Faculté des Sciences
Dept. Maths
Pr. M. Benalili
m_benalili@yahoo.fr

Cours de géométrie différentielle

Chapitre 3: Calcul différentiel sur les sous-variétés de R^n

Cartes locales

Definition 1 *Soit M une sous-variété de classe C^p et de dimension k de R^n et $a \in M$. Une carte locale de M au voisinage de a (resp. centrée en a) est un couple (U, φ) où U est un ouvert de M contenant a et φ: $U \to \Omega \subset R^k$ un C^p-difféomorphisme de U sur un ouvert Ω de R^k (resp. et tel que $\varphi(a) = 0$).*

Proposition 2 *Soit M_1 une sous-variété de classe C^p et de dimension n_1 de R^n et M_2 une sous-variété de classe C^p et de dimension n^2 de R^m. Alors f: $M_1 \to M_2$ est différentiable (resp. C^p) en a si et seulement si il existe une carte locale (U, φ) de M_1 centrée en a telle que $fo\varphi^{-1} : \Omega = \varphi(U) \to R^m$ soit différentiable (resp. C^p) en 0. Dans ce cas, on a $fo\psi^{-1} : \Omega' = \psi(U') \to R^m$ différentiable (resp. C^p) en 0 pour toute carte locale (U', ψ) de M_1 centrée en a.*

Preuve:

Si f est différentiable en a alors $fo\varphi^{-1}$ est différentiable en 0 pour toute carte locale (U, φ) centrée en a. Réciproquement si $fo\varphi^{-1}$ est différentiable en 0 alors$(fo\varphi^{-1})\, o\varphi = f$ est différentiable en a.

Atlas

Définition. Soit M une sous-variété de R^n de dimension k et classe C^p. Un Atlas de M est une famille $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ de cartes locales de M telles que $\cup_{i \in I} U_i = M$.

Exemple

Considérons le cercle unité S^1 centré à l'origine O et $A = (1, 0), B = (-1, 0)$ les applications $\varphi_A : U_A = S^1 - \{B\} \to (-1, 1)$ et $\varphi_B : U_B = S^1 - \{A\} \to (-1, 1)$ définies respctivement par $\varphi_A(z) = t = Arg(z)$ et $\varphi_B(z) = t = Arg(z)$ (z est considéré comme un nombre complexe de module 1). $\{(U_A, \varphi_A), (U_B, \varphi_B)\}$ et un atlas de S^1. En effet $U_A \cup U_B = S^1$. De plus φ_A et φ_B sont inversibles d'inverses respectivement $\varphi_A^{-1}(t) = e^{i\pi t}$ et $\varphi_B^{-1}(t) = e^{i\pi(1-t)}$ qui sont des difféomorphismes de classe C^∞.

Théorème. Soit M une sous-variété de dimension k et $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas de M. Alors une application $f : M \to N$, où N est une sous-variété de R^m, est de classe C^p sur M si et seulement si $f_i = fo\varphi_i^{-1} : U_i \subset R^k \to R^m$ est de classe C^p au sens usuel pour tout $i \in I$.

Exemple. Sur S^2, on considère l'atlas suivant $\{\varphi_N, \varphi_S\}$ donné par $\varphi_N^{-1} : C \to S^2 \subset R^3 \simeq C \times R$ définie par

$$\varphi_N^{-1}(z) = \left(\frac{2z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)$$

et $\varphi_S^{-1} : C \to S^2 \subset R^3 \simeq C \times R$ définie par

$$\varphi_S^{-1}(z) = \left(\frac{2\overline{z}}{1+|z|^2}, \frac{1-|z|^2}{|z|^2+1} \right).$$

Ce sont bien des cartes locales puisque $\varphi_N : S^2 - \{N\} \to C$; $\varphi_N(z,s) = \frac{z}{1-s}$ est l'inversee de φ_N^{-1} et $\varphi_S : S^2 - \{S\} \to C$; $\varphi_S(z,s) = \frac{z}{1+s}$ est l'inverse de φ_S^{-1}. A tout polynôme $P = \sum_{i=1}^n a_i X^i \in C([X])$, on associe une application $f_P : S^2 \to S^2$ de classe C^∞ définie par

$$\begin{cases} f_P(m) = \varphi_N^{-1} o P o \varphi_N(m) \text{ pour } m \in S^2 - \{N\} \\ f_P(N) = N \end{cases}$$

Nous avons

$$f_p o \varphi_N^{-1}(z) = \varphi_N^{-1} o P(z) = \left(\frac{2P(z)}{1+|P(z)|^2}, \frac{|P(z)|^2-1}{|P(z)|^2+1} \right)$$

et

$$\begin{aligned} f_p o \varphi_S^{-1}(z) &= \varphi_N^{-1} o P o \varphi_N o \varphi_S^{-1}(z) \\ &= \varphi_N^{-1} o P \left(\frac{1}{z} \right) \\ &= (\frac{z^n Q(z)}{|z|^{2n} + |Q(z)|^2}, \frac{|Q(z)|^2 - |z|^{2n}}{|z|^{2n} + |Q(z)|^2}) \end{aligned}$$

pour $z \in C$ où

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^i$$

pour $z \in C - \{0\}$ et

$$\begin{aligned} f_P o \varphi_N^{-1}(0) &= f_p(N) \\ &= N = (0,1) \in C \times R. \end{aligned}$$

Ces deux dernières applications sont de classe C^∞ et par suite f_p est de classe C^∞.

Théorèmes d'inversion

Théorème. *Soit M_1 une sous-variété de R^n*
et M_2 une sous-variété de R^m.

1. Si $f : M_1 \to M_2$ est C^p et $d_a f : T_a M_1 \to T_{f(a)} M_2$ est un isomorphisme
alors f est un C^p-difféomorphisme local en a.

2. Si $f : M_1 \to M_2$ est C^p sur M_1 et si $d_a f$ est un isomorphisme pour tout
$a \in M_1$, alors f est un C^p-difféomorphisme local de M_1 sur son image.
De plus, pour tout ouvert U de M_1, $f(U)$ est un ouvert de M_2.

3. Si $f : M_1 \to M_2$ est C^p sur M_1, daf est inversible pour tout $a \in M_1$ et f est injective sur M_1, alors f est un C^p-di éomorphisme de M_1 sur $f(M_1)$.

Preuve.

1. Soit (U_1, φ_1) une carte locale de M_1 centrée en a et $(U_2; \varphi_2)$ une carte locale de M_2 centrée en $f(a)$. Par continuité de f, quitte à réduire U_1, on peut supposer de $f(U_1) \subset U_2$. Alors $g = \varphi_2 o\ f\ o \varphi_1^{-1}$ est une application de classe C^p de U$_1$ dans U$_2$ et $d_0 g =$d$_{f(a)}\varphi_2$. $d_a f$ .d_0 φ_1 est un isomorphismde R^k comme composée d'isomorphisme linéaires. D'après le théorème d'inversion locale usuel, il existe des voisinages ouvert Ω et Ω' de 0 dans $\Omega_1 = \varphi_1(U_1) \subset R^k$ et $\Omega_2 = \varphi_2(U_2) \subset R^k$ tels que g soit un difféomorphisme de Ω sur Ω'. Alors $U_1' = \varphi_1^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de M_1, $U_2' = \varphi_2^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de M_2 et $f = \varphi_2^{-1} o g o \varphi_1$ est un C^p-difféomorphisme comme composée de C^p-difféomorphisme.

Les preuves du deuxième et troisième point se font de la même manière.

Exemple. On considère l'application de S^1 dans lui même définie par

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

f est de classe C^∞ et on

$$df(x,y)(h,k) = (2xh - 2yk, 2yh - 2xk)$$

comme pour tout (x,y)$\in S^1$ on a

$$det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 4,$$

alors $L : R^2 \to R^2$ définie par

$$L(h,k) = (2xh - 2yk, 2yh - 2xk)$$

est un isomorphisme de R^2 et donc $df(x,y) = L_{/T_{(x,y)}S^1}$ est injective de $T_{(x,y)}S^2 \to T_{f(x,y)}S^2$ et puisque ces deux espaces sont de dimension 1, $df(x,y)$ est un isomorphisme et on déduit d'après le théorème de l'inversion que f est un difféomrphisme de classe C^∞ de S^1 sur $f(S^1)$ et $f(S_1)$ est un ouvert de S^1. $f(S^1)$ est compact puisque S^1est compact et f est continue. Puisque S^1 est connexe il en résulte que $f(S^1)$ est connexe et par suite $f(S^1) = S^1$ et donc f est un difféomorphisme local de classe C^∞ de S^1. f n'est pas un difféomorphisme global puisque $f(-x,-y) = f(x,y)$ et f n'est pas injective.