

Exemple : Soit X une variable aléatoire continue, dont la densité de probabilité est donnée par : $f(x) = x - \frac{1}{2}$ pour $1 \leq x \leq 2$. Calculer l'espérance mathématique.

On sait que : $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$ avec $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$

Il faut calculer alors : $E(X^2)$

$E(X^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{1} x^2 f(x) dx + \int_{1}^{2} x^2 f(x) dx + \int_{2}^{+\infty} x^2 f(x) dx$

$\Rightarrow E\left(X^2\right) = 0 + \displaystyle\int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx + 0$

$\Rightarrow \ E\left(X^2\right) = \displaystyle\int_1^2 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) dx$

$\Rightarrow E\left(X^2\right) = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + c\right]_1^2 = \left(\frac{1}{4}2^4 - \frac{1}{6}2^3 + c\right) - \left(\frac{1}{4}1^4 - \frac{1}{6}1^3 + c\right)$

$\Rightarrow E\left(X^2\right) = \dfrac{78}{24} = \dfrac{13}{4} = 3{,}25$

On a : $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

$\Rightarrow V(X) = 3{,}25 - (1{,}58)^2$

$\Rightarrow V(X) = 0{,}7536$

□ L'écart-type :

On appelle écart type d'une variable aléatoire X continue, la quantité :

$$\boldsymbol{\sigma_X = \sqrt{V(X)}}$$

Exemple : Considérons l'exemple précédent.

$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}7536}$

$\Rightarrow \sigma_X = 0{,}868$

Cas particulier : Une variable aléatoire continue est dite **centrée réduite** si son espérance est nulle $\boldsymbol{E(X) = 0}$ et son écart-type est égal à 1 : $\boldsymbol{\sigma_X = 1}$

3-Lois de probabilité usuelles

1-Cas discret :

1-La loi de Bernoulli

On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0{,}1[$ si X (Ω)= $\{0, 1\}$ (c'est-à-dire si l'ensemble de réalisations associé à cette expérience aléatoire est $\{0{,}1\}$ où 0 correspond à l'échec et 1 correspond au succès) avec $P_X(0) = q$ et $P_X(1) = p$ et $p + q = 1$.

On écrit X ↳ B(p)

Proposition :

Si X ↳ B(p) alors E(X) = p et V(X) = $p\ q$

Exemple 1: On lance une pièce de monnaie une fois, on s'intéresse au nombre de pile. L'ensemble de réalisations associé à cette expérience aléatoire est $\{0, 1\}$

$(X = 0)$: Echec de l'événement (l'événement ''avoir pile'' n'est pas réalisé)

$(X = 1)$: Succès de l'événement (l'événement ''avoir pile'' est pas réalisé)

Donc X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$ (car la probabilité ''d'avoir pile'' quand on lance une pièce de monnaie une fois est égale à $\frac{1}{2}$) ceci veut dire que :

$$P(X = 1) = P_X(1) = p = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 0) = P_X(0) = q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exemple 2: On lance un dé équilibré une fois, on s'intéresse au nombre de fois qu'on obtient le chiffre 3. L'ensemble de réalisations associé à cette expérience aléatoire est $\{0, 1\}$

$(X = 0)$: Echec de l'événement (l'événement ''avoir le chiffre 3'' n'est pas réalisé)

$(X = 1)$: Succès de l'événement (l'événement ''avoir le chiffre 3'' est pas réalisé)

Donc X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$ (car la probabilité ''d'avoir le chiffre 3'' quand on lance le dé une fois est égale à $\frac{1}{6}$) ceci veut dire que :

$P(X = 1) = P_X(1) = p = \frac{1}{6}$

$P(X = 0) = P_X(0) = q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

2-La loi binomiale

On dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in \,]0,1[$ si :

X (Ω)= $\{0,1,2, \dots, n\}$ (c'est-à-dire si l'ensemble de réalisations associé à cette expérience aléatoire est $\{0, 1, 2, \dots, n\}$). Dans ce cas on a $P_X(k) = c_n^k p^k q^{n-k}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ et

$p + q = 1$.

Rappelons que : $c_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (on l'a vu dans le chapitre de l'analyse combinatoire)

On écrit $X \hookrightarrow$ B(n, p)

Remarque :

Si $X \hookrightarrow$ B(n, p) alors :

• E(X) = np et V(X) = npq

• Si n = 1 alors B(n, p) = B(p)

• B(n, p) est une probabilité, en effet : $\sum_{k=0}^{n} P_X(k) = \sum_{k=0}^{n} c_n^k \, p^k \, q^{n-k} = (p + q)^n = 1$

Exemple 1: On lance une pièce de monnaie 4 fois, on s'intéresse au nombre de pile.
L'ensemble de réalisations associé à cette expérience aléatoire est $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

Donc X suit la loi binomiale de taille $n = 4$ et de paramètre $p = \frac{1}{2}$, on écrit alors $X \hookrightarrow$ B$(4, \frac{1}{2})$

$P_X(k) = c_4^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-k}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (k représente le nombre de fois qu'on obtient pile)

$\Rightarrow P_X(k) = c_4^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Si on veut calculer la probabilité d'avoir 3 fois pile, on pose $k = 3$ dans la formule précédente, on obtient alors :

$P_X(3) = c_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3! \times 4}{3!} \frac{1}{8} \frac{1}{2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Exemple 2: On lance un dé équilibré 10 fois, on s'intéresse au nombre de fois qu'on obtient le chiffre 3. L'ensemble de réalisations associé à cette expérience aléatoire est $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Donc X suit la loi binomiale de taille $n = 10$ et de paramètre $p = \frac{1}{6}$, on écrit alors

$X \hookrightarrow$ B(10,$\frac{1}{6}$)

$P_X(k) = c_{10}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10-k}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (k représente le nombre de fois qu'on obtient pile)

$\Rightarrow P_X(k) = c_{10}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Si on veut calculer la probabilité d'avoir 7 fois le chiffre 3, on pose $k = 7$ dans la formule précédente, on obtient alors :

$P_X(7) = c_{10}^7 \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left(\frac{5}{6}\right)^{10-7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{7!\times8\times9\times10}{7!\times3!} \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{8\times9\times10}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left(\frac{5}{6}\right)^3 =$ $120 \times \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 2{,}48 \times 10^{-4}$

3-La loi de Poisson

Cette loi est utilisée lorsqu'il s'agit des événements rares : maladies rares, accidents mortelles, … On dit alors que la variable aléatoire X suit la loi Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Dans ce cas on a : $P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$.

Propriétés :

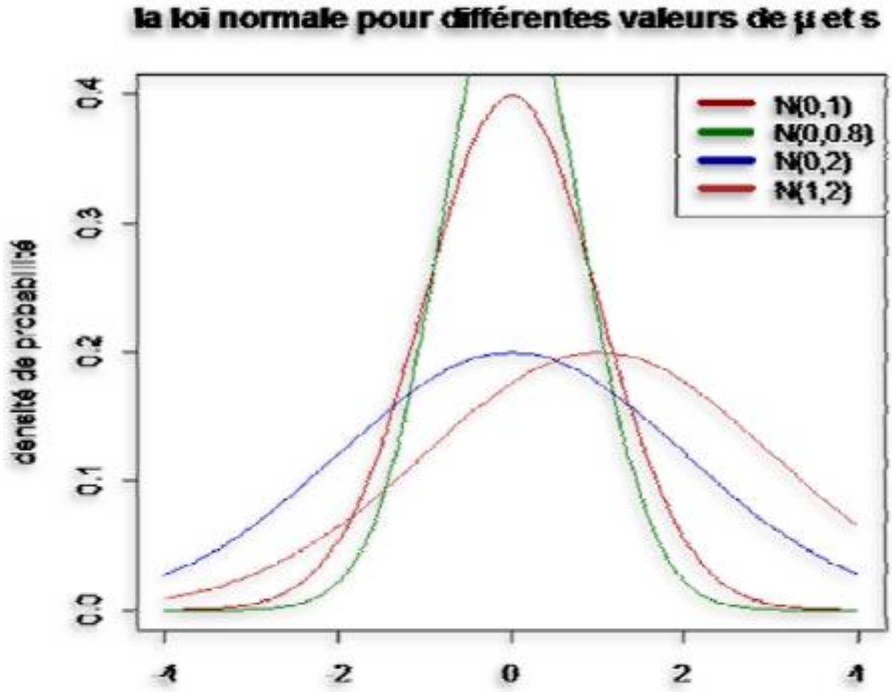
E(X) = V(X) = λ , $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$.

2-Cas continue :

1-La loi normale (ou loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss) :

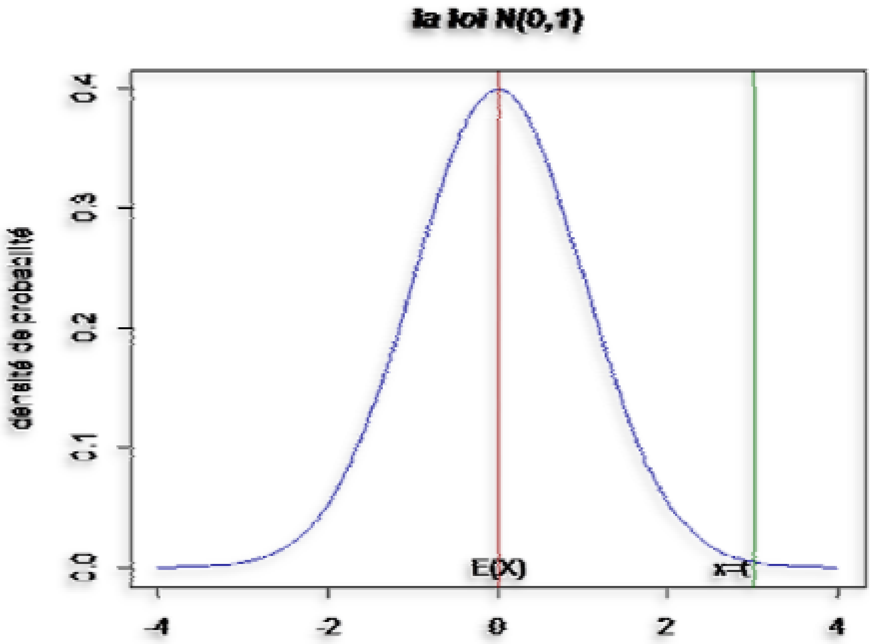
Définition : Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique $E(X) = \mu$ et d'écart-type σ. On dit que X suit la loi de normale de paramètre μ et σ, notée N(μ,σ) si elle admet pour densité de probabilité la fonction $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

La représentation graphique : La fonction densité de probabilité suit une courbe en cloche, symétrique par rapport à la moyenne μ.



<u>Proposition :</u>

Si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on dit que la variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée N(0,1) et la représentation graphique de sa densité de probabilité est comme suit :



<u>Théorème :</u>

Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ (c'est-à-dire $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma)$). Si on applique le changement de variable $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ on a :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(U \leq u) = F_U(u)$$

Et donc la variable aléatoire U suit la loi normale centrée réduite N(0,1).

<u>Utilisation des tables :</u>

♦ Soit X une variable aléatoire de loi N(0,1). Exprimer à l'aide de la fonction de répartition de X, puis calculer en utilisant la table les probabilités suivantes :

▪ $P(X \leq 1{,}46) = F_X(1{,}46) = F_X(1{,}4 + 0{,}06) = 0{,}9279$

▪ $P(X \leq 2{,}73) = F_X(2{,}73) = F_X(2{,}7 + 0{,}03) = 0{,}9968$

▪ $P(X \leq 0{,}15) = F_X(0{,}15) = F_X(0{,}1 + 0{,}05) = 0{,}5596$

▪ $P(X > 1{,}12) = 1 - P(X \leq 1{,}12) = 1 - F_X(1{,}12) = 1 - F_X(1{,}1 + 0{,}02) = 1 - 0{,}8686$

$$= 0{,}1314$$

▪ $P(X \leq -1{,}34) = F_X(-1{,}34) = 1 - F_X(1{,}34) = 1 - F_X(1{,}3 + 0{,}04) = 1 - 0{,}9099$

$$= 0{,}0901$$

▪ $P(1{,}1 < X < 2{,}63) = F_X(2{,}63) - F_X(1{,}1) = F_X(2{,}6 + 0{,}03) - F_X(1{,}1 + 0{,}00)$

$$= 0{,}9957 - 0{,}8643 = 0{,}1314$$

♦ Si X suit une loi N(40,5), calculer :

▪ $P(X < 30) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{30-\mu}{\sigma}\right) = P\left(U < \frac{30-40}{5}\right) = P(U < -2) = F_U(-2) = 1 - F_U(2)$

$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

▪ $P(45{,}5 < X < 47) = P\left(\frac{45{,}5-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{47-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{45{,}5-40}{5} < U < \frac{47-40}{5}\right)$

$$= P(1{,}1 < U < 1{,}4) = F_U(1{,}4) - F_U(1{,}1) = 0{,}9192 - 0{,}8643 = 0{,}0549$$

2-La loi du χ^2 (on dit khi deux)

Définition : Soit X une variable aléatoire continue, on dit que X suit la loi de khi deux à ν degrés de liberté (d.d.l) si X est de la forme : $X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_\nu^2$ où $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ sont ν lois normales centrées réduites N(0,1) indépendantes.

On écrit $X \hookrightarrow \chi_\nu^2$

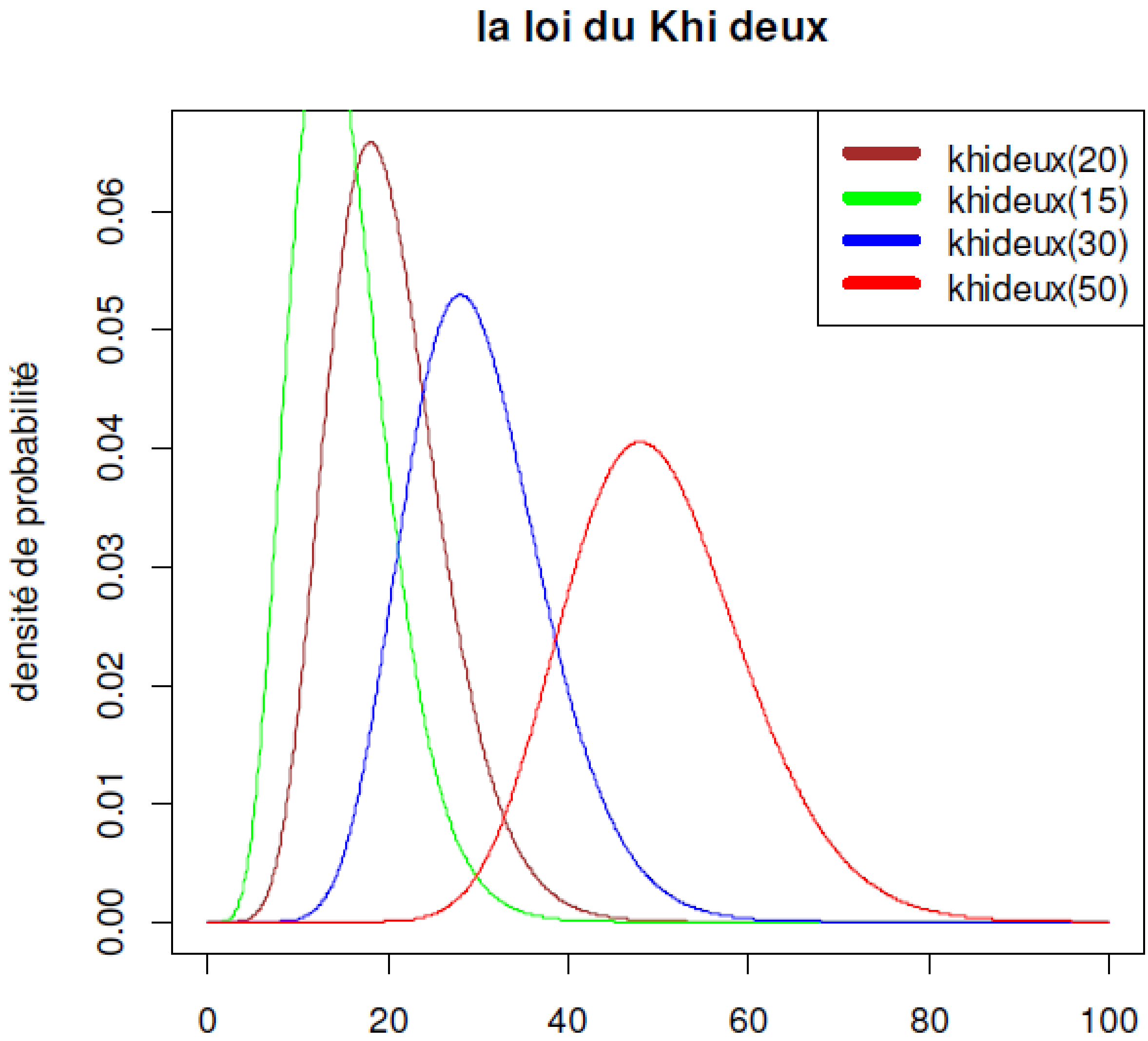
Remarque :

Si $X \hookrightarrow \chi_\nu^2$ alors :

• $E(\chi_\nu^2) = \nu$ et $V(\chi_\nu^2) = 2\nu$

La représentation graphique de la densité de probabilité :

Bien entendu la représentation graphique de la densité de probabilité va dépendre de ν.



Utilisation des tables :

♦ Soit X une variable aléatoire de loi χ^2_9. Calculer en utilisant la table les probabilités suivantes :

▪ $P(X \geq 14{,}68) = 0{,}1$

▪ $P(X \leq 2{,}7) = 1 - P(X \geq 2{,}7) = 1 - 0{,}975 = 0{,}025$

♦ Soit X une variable aléatoire de loi $\chi^2{}_{20}$. Calculer en utilisant la table les valeur critique β :

▪ $P(X \geq \beta) = 0{,}9 \Rightarrow \beta = 12{,}4426$

▪ $P(X \leq \beta) = 0{,}01 \Rightarrow 1 - P(X > \beta) = 0{,}01 \Rightarrow P(X > \beta) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \Rightarrow \beta = 8{,}2604$

3-La loi T de Student

Définition : Soit X une variable aléatoire continue, on dit que X suit la loi de Student à ν degrés de liberté (d.d.l) si X est de la forme : $X = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}}$ où U est la loi normale centrée réduites N(0,1).

On écrit $X \hookrightarrow T_\nu$

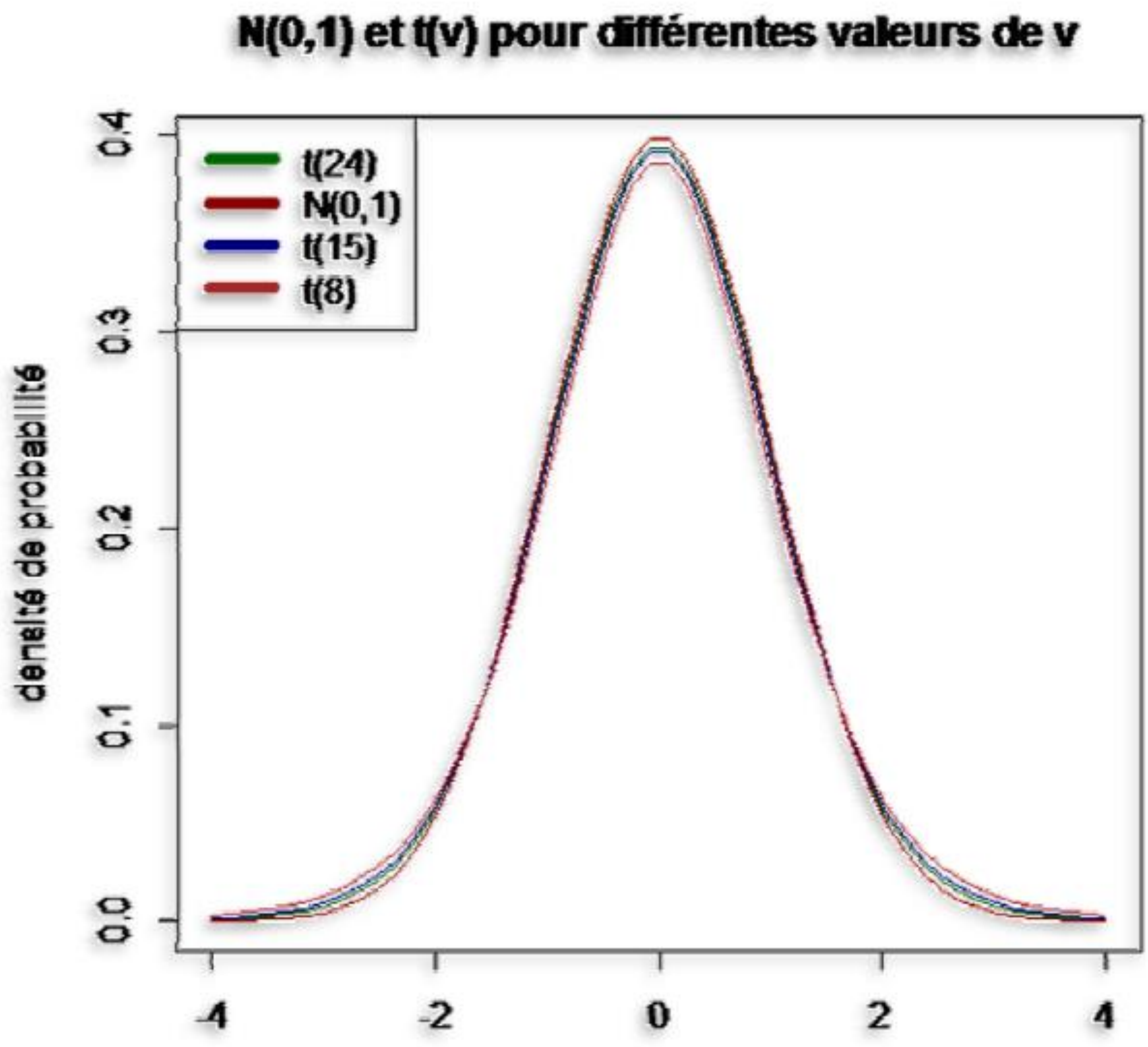
Remarque :

Si $X \hookrightarrow T_\nu$ alors :

• $E(T_\nu) = 0$ et $V(T_\nu) = \frac{\nu}{\nu-2}$

La représentation graphique de la densité de probabilité :

Bien entendu la représentation graphique de la densité de probabilité va dépendre de ν mais les courbes toutes ont la même forme.



Utilisation des tables :

♦ Soit X une variable aléatoire de loi T_{12}. Calculer en utilisant la table les probabilités suivantes :

▪ $P(|X| \geq 1{,}78) = 0{,}1$

▪ $P(|X| \leq 2{,}68) = 1 - P(|X| \geq 2{,}68) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$

♦ Soit X une variable aléatoire de loiT_7. Calculer en utilisant la table la valeur critique β :

▪ $P(|X| \geq \beta) = 0{,}3 \Rightarrow \beta = 1{,}1192$

▪ $P(|X| \leq \beta) = 0{,}08 \Rightarrow 1 - P(|X| > \beta) = 0{,}08 \Rightarrow P(|X| > \beta) = 1 - 0{,}08 = 0{,}02$

$$\Rightarrow \beta = 2{,}9980$$

4-La loi $F_{\nu_1;\nu_2}$ de fisher-Snedecor

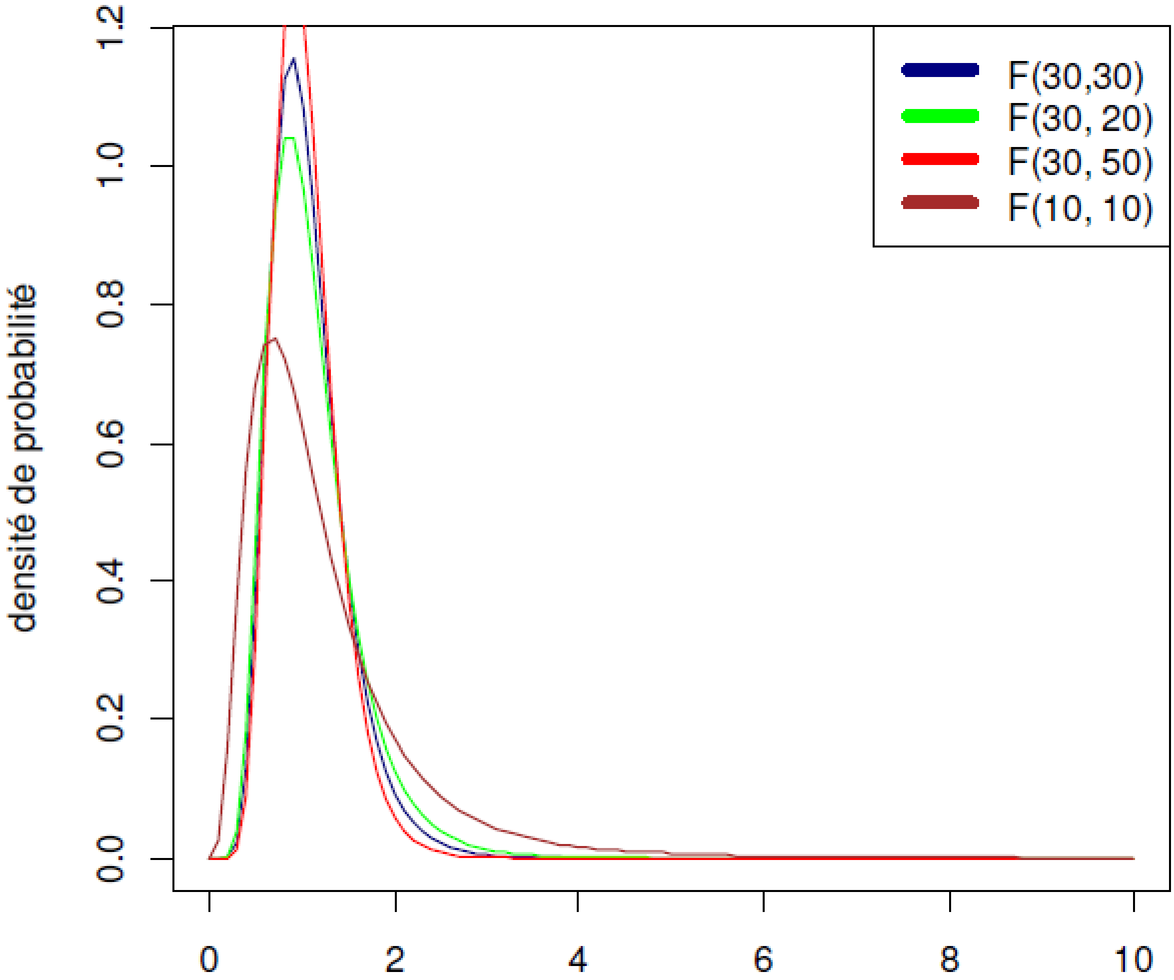
Définition : Soit X une variable aléatoire continue, on dit que X suit la loi de fisher-Snedecor à ν_1 et ν_2 degrés de liberté (d.d.l) si X est de la forme : $X = \frac{\chi^2_{\nu_1}/\nu_1}{\chi^2_{\nu_2}/\nu_2}$

On écrit $X \hookrightarrow F_{\nu_1;\nu_2}$

Remarque : $F_{\nu_1;\nu_2} \neq F_{\nu_2;\nu_1}$

La représentation graphique de la densité de probabilité :

Bien entendu la représentation graphique de la densité de probabilité va dépendre de ν mais les courbes toutes ont la même forme.



<u>Utilisation des tables :</u>

♦ Soit X une variable aléatoire de loi $F_{5;18}$. Calculer en utilisant la table la valeur critique β :

▪ $P(X \geq \beta) = 0{,}05 \Rightarrow \beta = 2{,}77$

▪ $P(X \leq \beta) = 0{,}975 \Rightarrow 1 - P(X \geq \beta) = 0{,}975 \Rightarrow P(X \geq \beta) = 1 - 0{,}975 = 0{,}025$

$$\Rightarrow \beta = 3{,}38$$