$1^{ère}$ année sciences de la terre et de l'univers **AU 2019-2020**

Matière : Mathématiques 2

TD 5 : Variables aléatoires continues

Exercice 1 :

Soit la fonction de répartition définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & pour\ x < 0 \\ 1 - e^{-x} & pour\ x \geq 0 \end{cases}$$

1) Donner l'expression de densité de probabilité f correspondante.

Soit X une V.A. de densité de probabilité f.

2) Calculer l'espérance mathématique.
3) Calculer la probabilité $P(2 < X \leq 4)$.

Exercice 2 :

La durée de vie d'une ampoule électrique, mesurée en heures, est une variable aléatoire positive X, dont la fonction densité de probabilité est $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, pour $\lambda > 0$.

1) Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité et calculer sa fonction de répartition.
2) Déterminer λ sachant que la durée de vie moyenne d'une ampoule est de 2000 heures.
3) Calculer la probabilité pour qu'une lampe dure moins de 2000 heures.

Exercice 3 :

Soit X une variable aléatoire de loi N(0,1). Exprimer à l'aide de la fonction de répartition de X, puis calculer en utilisant la table les probabilités suivantes :

$P(X \leq 2{,}35)$, $P(X \leq 1{,}25)$, $P(X \leq 0{,}25)$, $P(X > 1{,}15)$, $P(X > 0{,}04)$, $P(X > -2{,}5)$, $P(2{,}1 < X < 2{,}53)$, $P(-1{,}11 < X < 1{,}37)$, $P(|X| < 2{,}05)$.

Exercice 4 :

Si X suit une loi N(35,5), calculer $P(X < 25)$, $P(37{,}5 < X < 40)$ et $P(32{,}5 < X < 37{,}5)$.

Exercice 5 :

1) Soit $X \hookrightarrow \chi^2_{14}$, calculer en utilisant la table les probabilités suivantes :

- $P(X \geq 6{,}57)$

▪ $P(X \leq 29{,}14)$

2) Soit $X \hookrightarrow \chi^2_{23}$. Calculer en utilisant la table les valeur critique β :

▪ $P(X \geq \beta) = 0{,}025$

▪ $P(X \leq \beta) = 0{,}95$

3) Soit $X \hookrightarrow T_4$, calculer en utilisant la table les probabilités suivantes :

▪ $P(|X| \geq 1{,}53)$

▪ $P(|X| \leq 8{,}61)$

4) Soit $X \hookrightarrow T_{22}$. Calculer en utilisant la table la valeur critique β :

▪ $P(|X| \geq \beta) = 0{,}5$

▪ $P(|X| \leq \beta) = 0{,}7$

5) Soit $X \hookrightarrow F_{20;30}$. Calculer en utilisant la table la valeur critique β :

▪ $P(X \geq \beta) = 0{,}05$

▪ $P(X \geq \beta) = 0{,}025$

TD 5 : Variables aléatoires continues – Le corrigé

Exercice 1 :

Soit la fonction de répartition définie par : $F(x) = \begin{cases} 0 & pour\ x < 0 \\ 1 - e^{-x} & pour\ x \geq 0 \end{cases}$

1) Donner l'expression de densité de probabilité f correspondante.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} (0)' & pour\ x < 0 \\ (1 - e^{-x})' & pour\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{pour\ x < 0} \\ \boldsymbol{e^{-x}} & \boldsymbol{pour\ x \geq 0} \end{cases}$$

Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f.

2) Calculer l'espérance mathématique.

$$\boldsymbol{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{xf(x)dx} = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\, dx$$

Faisons une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u = x \\ v' = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

Donc : $E(X) = [-xe^{-x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$

$\Rightarrow\ E(X) = \lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x}) - (0e^0) + [-e^{-x} + c]_0^{+\infty}$

Or on sait que : $\lim_{y\to-\infty} ye^y = 0$, et par suite $\lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x}) = 0$

$\Rightarrow\ E(X) = [-e^{-x} + c]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}(-e^{-x} + c) - (-e^{-0} + c)$

$\Rightarrow\ \boldsymbol{E(X) = 1}$

3) Calculer la probabilité $P(2 < X \leq 4)$.

On applique la formule suivante : $\boldsymbol{P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)}$

$\Rightarrow\ P(2 < X \leq 4) = F(4) - F(2) = (1 - e^{-4}) - (1 - e^{-2}) = -e^{-4} + e^{-2} = 0{,}117$

$\Rightarrow\ \boldsymbol{P(2 < X \leq 4) = 0,117}$

Exercice 2 :

La durée de vie d'une ampoule électrique, mesurée en heures, est une variable aléatoire positive X, dont la fonction densité de probabilité est $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, pour $\lambda > 0$.

1) Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité et calculer sa fonction de répartition F_X

♦ La variable aléatoire X est positive, ceci veut dire que $X : \Omega \to [0, +\infty[$

♦ Vérifions que f est une densité de probabilité :

- On a bien : $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, +\infty[$
- Il reste à montrer que : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + c\right]_0^{+\infty}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lambda\left(\left(\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + c\right)\right) - \left(-\frac{1}{\lambda}e^0 + c\right)\right) = \lambda\left((0 + c) - \left(-\frac{1}{\lambda} + c\right)\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lambda\left(0 + c + \frac{1}{\lambda} - c\right) = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1$$

On conclut alors que : ***f* est une densité de probabilité**.

• $F_X(x) = ?$

$$\boldsymbol{F_X(x)} = \int_{-\infty}^{x} \boldsymbol{f(t)\,dt} = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda t}\,dt = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} + c\right]_0^x$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \lambda\left(\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + c\right) - \left(-\frac{1}{\lambda} e^{0} + c\right)\right) = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + c + \frac{1}{\lambda} - c\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}}$$

2) Déterminer λ sachant que la durée de vie moyenne d'une ampoule est de 2000 heures.

La durée de vie moyenne d'une ampoule est de 2000 heures $\Rightarrow E(X) = 2000$

$$\boldsymbol{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x f(x)\,dx} = \int_{0}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$$

Faisons une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u = \lambda x \\ v' = e^{-\lambda x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \lambda \\ v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{cases}$

Donc : $E(X) = \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$

$$\Rightarrow E(X) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x e^{-\lambda x}\right) - \left(-0 e^{0}\right) + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + c\right]_0^{+\infty}$$

Or on sait que : $\lim_{y\to-\infty} y e^{y} = 0$, et par suite $\lim_{x\to+\infty}\left(-x e^{-\lambda x}\right) = 0$

$$\Rightarrow E(X) = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + c\right]_0^{+\infty} = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + c\right) - \left(-\frac{1}{\lambda} e^{0} + c\right) = \frac{1}{\lambda}$$

Et comme on a par hypothèse : $E(X) = 2000$, on en déduit que : $\frac{1}{\lambda} = 2000$

On conclut alors que : $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2000}} = \mathbf{5 \times 10^{-4}}$

3) Calculer la probabilité pour qu'une lampe dure moins de 2000 heures.

$P(X \leq 2000) = ?$

On sait que : $\boldsymbol{F_X(x) = P(X \leq x)}$

$$\Rightarrow P(X \leq 2000) = F_X(2000) = 1 - e^{-\lambda \times 2000} = 1 - e^{-\frac{1}{2000}\times 2000} = 1 - e^{-1} = 0{,}632$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(X \leq 2000) = 1 - e^{-1} = 0{,}632}$$

<u>Exercice 3 :</u>

Soit X une variable aléatoire de loi N(0,1). Exprimer à l'aide de la fonction de répartition de X, puis calculer en utilisant la table les probabilités suivantes :

- $P(X \leq 2{,}35) = F_X(2{,}35) = F_X(2{,}3 + 0{,}05) = 0{,}9906$
- $P(X \leq 1{,}25) = F_X(1{,}25) = F_X(1{,}2 + 0{,}05) = 0{,}8944$
- $P(X \leq 0{,}25) = F_X(0{,}25) = F_X(0{,}2 + 0{,}05) = 0{,}5987$
- $P(X > 1{,}15) = 1 - P(X \leq 1{,}15) = 1 - F_X(1{,}15) = 1 - F_X(1{,}1 + 0{,}05) = 1 - 0{,}8749$

$$= 0{,}1251$$

- $P(X > 0{,}04) = 1 - P(X \leq 0{,}04) = 1 - F_X(0{,}04) = 1 - F_X(0{,}0 + 0{,}04) = 1 - 0{,}5160$

$$= 0{,}454$$

- $P(X > -2{,}5) = 1 - P(X \leq -2{,}5) = 1 - F_X(-2{,}5) = 1 - \left(1 - F_X(2{,}5)\right) = F_X(2{,}5)$

$$= 0{,}9938$$

- $P(2{,}1 < X < 2{,}53) = F_X(2{,}53) - F_X(2{,}1) = F_X(2{,}5 + 0{,}03) - F_X(2{,}1 + 0{,}00)$

$$= 0{,}9943 - 0{,}9821 = 0{,}0122$$

- $P(-1{,}11 < X < 1{,}37) = F_X(1{,}37) - F_X(-1{,}11) = F_X(1{,}3 + 0{,}07) - \left(1 - F_X(1{,}11)\right)$

$$= F_X(1{,}3 + 0{,}07) - \left(1 - F_X(1{,}1 + 0{,}01)\right) = 0{,}9147 - (1 - 0{,}8665) = 0{,}7812$$

- $P(|X| < 2{,}05) = P(-2{,}05 < X < 2{,}05) = F_X(2{,}05) - F_X(-2{,}05)$

$$= F_X(2{,}05) - \left(1 - F_X(2{,}05)\right) = 2F_X(2{,}05) - 1 = (2 \times 0{,}9798) - 1 = 0{,}9596$$

<u>Exercice 4 :</u>

Si X suit une loi N(35,5), calculer $P(X < 25)$, $P(37{,}5 < X < 40)$ et $P(32{,}5 < X < 37{,}5)$.

Pour répondre à cette question il faut appliquer le théorème suivant :

<u>Théorème :</u>

Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ (c'est-à-dire $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma)$). Si on applique le changement de variable $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ on a :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(U \leq u) = F_U(u)$$

Et donc la variable aléatoire U suit la loi normale centrée réduite $N(\mu, \sigma)$.

Dans notre cas : $\mu = 35$ et $\sigma = 5$

♦ $P(X < 25) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{25-\mu}{\sigma}\right) = P\left(U < \frac{25-35}{5}\right) = P(U < -2) = F_U(-2) = 1 - F_U(2)$

$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

♦ $P(37{,}5 < X < 40) = P\left(\frac{37{,}5-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{40-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{37{,}5-35}{5} < U < \frac{40-35}{5}\right)$

$$= P(0{,}5 < U < 1) = F_U(1) - F_U(0{,}5) = 0{,}8413 - 0{,}6915 = 0{,}1498$$

♦ $P(32{,}5 < X < 37{,}5) == P\left(\frac{32{,}5-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{37{,}5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{32{,}5-35}{5} < U < \frac{37{,}5-35}{5}\right)$

$$= P(-0{,}5 < U < 0{,}5) = F_U(0{,}5) - F_U(-0{,}5) = F_U(0{,}5) - \big(1 - F_U(0{,}5)\big)$$
$$= \big(2 \times F_U(0{,}5)\big) - 1 = (2 \times 0{,}6915) - 1 = 0{,}383$$

Exercice 5 :

4) Soit $X \looparrowright \chi^2_{14}$, calculer en utilisant la table les probabilités suivantes :

▪ $P(X \geq 6{,}57) = 0{,}95$

▪ $P(X \leq 29{,}14) = 1 - P(X \geq 29{,}14) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

5) Soit $X \looparrowright \chi^2_{23}$. Calculer en utilisant la table les valeur critique β :

▪ $P(X \geq \beta) = 0{,}025 \Rightarrow \beta = 38{,}0756$

▪ $P(X \leq \beta) = 0{,}95 \Rightarrow 1 - P(X > \beta) = 0{,}95 \Rightarrow P(X > \beta) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow \beta = 35{,}1725$

6) Soit $X \looparrowright T_4$, calculer en utilisant la table les probabilités suivantes :

▪ $P(|X| \geq 1{,}53) = 0{,}2$

▪ $P(|X| \leq 8{,}61) = 1 - P(|X| \geq 8{,}61) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$

7) Soit $X \looparrowright T_{22}$. Calculer en utilisant la table la valeur critique β :

▪ $P(|X| \geq \beta) = 0{,}5 \Rightarrow \beta = 0{,}6858$

▪ $P(|X| \leq \beta) = 0{,}7 \Rightarrow 1 - P(|X| > \beta) = 0{,}7 \Rightarrow P(|X| > \beta) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$$\Rightarrow \beta = 1{,}0614$$

8) Soit $X \looparrowright F_{20;30}$. Calculer en utilisant la table la valeur critique β :

▪ $P(X \geq \beta) = 0{,}05 \Rightarrow \beta = 1{,}93$

▪ $P(X \geq \beta) = 0{,}025 \Rightarrow \beta = 2{,}2$