Université de Tlemcen
Département de Mathématiques
Module: Transformations Intégrales

Complément de cours.

Soit la fonction $u_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$

alors $\mathcal{L}(u_a(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u_a(t)\,dt = \dfrac{e^{-sa}}{s}$, $\operatorname{Re} s > 0$

ainsi : $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-as}}{s}\right) = u_a(t)$.

Proposition. Si $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ alors
$$\mathcal{L}(u_a(t) f(t-a)) = e^{-as} F(s)$$

preuve. $\int_0^{+\infty} e^{-st}(u_a(t) f(t-a))\,dt = \int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a)\,dt$

Si on pose $\tau = t-a$, nous aurons $\mathcal{L}(u_a(t) f(t-a)) = e^{-as} F(s)$,
i.e $\mathcal{L}^{-1}(e^{-as} F(s)) = u_a(t) f(t-a)$

Exemple. calculons
$\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-2s}}{s^2+1}\right)$ On a, $\dfrac{e^{-2s}}{s^2+1} = e^{-2s} \mathcal{L}^{-1}(\sin t)$
$= u_2(t) \sin(t-2)$ $(a=2)$.

Remarque: dans un exercice précédent, je n'ai pas justifié la présence de la fonction $u_a(t)$.