$1^{ère}$ année sciences de la terre et de l'univers **AU 2019-2020**

Matière : Mathématiques 2

TD 4 : Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	a	2a	3a	3a	2a	a

Avec $a \in \mathbb{R}$.

1) A quelle(s) condition(s) sur a ce tableau définit bien une loi de probabilité ?
2) Calculer $P(X \leq 3)$ et $P(X > 4)$
3) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2 :

Dans une population de 3000 individus, 1470 ont un groupe sanguin du type O, 1140 ont le type A, 300 le type B et le reste le type AB. Soit X la V.A. qui associe à chaque individus la valeur 0,1,2 ou 3 si la personne a respectivement le groupe sanguin du type O, A, B, AB.

1) Déterminer la loi de probabilité de la V.A.X.
2) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type.

Exercice 3 :

Une usine fabrique des composants électroniques. La probabilité qu'un composant soit défectueux 0,05. On considère un échantillon de 200 objets. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de composants défectueux.

1) Donner la loi que suit X et sa formule.
2) Quelle est la probabilité qu'aucun objet ne soit défectueux ?
3) Quelle est la probabilité que deux objets soient défectueux ?

Exercice 4 :

Un examen du type Q.C.M. comporte 20 questions, chacune des questions ayant 4 choix dont une est juste. Un étudiant qui ignore complètement son cours, il coche au hasard :

1) Donner la loi que suit X et sa formule.
2) Quelle est la probabilité que cet étudiant rate toutes les questions ?
3) Quelle est la probabilité que cet étudiant donne 3 réponses justes.
4) Quelle est la probabilité que cet étudiant donne au plus 2 réponses justes ?

Exercice 5 :

Dans un hôtel il arrive en moyenne 1,25 personne par 10mn entre 15h et 21h. Soit X le nombre de personnes arrivant dans cet hôtel chaque 10mn dans cet horaire particulier.

1) Quelle est la probabilité pour qu'en 10mn il arrive k personnes ?
2) Quelle est la probabilité pour qu'en 10mn il arrive 2 personnes ?
3) Quelle est la probabilité pour qu'en 10mn il arrive 4 personnes au plus ?

Exercice 6 :

Un réceptionniste reçoit en moyenne deux appels par heure. S'il s'absente une heure, quelle est la probabilité qu'il ne rate aucun appel ? Et quelle est la probabilité qu'il en rate un ?

TD 4 : Variables aléatoires discrètes – Le corrigé

Exercice 1 :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	a	2a	3a	3a	2a	a

Avec $a \in \mathbb{R}$.

1) A quelle(s) condition(s) sur a ce tableau définit bien une loi de probabilité ?

On sait bien que $P(X = x_i) = P_X(x_i)$, et pour que P_X soit une loi de probabilité il faut qu'elle vérifie : $\begin{cases} P_X(x_i) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{6} P_X\,(x_i) = 1 \end{cases}$

Commençons par la deuxième condition :

$$\sum_{i=1}^{6} P_X\,(x_i) = 1 \Rightarrow P_X(x_1) + P_X(x_2) + P_X(x_3) + P_X(x_4) + P_X(x_5) + P_X(x_6) = 1$$

$$\Rightarrow P_X(1) + P_X(2) + P_X(3) + P_X(4) + P_X(5) + P_X(6) = 1$$

$$\Rightarrow a + 2a + 3a + 3a + 2a + a = 1$$

$$\Rightarrow 12a = 1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a = \frac{1}{12} = 0,083}$$

2) Calculer $P(X \leq 3)$ et $P(X > 4)$

▪ $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$\Rightarrow P(X \leq 3) = a + 2a + 3a = 6a = 6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P(X \leq 3) = \frac{1}{2} = 0,5}$

▪ $P(X > 4) = ?$

▫ <u>Méthode 1 :</u> $P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6)$

$\Rightarrow P(X > 4) = 2a + a = 3a = 3 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P(X > 4) = \frac{1}{4} = 0,25}$

▫ <u>Méthode 2 :</u> $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$

$P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + +P(X = 4)$

$\Rightarrow P(X \leq 3) = a + 2a + 3a + 3a = 9a = 9 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow P(X \leq 3) = \frac{3}{4}$

Et comme : $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$

$\Rightarrow P(X > 4) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P(X > 4) = \frac{1}{4} = 0,25}$

3) Calculer l'espérance et la variance de X.

▪ L'espérance mathématique : $\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \, P_X(x_i)}$

$$\Rightarrow E(X) = \left(1 \times P_X(1)\right) + \left(2 \times P_X(2)\right) + \left(3 \times P_X(3)\right) + \left(4 \times P_X(4)\right) + \left(5 \times P_X(5)\right) + \left(6 \times P_X(6)\right)$$

$\Rightarrow E(X) = (1 \times a) + (2 \times 2a) + (3 \times 3a) + (4 \times 3a) + (5 \times 2a) + (6 \times a)$

$\Rightarrow E(X) = a + 4a + 9a + 12a + 10a + 6a = 42a = 42 \times \frac{1}{12} = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \boldsymbol{E(X) = \frac{7}{2} = 3,5}$

▪ La variance : $\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$ avec $\boldsymbol{E(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 \, P_X(x_i)}$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 \, P_X(x_i) = \left(1^2 \times P_X(1)\right) + \left(2^2 \times P_X(2)\right) + \left(3^2 \times P_X(3)\right) + \left(4^2 \times P_X(4)\right) + \left(5^2 \times P_X(5)\right) + \left(6^2 \times P_X(6)\right)$$

$$\Rightarrow E\left(X^2\right) = \left(1^2 \times a\right) + \left(2^2 \times 2a\right) + \left(3^2 \times 3a\right) + \left(4^2 \times 3a\right) + \left(5^2 \times 2a\right) + \left(6^2 \times a\right)$$

$$\Rightarrow E\left(X^2\right) = a + 8a + 27a + +48a + 50a + 36a = 170a = 170 \times \frac{1}{12} = \frac{85}{6}$$

$$\Rightarrow E\left(X^2\right) = \frac{85}{6} = 14{,}17$$

On a : $\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$

$\Rightarrow \; V(X) = 14{,}17 - (3{,}5)^2$

$\Rightarrow \; \boldsymbol{V(X) = 1{,}92}$

<u>Exercice 2 :</u>

Dans une population de 3000 individus, 1470 ont un groupe sanguin du type O, 1140 ont le type A, 300 le type B et le reste le type AB. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque individus la valeur 0,1,2 ou 3 si la personne a respectivement le groupe sanguin du type O, A, B, AB.

Soient les événements suivants :

O : ‘’l'individu a le groupe sanguin O’’

A : ‘’l'individu a le groupe sanguin A’’

B : ‘’l'individu a le groupe sanguin B’’

AB : ‘’l'individu a le groupe sanguin AB’’

Les données de l'exercice sont :

$card$ O = 1470 $card$ A = 1140 $card$ B = 300 $card$ AB = ?

$\Rightarrow$ $card$ AB = $card$ Ω - ($card$ O + $card$ A + $card$ B)

$\Rightarrow$ $card$ AB = 3000 – (1470 + 1140 + 300)

$\Rightarrow$ $card$ AB = 90

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

On voit bien que : X : {O, A, B, AB}→ $\{0, 1, 2, 3\}$ (c'est une variable aléatoire discrète).

Il faut calculer alors : $P_X(0), P_X(1), P_X(2)$ et $P_X(3)$

Par définition on a : $\boldsymbol{P_X(x_i) = P(\{\omega \in \Omega \;/\; \mathrm{X}(\omega) = x_i\})}$

C'est-à-dire :

• $P_X(0) = P(\{\omega \in \Omega \;/\; \mathrm{X}(\omega) = 0\}) = P(O) = \frac{card\ O}{Card\ \Omega} = \frac{1470}{3000}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(0) = 0,49}$

• $P_X(1) = P(\{\omega \in \Omega \;/\; \mathrm{X}(\omega) = 1\}) = P(A) = \frac{card\ A}{Card\ \Omega} = \frac{1140}{3000}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(1) = 0,38}$

• $P_X(2) = P(\{\omega \in \Omega \;/\; \mathrm{X}(\omega) = 2\}) = P(B) = \frac{card\ B}{Card\ \Omega} = \frac{300}{3000}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(2) = 0,1}$

• $P_X(3) = P(\{\omega \in \Omega \;/\; \mathrm{X}(\omega) = 3\}) = P(AB) = \frac{card\ AB}{Card\ \Omega} = \frac{90}{3000}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(3) = 0,03}$

On peut résumer les résultats dans un tableau comme suit :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,49	0,38	0,1	0,03

2) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type.

▪ L'espérance mathématique : $\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i\, P_X(x_i)}$

$\Rightarrow\ E(X) = \big(0 \times P_X(0)\big) + \big(1 \times P_X(1)\big) + \big(2 \times P_X(2)\big) + \big(3 \times P_X(3)\big)$

$\Rightarrow\ E(X) = (0 \times 0{,}49) + (1 \times 0{,}38) + (2 \times 0{,}1) + (3 \times 0{,}03)$

$\Rightarrow\ \boldsymbol{E(X) = 0,67}$

▪ La variance : $\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2}$ avec $\boldsymbol{E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2\, P_X(x_i)}$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2\, P_X(x_i) = \big(0^2 \times P_X(0)\big) + \big(1^2 \times P_X(1)\big) + \big(2^2 \times P_X(2)\big) + \big(3^2 \times P_X(3)\big)$$

$\Rightarrow E\left(X^2\right) = \left(1^2 \times 0{,}49\right) + \left(2^2 \times 0{,}38\right) + \left(3^2 \times 0{,}1\right) + \left(4^2 \times 0{,}03\right)$

$\Rightarrow E\left(X^2\right) = 3{,}39$

On a : $\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2}$

$\Rightarrow\ V(X) = 3{,}39 - (0{,}67)^2$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{V(X) = 2,9411}$

▪ L'écart-type : $\boldsymbol{\sigma_X} = \sqrt{\boldsymbol{V(X)}}$

$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{2{,}9411}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_X = 1,71496}$

<u>Exercice 3 :</u>

Une usine fabrique des composants électroniques. La probabilité qu'un composant soit défectueux 0,05. On considère un échantillon de 200 objets. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de composants défectueux.

1) Donner la loi que suit X et sa formule.

On voit bien que : $X : \Omega \to \{0, 1, 2, 3, \dots , 200\}$ (c'est une variable aléatoire discrète).

Donc X suit la loi **binomiale** de taille $n = 200$ et de paramètre $p = 0{,}05$, on écrit alors

$\boldsymbol{X} \hookrightarrow$ **B**$\boldsymbol{(200; 0, 05)}$

$P_X(k) = c_{200}^{k}(0{,}05)^k(1 - 0{,}05)^{200-k}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots , 200\}$ (k représente le nombre de composants défectueux)

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(k) = c_{200}^{k}(0,05)^k(0,95)^{200-k}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots , 200\}$

2) Quelle est la probabilité qu'aucun objet ne soit défectueux ?

$P_X(0) = c_{200}^{0}(0{,}05)^0(0{,}95)^{200-0} = c_{200}^{0}(0{,}95)^{200}$

Avec $c_{200}^{0} = \frac{200!}{0!(200-0)!} = 1$

$\Rightarrow P_X(0) = (0{,}95)^{200}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(0) = 3,5 \times 10^{-5}}$

3) Quelle est la probabilité que deux objets soient défectueux ?

$P_X(2) = c_{200}^{2}(0{,}05)^2(0{,}95)^{200-2} = c_{200}^{2}(0{,}05)^2(0{,}95)^{198}$

Avec $c_{200}^{2} = \frac{200!}{2!(200-2)!} = \frac{200!}{2!\times 198!} = \frac{198!\times 199\times 200}{2!\times 198!} = \frac{198!\times 199\times 200}{198!\times 2} = 199 \times 100$

$\Rightarrow P_X(2) = 199 \times 100 \times (0{,}05)^2(0{,}95)^{198}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(2) = 1,93 \times 10^{-3}}$

<u>Exercice 4 :</u>

Un examen du type Q.C.M. comporte 20 questions, chacune des questions ayant 4 choix dont une est juste. Un étudiant qui ignore complètement son cours, il coche au hasard :

1) Donner la loi que suit X et sa formule.

On voit bien que : $X : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots , 20\}$ (c'est une variable aléatoire discrète).

Donc X suit la loi **binomiale** de taille $n = 20$ et de paramètre $p = \frac{1}{4} = 0{,}25$, on écrit alors

$\boldsymbol{X} \looparrowright$ $\mathbf{B(20; 0,25)}$

$P_X(k) = c_{20}^k (0{,}25)^k (1 - 0{,}25)^{20-k}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 20\}$ (k représente le nombre de réponses justes)

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(k) = c_{20}^k (0,25)^k (0,75)^{20-k}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 20\}$

2) Quelle est la probabilité que cet étudiant rate toutes les questions ?

$P_X(0) = c_{20}^0 (0{,}25)^0 (0{,}75)^{20-0} = c_{20}^0 (0{,}75)^{20}$

Avec $c_{20}^0 = \frac{20!}{0!(20-0)!} = 1$

$\Rightarrow P_X(0) = (0{,}75)^{20}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(0) = 3,17 \times 10^{-3} \cong 0,003}$

3) Quelle est la probabilité que cet étudiant donne 3 réponses justes.

$P_X(3) = c_{20}^3 (0{,}25)^3 (0{,}75)^{20-3} = c_{20}^3 (0{,}25)^3 (0{,}75)^{17}$

Avec $c_{20}^3 = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20!}{3! \times 17!} = \frac{17! \times 18 \times 19 \times 20}{3! \times 17!} = \frac{18 \times 19 \times 20}{3} = 18 \times 19 \times 10$

$\Rightarrow P_X(3) = 18 \times 19 \times 10 \times (0{,}25)^3 (0{,}75)^{17}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(3) = 0,134}$

4) Quelle est la probabilité que cet étudiant donne au plus 2 réponses justes ?

$P(X \leq 2) = P_X(0) + P_X(1) + P_X(2)$

• $P_X(1) = c_{20}^1 (0{,}25)^1 (0{,}75)^{20-1} = c_{20}^1 (0{,}25)^1 (0{,}75)^{19}$

Avec $c_{20}^1 = \frac{20!}{1!(20-1)!} = \frac{20!}{19!} = \frac{19! \times 20}{19!} = 20$

$\Rightarrow P_X(1) = 20 \times (0{,}25)^1 (0{,}75)^{19}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(1) = 0,021}$

• $P_X(2) = c_{20}^2 (0{,}25)^2 (0{,}75)^{20-2} = c_{20}^2 (0{,}25)^2 (0{,}75)^{18}$

Avec $c_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{18! \times 2} = \frac{18! \times 19 \times 20}{18! \times 2} = 19 \times 10 = 190$

$\Rightarrow P_X(3) = 190 \times (0{,}25)^2 (0{,}75)^{18}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(3) = 1,67 \times 10^{-3} \cong 0,002}$

• Donc : $P(X \leq 2) = 0{,}003 + 0{,}021 + 0{,}002$

$\Rightarrow \boldsymbol{P(X \leq 2) = 0,026}$

<u>Exercice 5 :</u>

Dans un hôtel il arrive en moyenne 1,25 personne par 10mn entre 15h et 21h. Soit X le nombre de personnes arrivant dans cet hôtel chaque 10mn dans cet horaire particulier.

1) Quelle est la probabilité pour qu'en 10mn il arrive k personnes ?

La variable aléatoire X suit la loi Poisson de paramètre $\lambda > 0$, avec : $P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ où

$\lambda = 1{,}25$ (k représente le nombre de personnes arrivant dans cet hôtel chaque 10mn dans cet horaire particulier).

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(k) = \frac{1,25^k}{k!} e^{-1,25}}$

2) Quelle est la probabilité pour qu'en 10mn il arrive 2 personnes ?

$$P_X(2) = \frac{1{,}25^2}{2!} e^{-1{,}25} = 0{,}224$$

$\Rightarrow \boldsymbol{P_X(2) = 0,224}$

3) Quelle est la probabilité pour qu'en 10mn il arrive 4 personnes au plus ?

$P(X \leq 2) = P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) + P_X(3) + P_X(4)$

• $P_X(0) = \frac{1{,}25^0}{0!} e^{-1{,}25} = 0{,}287$

• $P_X(1) = \frac{1{,}25^1}{1!} e^{-1{,}25} = 0{,}358$

• $P_X(3) = \frac{1{,}25^3}{3!} e^{-1{,}25} = 0{,}093$

• $P_X(4) = \frac{1{,}25^4}{4!} e^{-1{,}25} = 0{,}029$

• Donc : $P(X \leq 2) = 0{,}287 + 0{,}358 + 0{,}224 + 0{,}093 + 0{,}029$

$\Rightarrow \boldsymbol{P(X \leq 2) = 0,991}$

<u>Exercice 6 :</u>

Un réceptionniste reçoit en moyenne deux appels par heure. S'il s'absente une heure, quelle est la probabilité qu'il ne rate aucun appel ? Et quelle est la probabilité qu'il en rate un ?

La variable aléatoire X suit la loi Poisson de paramètre $\lambda > 0$, avec : $P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ où $\lambda = 2$ (k représente le nombre d'appels téléphoniques).

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{P_X(k) = \frac{2^k}{k!} e^{-2}}$

♦ La probabilité qu'il ne rate aucun appel :

$$P_X(0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = 0{,}135$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{P_X(0) = 0, 135}$

♦ La probabilité qu'il en rate un :

$$P_X(1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 0{,}270$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{P_X(0) = 0, 270}$