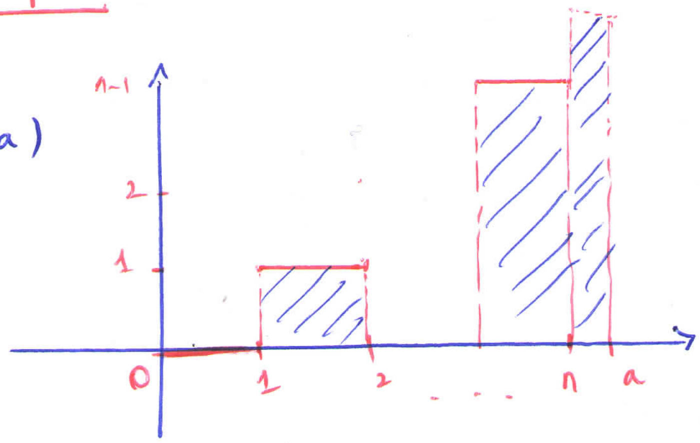
TD n°2 : Intégrales et Calcul des primitives
(deuxième partie)

II) Intégrales définies :

Exercice 07 : $a > 0$, $n = E(a)$



On a, pour $1 \leq i \leq n$

$$E(x) = \begin{cases} i-1 & \text{si } x \in]i-1, i[\\ n & \text{si } x \in]n, a[\end{cases}$$

Ainsi, $$\int_0^a E(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{i-1}^{i} (i-1)\,dx + \int_n^a n\,dx = \sum_{i=1}^{n} (i-1)[x]_{i-1}^{i} + n[x]_n^a$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (i-1) + n(a-n)$$

Sachant que $\sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, alors

$$\int_0^a E(x)\,dx = \frac{n(n-1)}{2} + n(a-n).$$

Exercice 08 : (1) $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

On peut écrire U_n sous la forme

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ qui est intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$
$$= \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0$$
$$= \pi/4.$$

(2) $U_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$

posons $i = k-n$, alors $k = i+n$ et on a :

$$U_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i+n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2n+i} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2+\frac{i}{n}}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \text{ avec } f(x) = \frac{1}{2+x}.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$
$$= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{2+x}$$
$$= \left[\ln(2+x)\right]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Exercice 09 :

(1) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = ?$

posons $t = \sqrt{x-1}$, $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x-1}} = \frac{dx}{2t}$.

Si $x=1$, alors $t=0$

Si $x=2$, alors $t=1$. Aussi $t=\sqrt{x-1} \Rightarrow x = t^2+1$.

Ainsi, $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}(2t\,dt) = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt$

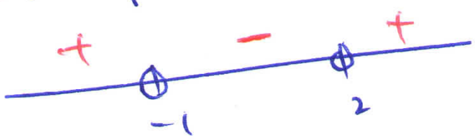
$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$= 2\left[t - \text{arctg}\, t\right]_0^1 = 2\left(1-\text{arctg}\, 1\right)$$

$$= 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 2-\frac{\pi}{2}.$$

(2) $\displaystyle\int_{-3}^{0} |x^2-x-2|\,dx$

Remarquons que le polynôme x^2-x-2 possède deux solutions -1 et 2.



Ainsi

$$\int_{-3}^{0} |x^2-x-2|\,dx = \int_{-3}^{-1} |x^2-x-2|\,dx + \int_{-1}^{0} |x^2-x-2|\,dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} (x^2-x-2)\,dx + \int_{-1}^{0} -(x^2-x-2)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} (x^2-x-2)\,dx + \int_{-1}^{0} (-x^2+x+2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-3}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{0} = \frac{59}{6}$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^2\, \text{arctg}\, x\,dx$

par une intégration par partie,

$u(x) = \text{arctg}\, x \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$v'(x) = x^2 \Rightarrow v(x) = \dfrac{x^3}{3}.$

Ainsi,

$$\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3+x-x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln 2.$$

(4) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^n x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $t = \ln x$, d'où $dt = \frac{dx}{x}$

pour $x = e \Rightarrow t = 1$

pour $x = e^2 \Rightarrow t = \ln e^2 = 2\ln e = 2$.

Ainsi,

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln^n x} = \int_1^2 \frac{dt}{t^n}.$$

Si $n = 1$, alors $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

Si $n > 1$, alors

$$\int_1^2 \frac{dt}{t^n} = \int_1^2 t^{-n}\,dt = \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^2 = \frac{1}{1-n}\left(2^{-n+1} - 1\right)$$

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos x}\,dx$

posons $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx$

pour $x = 0$, $u = 1$

$x = \frac{\pi}{4}$, $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi,

$$\int_0^{\pi/4} \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos x} dx = \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{-2u}{1+u} du = 2 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{u \, du}{1+u}$$

$$= 2 \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du = 2 \Big[u - \ln(1+u)\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1$$

$$= 2\left((1 - \ln 2) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right)$$

$$= 2 - \sqrt{2} - 4 \ln 2 + 2 \ln(\sqrt{2} + 2).$$

⑥ $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 7}$.

Remarquons que $x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 + 3 = 3\left[\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$.

Ainsi, si on pose $t = \frac{x+2}{\sqrt{3}} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{3}}$ et on a

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 7} = \frac{1}{3} \int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} \, dt}{t^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Big[\operatorname{arctg} t\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}$$

$\left(\begin{array}{l} \text{si } x = -1, \text{ alors } t = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{si } x = 1, \text{ alors } t = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \end{array}\right)$

Alors

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 7} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$$

Exercice 10 :

I) Calculons $I = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$.

Si $R = 0$, alors $I = 0$.

Si $R < 0$, alors on pose $R' = -R > 0$ et on a :

$$I = \int_0^{-R'} \sqrt{R'^2 - x^2}\, dx.$$

Ainsi, il suffit de calculer $I = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$ où $R > 0$.

posons $x = R \sin t \Rightarrow dx = R \cos t\, dt$.

Alors pour $x = 0$, on a : $t = 0$ et

pour $x = R$, on a $t = \pi/2$.

Donc,

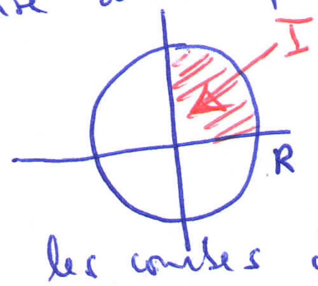
$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t}\right)(R \cos t)\, dt$$

$$= R^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\, \cos t\, dt = R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt$$

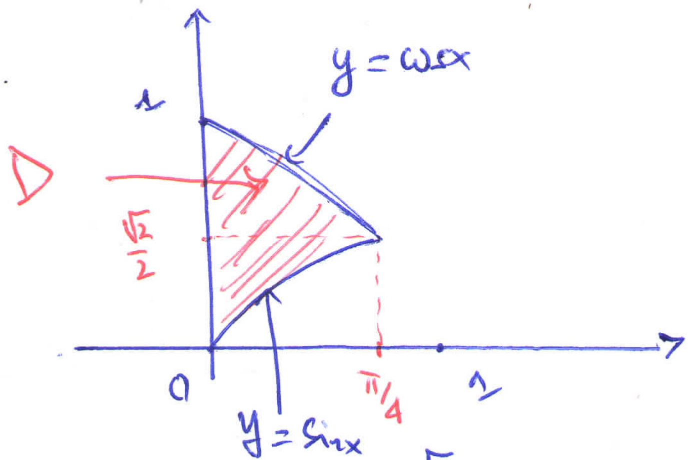
$$= R^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right) dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t))\, dt$$

$$= \frac{R^2}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Remarquons que l'intégrale I est l'aire du quart de disque de rayon R et donc l'aire du disque est $4I = 4 \frac{\pi R^2}{4} = \pi R^2$.



II) Aire de la région délimitée par les courbes d'équations $y = \cos x$ et $y = \sin x$ entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.



$$\text{Aire}(D) = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx = \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\pi/4}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0+1) = \sqrt{2} - 1.$$

Exercice M :

pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

1) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$

$I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = 1$

et $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 2x)\,dx$

$= \dfrac{1}{2}\left[x - \dfrac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi}{4}.$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin^{n+1} x - \sin^n x)\,dx$

$= \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,(\sin x - 1)\,dx.$

Sachant que $\forall x \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin x \leq 1$, alors $\sin^n x\,(\sin x - 1) \leq 0$

Ainsi, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x(\sin x - 1)\,dx \leq 0$

$\Rightarrow (I_n)$ est décroissante.

D'autre part, puisque (I_n) est minorée par 0 et décroissante, alors (I_n) converge.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \sin^{n+1} x \, dx$

On pose

$u(x) = \sin^{n+1} x \Rightarrow u'(x) = (n+1) \cos x \sin^n x$

$v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$.

Ainsi

$$I_{n+2} = \underbrace{\left[-\cos x \sin^{n+1} x\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} (n+1) \cos^2 x \sin^n x \, dx$$

$$= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \sin^n x \, dx$$

$$= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx - (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \, dx$$

$$= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$$

D'où $I_{n+2} + (n+1) I_{n+2} = (n+1) I_n$

$\Rightarrow (n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n \quad \ldots\ldots (*)$

4) Remarquons que pour

$n=0$, on a : $2 I_2 = I_0 \Rightarrow I_2 = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

$n=2$, $4 I_4 = 3 I_2 \Rightarrow I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{4.3.2.1}{4.2.2.4.2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(4)!}{2^4 (2!)^2} = \frac{(2.2)!}{2^4 (2!)^2}$$

$n = 4$, $\quad 6 I_6 = 5 I_4 \Rightarrow I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{(5.3.1)(6.4.2)}{(6.4.2)(6.4.2)} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(6)!}{2^6 (3!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2.3)!}{2^{2.3} (3!)^2}$$

$$\ldots \quad I_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{(p!)^2 2^{2p}} \quad \text{---} \; (Q_p)$$

Supposons que (Q_p) est vraie pour un p fixé et montrons que (Q_{p+1}) est vraie. Alors, d'après la formule $(*)$, on a :

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{(2p+1)}{2p+2} I_{2p} = \frac{(2p+1)}{2p+2} \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{(p!)^2 2^{2p}}$$

$$= \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{(2p+2)(2p+2)(p!)^2 2^{2p}} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2p+2)!}{2^2 (p+1)^2 (p!)^2 2^{2p}} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{((p+1)!)^2 2^{2p+2}} \frac{\pi}{2}.$$

Donc (Q_p) est vérifiée.

De la même manière, on vérifie que $I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$