Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2019-2020
Module : Contrôle optimal

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

T. D. CONTRÔLE OPTIMAL NON LINÉAIRE : CAS D'ETAT FINAL FIXÉ.

Exercice 1 Résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \, t \in [0,T], \\ x(0) = 0, \, x(T) = B, \\ \min\limits_{u \in \mathbb{R}^+} \int\limits_0^T \left(u^2(t) + c.x(t)\right) dt, \end{cases}$$

où T, B et c sont des constantes strictement positives avec $B < \dfrac{c.T^2}{4}$.

Exercice 2 Résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - u(t), \, t \in [0,1], \\ x(0) = 1, \, x(1) = 0, \\ \min\limits_{u \in [1,2]} \int\limits_0^1 u(t) \, dt. \end{cases}$$

Exercice 3 Résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \, t \in [0,2], \\ x(0) = 0, \, x(2) = 1, \\ \min\limits_{u \in [-1,1]} \int\limits_0^2 x^2(t) \, dt. \end{cases}$$

Exercice 4 Résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = u(t), \, t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \, x(T) = 0, \\ x'(0) = 0, \, x'(T) = 0, \\ \min\limits_{u \in [-1,1]} \int\limits_0^T dt, \end{cases}$$

avec $x_0 \in (0,1)$ et T n'est pas fixé.

Exercice 5 : Transfert optimal de fichiers informatiques

Un fichier de x_0 Mo doit être transféré par le réseau. A chaque temps t on peut choisir le taux de transmission $u(t) \in [0,1]$ Mo/s, mais il en coûte $u(t)f(t)$, où $f(.)$ est une fonction connue. De plus au temps final on a un coût supplémentaire γT^2, où $\gamma > 0$. Le système est donc

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -u(t), \, t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \, x(T) = 0, \end{cases}$$

et on veut minimiser le coût

$$C(T,u) = \int_0^T u(t) f(t) dt + \gamma T^2.$$

Quelle est la politique optimale ?

Exercice 6 : Contrôle optimal du niveau d'un réservoir

On veut ajouter de l'eau dans un réservoir, de façon à atteindre le niveau d'eau h_1, en tenant compte du fait qu'il faut compenser une perte d'eau linéaire en temps. La modélisation est

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = u(t) - t, \, t \in [0,T], \\ h(0) = 0, \end{cases}$$

où $u(t)$ est le contrôle. Quelle est la loi optimale permettant d'atteindre l'objectif en minimisant $\int_0^T u^2(t) dt$, le temps final T n'étant pas fixé ?

Exercice 7 : Un voyage en fusée

On considère un véhicule spatial qui doit aller d'un point P1 à un point P2. On suppose qu'il suit une trajectoire rectiligne, et on note $x(t)$ l'abscisse le long de cette trajectoire, où t est le temps. On note $v(t)$ sa vitesse, et m sa masse qu'on suppose constante (dans un premier temps). La trajectoire est contrôlée par une poussée notée $u(t)$, qui sera le contrôle. Le système différentiel s'écrit donc

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t), \, t \in [0,T], \\ m\dot{v}(t) = u(t), \, t \in [0,T], \\ x(0) = v(0) = 0, \end{cases}$$

On souhaite arriver au point P2 au temps T, avec vitesse nulle : $x(T) = L, v(T) = 0$, où $L > 0$ est la distance P1P2.

1) Déterminer les valeurs de $\int_0^T u(t) \, dt$ et $\int_0^T t u(t) \, dt$.

2) **Coût quadratique**. On suppose que la fonctionnelle de coût est donnée par $J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) \, dt$.

Ecrire l'équation adjointe et la résoudre. En déduire la valeur du contrôle optimal et celle du coût correspondant.

3) **Coût homogène**. On suppose que la fonctionnelle de coût est donnée par $J(u) = \int_0^T |u(t)| \, dt$; et que la poussée ne peut pas être plus grande qu'une valeur maximale $u_{\max} > 0$ fixée : pour tout $t \in [0,T]$; $u(t) \in U := [-u_{\max}, u_{\max}]$. On suppose dans cette partie que $T > 2\sqrt{\frac{mL}{u_{\max}}}$.

4) En appliquant le principe du maximum de Pontryaguine, démontrer que le contrôle optimal u ne peut prendre que trois valeurs (que l'on déterminera).

5) Déterminer le nombre de temps de commutation du contrôle optimal.

6) Calculer le contrôle optimal.

7) Que se passe-t-il si $T < 2\sqrt{\frac{mL}{u_{\max}}}$?

Prise en compte de la perte de masse. On suppose toujours que la fonctionnelle de coût est donnée par $J(u) = \int_0^T |u(t)|\,dt$ et que le contrôle vérifie $u(t) \in U := [-u_{\max}, u_{\max}]$. On souhaite prendre en compte le fait que l'utilisation du carburant fait varier la masse de la fusée. Cette masse devient donc une inconnue du système, qui s'écrit maintenant

$$
(2) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t)\,,\ t \in [0,T]\,, \\ m(t)\dot{v}(t) = u(t)\,, t \in [0,T]\,, \\ \dot{m}(t) = -k|u(t)|, t \in [0,T]\,, \\ x(0) = v(0) = 0, \\ m(0) = M. \end{cases}
$$

La constante $k > 0$ est fixée, et on suppose que $2\sqrt{\dfrac{mL}{u_{\max}}} < T < \dfrac{M}{ku_{\max}}$.

8) Démontrer que $m(t) > 0$ pour tout $t \in [0;T]$.

9) Ecrire le hamiltonien du système et le système adjoint. On notera $\lambda = (\lambda_x, \lambda_v, \lambda_m)$ l'état adjoint.

10) Démontrer que, pour tout $t \in [0;T]$, $\lambda_x(t) \neq 0$.

11) Démontrer que l'application $t \mapsto \frac{\lambda_v(t)}{m(t)} + 1 - k\lambda_m(t)$ est strictement monotone sur tout intervalle où $u(t) \geq 0$. Même question pour $t \mapsto \frac{\lambda_v(t)}{m(t)} - 1 + k\lambda_m(t)$ sur un intervalle où $u(t) \leq 0$.

12) Appliquer le principe du maximum de Pontryaguine et en déduire que seules 3 valeurs (que l'on déterminera) sont possibles pour le contrôle optimal u^*.

13) Démontrer que le contrôle optimal change de signe au plus une fois.

14) Déduire des questions précédentes qu'on peut toujours se ramener à un contrôle optimal qui a au plus deux temps de commutation.

15) Déterminer la forme du contrôle optimal (on ne demande pas de calculer les temps de commutation).