Suite2 TD Introduction aux processus stochastiques

Exercice 1 :(complément de cours)
1. Soit $X=(X_1,X_2,...,X_d)$ un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^d$ de loi $\mathcal{N}_d(m,K)$. Calculer la fonction caractéristique de X.
2. Montrer en utilisant la fonction caractéristique que si $X_1,X_2,...,X_d$ sont d v.a.r. gaussiennes et indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m_k,\sigma_k^2)$ alors le vecteur $X=(X_1,X_2,...,X_d)$ est gaussien sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 2 :
Soit $X_1,X_2,...,X_n$ des v.a.r.i.i.d.(variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées) de loi normale centrée et réduite. Calculer la densité de probabilité du vecteur aléatoire $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 :
Soient X,Z,Y trois v.a.r. telles que

$$X\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1)\qquad\mathbb{P}(Z=1)=\mathbb{P}(Z=-1)=\frac{1}{2}\qquad Y=:ZX$$

1. Montrer que Y est une v.a.r. gaussienne.
2. Calculer $Cov(X,Y)$.
3. X et Y sont elles indépendantes ? Que peut-on conclure par rapport au théorème** du cours.

Exercice 4 :
Étant donné un vecteur gaussien centré $X=(X_1,X_2,...,X_n)$. Montrer que X_i et X_j sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{E}[X_iX_j]=0$

Exercice 5 :
Soient X, Y et ε trois variables aléatoires indépendantes avec X et Y gaussiennes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\mathbb{P}(\varepsilon=-1)=\mathbb{P}(\varepsilon=1)=\dfrac{1}{2}$.
Lesquels des vecteurs suivants sont gaussiens ?

1.(X,ε)
2.(X,Y)
3.$(X,\varepsilon X)$
4.$(X,\varepsilon Y)$
5.$(\varepsilon|X|,\varepsilon||Y|)$
6.$(X,X+Y)$
7.$(X,X+\varepsilon Y)$
8.$(X,\varepsilon X+Y)$.

Solutions

Exercice 1 :
2. $X_1,X_2,...,X_d$ sont d v.a.r. gaussiennes et indépendantes. On suppose pour fixer les idées que pour $k\in\{1,...d\}X_k\hookrightarrow\mathcal{N}(m_k,\sigma_k^2)$.
On considère le vecteur aléatoire $X=(X_1,X_2,...,X_d)$ et

$$\forall\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_d)\in\mathbb{R}^d\qquad(\lambda,X)=\sum_{k=1}^{d}\lambda_kX_k.$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}$ on calcule la fonction caractéristique de la v.a.r. (λ, X) en tenant compte de l'indépendance des X_k

$$\phi_{(\lambda,X)}(u) = \mathbb{E}\left(e^{iu\sum_{k=1}^{d}\lambda_k X_k}\right) = \prod_{k=1}^{d}\mathbb{E}\left(e^{iu\lambda_k X_k}\right) = \prod_{k=1}^{d}\left(e^{iu\lambda_k m_k - \frac{\lambda_k^2\sigma_k^2 u}{2}}\right) = e^{iu(\lambda,m) - \frac{(\lambda, D\lambda)u^2}{2}}$$

avec $m = (m_1, m_2, ...m_d)$ et D la matrice diagonale de diagonale $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_d^2)$. Ainsi on reconnait la fonction caractéristique d'une v.a.r. de loi $\mathcal{N}\left((\lambda, m), (\lambda, D\lambda)\right)$. On en déduit que X est un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 2 :
Par indépendance des v.a.r. $X_1, X_2, ..., X_n, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x_i^2}{2}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}e^{-\frac{x_i^2}{2}} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Exercice 3 :
1. Pour toute fonction $h \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{E}[h(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) f_Y(y)dy = \mathbb{E}[h(ZX)]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(ZX)] &= \sum_{z\in\{-1,1\}} \mathbb{P}_Z(z)\int_{-\infty}^{+\infty} h(zx)(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{+\infty}^{-\infty}(-y)(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{(-y)^2}{2}}(-dy) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} y(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} y(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} y(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy. \end{aligned}$$

Alors $\quad f_Y(y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}$.

2.

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(ZX^2) = \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(X^2) = 0,$$

en effet X et Z sont indépendantes et $\mathbb{E}[Z] = (-1)\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.
3. X et Y ne sont pas indépendantes car $|X| = |Y|$.
Nous avons deux v.a.r. gaussiennes telles que $Cov(X,Y) = 0$ alors que X et Y ne sont pas indépendantes. En fait le vecteur (X,Y) n'est pas gaussien. Cet exemple illustre la nécessité de l'hypothèse que le vecteur doit être gaussien dans le contexte du théorème**.

Exercice 4 :
Le sens direct est immédiat. Pour le sens inverse supposons

$$Cov(X_i, X_j) = \mathbb{E}[X_iX_j] = 0 \quad \text{puisque} \quad \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_j] = 0.$$

Rappel :
un vecteur aléatoire X à valeur dans $\mathbb{R}^d$ est gaussien si pour tout $u=(u_1,u_2,...,u_d)\in\mathbb{R}^d$, la v.a.r. $u.X=(u,X)$ est gaussienne ((u,X) étant le produit scalaire de $\mathbb{R}^d$). On pose $\mu=\mathbb{E}[X]$ et $K=(Cov(X_i,X_j))_{1\leq i,j\leq d}$. La fonction caractéristique de $u.X$ est alors

$$\phi_{u.X}=\mathbb{E}\left[e^{iu.\mu-\dfrac{1}{2}u^TKu}\right]$$

avec $u.\mu=(u,\mu)\ \ u^TKu=(u,Ku)$

Nous appliquons cela au vecteur gaussien $Y=(X_i,X_j)$

$$\forall u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2\quad \phi_{u.Y}=\mathbb{E}\left[e^{iu.\mu-\dfrac{1}{2}u^TKu}\right]$$

avec $\mu=(\mathbb{E}[X_i],\mathbb{E}[X_j])=(0,0)$, $Cov(X_i,X_j)=0, Var(X_i)=\mathbb{E}[X_i^2]$, $Var(X_j)=\mathbb{E}[X_j^2]$ et donc

$$K=\begin{pmatrix}\mathbb{E}[X_i^2] & 0\\ 0 & \mathbb{E}[X_j^2]\end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\phi_{u.Y}=\exp\left(-\frac{1}{2}\Big(u_1^2\mathbb{E}[X_i^2]+u_2^2\mathbb{E}[X_j^2]\Big)\right).=\phi_{u_1.X_i}\phi_{u_2.X_j}.$$

X_i et X_j étant deux v.a.r. gaussiennes centrées, par la caractérisation de l'indépendance au moyen de la fonction caractéristique nous déduisons que X_i et X_j sont indépendantes.