Cours : Vecteurs gaussiens

Nous pouvons définir un vecteur gaussien comme suit.

Définition :
Un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, ..., X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de la forme $(a, X), a \in \mathbb{R}^d$ est une v.a.r. gaussienne.
Si X est un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^d$ de moyenne

$$\mu = \mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2), ..., \mathbb{E}(X_d)) \in \mathbb{R}^d$$

et de matrice de covariance

$$K = Cov(X, X) =: (Cov(X_i, X_j)_{1 \leq i,j \leq d}) \,,$$

alors on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, K)$.
Remarques :
1. Si X est un vecteur gaussien, nous déduisons que chacune de ses composantes X_i est une v.a.r. gaussienne.
2. Inversement nous avons le cas particulier suivant :
Soit $X_1, X_2, ..., X_d$ des v.a.r. gaussiennes et indépendantes alors le vecteur aléatoire $X =: (X_1, X_2, ..., X_d)$ est aussi gaussien.

Définition : matrice de covariance de deux vecteurs aléatoires
Soit X, Y deux vecteurs aléatoires à carré intégrable et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement la matrice de covariance $Cov(X, Y) = (c_{k,l}, k = 1, ..., d, l = 1, ..., n)$ est définie par :

$$c_{k,l} = \mathbb{E}(X_k Y_l) - \mathbb{E}X_k \mathbb{E}Y_l, \text{ pour } k = 1, ..., d, l = 1, ..., n.$$

Théorème :
un vecteur aléatoire X sur $\mathbb{R}^d$ est gaussien si et seulement si :

$$\exists (\mu, K) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{M}_{d \times d}$$

tels que K soit symétrique et positive et X ait pour fonction caractéristique

$$\phi_X(u) = e^{i(\mu,u) - \dfrac{(u, Ku)}{2}}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^d$$

De plus

$$\mu = \mathbb{E}(X) \;\; K = Cov(X, X) = \mathbb{E}[XX^T] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^T]$$

et $\forall a \in \mathbb{R}^d$ la v.a.r. $Y = (a, X)$ (le produit scalaire de a et X) est gaussienne de paramètres $\mathbb{E}(Y) = (a, \mu), Var(Y) = (a, Ka)$.

Notation :
Si X est vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^d$ de moyenne $\mu \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de covariance K, alors on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}_d(\mu, K)$.

Preuve :
Pour $i \in \{1, 2, ..., d\}$ soit X_i une v.a.r. gaussienne alors X_i est à carré intégrable et par suite le vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, ..., X_d)$ est aussi à carré intégrable. D'autre part notons que l'on a

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{i(u,X)}] = \mathbb{E}[e^{i(u,X).1}] = \phi_{X,u}(1).$$

La v.a.r. (u,X) est gaussienne car c'est une combinaison linéaire des X_i qui sont des v.a.r. gaussiennes.
Calculons les paramètres de la loi de (u,X) :

$$\mathbb{E}[(u,X)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{d} u_k X_k\right] = \sum_{k=1}^{d} u_k \mathbb{E}[X_k] = (u,\mu)$$

$$Var[(u,X)] = Var\left[\sum_{k=1}^{d} u_k X_k\right] = \sum_{k,l=1}^{d} u_k u_l \mathbb{E}[X_k X_l] - \mathbb{E}[X_k]\mathbb{E}[X_l] = (u, Cov(X,X)u)\,.$$

Alors si on note $K = Cov(X,X)$ on obtient

$$\phi_{X,u}(1) = e^{i(\mu,u) - \dfrac{(u,Ku)}{2}}.$$

La réciproque est établie dans l'exercice 1 (TD).

Proposition** :
Étant donné X un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^d, X \hookrightarrow \mathcal{N}_d(m,K)$, pour tout vecteur $b \in \mathbb{R}^r$ et toute matrice $M \in \mathcal{M}_{r\times d}$, le vecteur aléatoire $Y = b + MX$ est gaussien sur$\mathbb{R}^r$. De plus $\mathbb{E}Y = b + Mm$ et la matrice de covariance de Y est $K_Y = MKM^T$.

Preuve :
Pour tout vecteur $a \in \mathbb{R}^r, a^T Y = a^T b + (a^T M)X$ est une v.a.r. gaussienne puisque c'est une transformation linéaire du vecteur gaussien X. Ainsi toute combinaison linéaire de la forme $(a,Y), a \in \mathbb{R}^r$ est une v.a.r. gaussienne alors Y est un vecteur gaussien.
Notons K_Y la matrice de covariance de Y.Nous avons alors

$$\mathbb{E}(Y) = b + M\mathbb{E}(X) \ \text{ et } \ K_Y = K_{(MX+b)} = K_{(MX)} = MK_XM^T.$$

Théorème : densité de probabilité d'un vecteur gaussien dans le cas non dégénéré.
Étant donné X un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^d, X \hookrightarrow \mathcal{N}_d(m,K)$, si $det(K) \neq 0$ alors X admet la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} det(K)^{-\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T K^{-1}(x-m)\right)$$

Preuve : La matrice de covariance K est symétrique positive et comme $detK \neq 0$ alors il existe une matrice A telle que

$$K = A^T A \quad \text{et} \quad det(A) = \left((detK)^{\frac{1}{2}}\right).$$

De plus A est inversible. Considérons alors un vecteur gaussien $Y \hookrightarrow \mathcal{N}_d(0, Id)$ alors la densité de Y s'écrit(Exercice 2 TD)

$$f_Y(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right).$$

Comme $X = m + AY$ en utilisant la proposition** on déduit que $X \hookrightarrow \mathcal{N}$.
Calcul de la densité de X : pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(m+AY)) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(m+Ay)\exp\left(-\frac{|y|^2}{2}\right) dy$$

En utilisant la transformation $\varphi : y = \varphi(x) = A^{-1}(x-m)$ de matrice jacobienne $\dfrac{D(y)}{D(x)} = \det(A^{-1})$

$$\mathbb{E}(f(X)) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \det(A^{-1}) \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T (A^{-1})^T A^{-1}(x-m)\right) dx.$$

Or $K^{-1} = (AA^T)^{-1} = (A^{-1})^T A^{-1}$ alors

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} det(K)^{-\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T K^{-1}(x-m)\right).$$

Théorème** : vecteurs gaussiens et indépendance
Soit(X,Y) un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^n$ alors les vecteurs aléatoires X et Y de support $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement$(p+q=n)$ sont indépendants si et seulement si $Cov(X,Y)=0$.

Preuve :
Si $Cov(X,Y)=0$ en posant

$$\mathbb{E}(X) = \mu_X,\ \mathbb{E}(Y) = \mu_Y \quad \text{et} \quad K_X = Cov(X,X),\ K_Y = Cov(Y,Y),\ K_{(X,Y)} = Cov(X,Y)$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}^p, v \in \mathbb{R}^q$le calcul de la fonction caractéristique du vecteur (X,Y) donne

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = \mathbb{E}\left[e^{i((u,v),(X,Y))}\right] = \exp\left[i(u,\mu_X) + i(v,\mu_Y) - \frac{1}{2}\left((u,K_X u) + (v,K_Y v) + 2(u,K_{(X,Y)v})\right)\right].$$

Comme $K_{(X,Y)} = 0$ on a

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = \exp\left[i(u,\mu_X) + i(v,\mu_Y) - \frac{1}{2}\Big((u,K_X u) + (v,K_Y v)\Big)\right] = \phi_X(u)\phi_Y(v).$$

Nous déduisons alors l'indépendance des variables X et Y.
La réciproque est toujours vraie.