Fonction de Green - Équations de Laplace et de Poisson

1. Introduction et rappels

Nous avons établi la solution fondamentale ϕ de l'équation de *Laplace* dans $\mathbb{R}^n$

$$\Delta u = 0.$$

La solution ϕ est donnée par, rappelons-le,

$$\phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln|x| & \text{si } n = 2 \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n |x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3, \end{cases}$$

où ω_n est la mesure (surface) de la sphère unité $S^{n-1} = \partial B(0,1)$ de $\mathbb{R}^n$

$$\omega_n = n\alpha_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

et α_n est la mesure (volume) de la boule unité $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^n$.

La fonction ϕ est évidemment définie et harmonique dans $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Concernant l'équation de *Poisson*

$$-\Delta u = f \qquad (*)$$

nous avons le résultat suivant.

Théorème: *Soit $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, alors la fonction u définie par*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) f(y) dy$$

est de classe C^2 dans $\mathbb{R}^n$ et résout l'équation $(*)$ dans $\mathbb{R}^n$.

□

Rappelons aussi les formules de la moyenne.

Théorème: *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in C^2(\Omega)$. Si u est harmonique dans Ω alors pour toute boule $B(x,\ r), r > 0$ telle que $\overline{B(x,\ r)} \subset \Omega$, on a*

$$u(x) = \frac{1}{\alpha_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y) dy = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y.$$

□

a_bensedik@mail.univ-tlemcen.dz

Terminons ces rappels par les formules de Green.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1, alors en tout point $x \in \partial\Omega$ est définie la normale unitaire η dirigée vers l'extérieur de Ω,

$$\eta(x) = \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $u \in C^1(\overline{\Omega})$, la dérivée de u par rapport à la normale extérieure η est définie par

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \eta . \nabla u = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\hat{e}u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i u_{x_i}$$

et nous avons

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} \eta_i u \, dS. \qquad (G)$$

Si $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ alors par application de cette relation à la fonction uv nous obtenons la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} \eta_i uv \, dS - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

De la formule (G), dite formule de Gauss-Green, nous déduisons le théorème de la divergence.

Théorème: *Soit* $w = (w_1, w_2, \dots w_n)$ *un champ de vecteurs tel que* $w_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i = 1, \dots, n$. *Alors*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} w \, dx = \int_{\partial\Omega} w . \eta \, dS.$$

□

Nous arrivons maintenant aux formules de Green.

Théorème (formules de Green): Soit $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Alors

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \eta . \nabla u \, dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \, dS \qquad (1)$$

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} \, dS - \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \, dx \qquad (2)$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) dS \qquad (3)$$

□

2. Représentation intégrale des fonctions régulières

Nous avons vu que si f est une fonction au moins continue à support compact, alors la fonction u définie par

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) f(y) dy$$

est une solution de l'équation $-\Delta u = f$.

En portant dans l'expression de u nous obtenons

$$u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) \Delta u(y)\, dy,$$

pourvu que u soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ et à support compact.

Nous allons généraliser cette formule aux domaines bornés de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1: *Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ et $u \in C^2(\overline{\Omega})$.*
Alors pour tout $x \in \Omega$,

$$u(x) = -\int_{\Omega} \phi(x-y) \Delta u(y)\ y + \int_{\partial\Omega} \left(\phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \eta} - u(y) \frac{\partial \phi(x-y)}{\partial \eta(y)} \right) dS_y. \qquad (RI)$$

□

Preuve: Soit $x \in \Omega$, la fonction $y \longmapsto \phi(x-y)$ explose en $y = x$, fixons alors un réel ε tel que $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, et appliquons la troisième formule de Green dans l'ouvert $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{B}(x, \varepsilon)$, nous obtenons, puisque $\phi(x-y)$ est harmonique dans Ω_ε

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \phi(x-y) \Delta u(y)\, dy = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(\phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \eta} - u(y) \frac{\partial \phi(x-y)}{\partial \eta(y)} \right) dS_y.$$

Comme $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B(x, \varepsilon)$, alors

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \phi(x-y) \Delta u(y)\, dy = \int_{\partial\Omega} \left(\phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \eta} - u(y) \frac{\partial \phi(x-y)}{\partial \eta(y)} \right) dS_y$$

$$+ \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(\phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \eta} - u(y) \frac{\partial \phi(x-y)}{\partial \eta(y)} \right) dS_y \qquad (4)$$

Quand ε tend vers 0,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \phi(x-y)\Delta u(y)\, dy \longrightarrow \int_{\Omega} \phi(x-y)\Delta u(y)\, dy.$$

Traitons le deuxième terme du deuxième membre de (4).

Nous avons en notant $\partial B(x,\varepsilon) = [|y-x| = \varepsilon]$

$$\int_{[|y-x|=\varepsilon]} \phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \eta}\, dS_y = \phi(\varepsilon) \int_{[|y-x|=\varepsilon]} \frac{\partial u(y)}{\partial \eta}\, dS_y$$

car ϕ est radiale donc $\phi(x-y) = \phi(|x-y|) = \phi(\varepsilon)$.

D'autre part d'après la première formule de Green

$$\left|\int_{[|y-x|=\varepsilon]} \frac{\partial u(y)}{\partial \eta}\, dS_y\right| = \left|\int_{[|y-x|<\varepsilon]} \Delta u\, dy\right| \leq \sup_{B(x,\varepsilon)} |\Delta u| \int_{B(x,\varepsilon)} dy \leq \alpha_n \varepsilon^n \max_{\overline{\Omega}} |\Delta u|.$$

Ainsi

$$\left|\int_{[|y-x|=\varepsilon]} \phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \eta}\, dS_y\right| \leq \alpha_n |\phi(\varepsilon)|\, \varepsilon^n \max_{\overline{\Omega}} |\Delta u| \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

car $|\phi(\varepsilon)| \leq C_n(\varepsilon^{2-n} + \ln \varepsilon)$ et $\max_{\overline{\Omega}} |\Delta u|$ existe et est fini puisque $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Passons au terme

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) \frac{\partial \phi(x-y)}{\partial \eta(y)}\, dS_y = \int_{[|y-x|=\varepsilon]} u(y) \frac{\partial \phi(x-y)}{\partial \eta(y)} dS_y.$$

Nous avons pour $y \in \partial B(x,\varepsilon)$

$$\frac{\partial \phi(x-y)}{\partial \eta(y)} = -\frac{\partial \phi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} \quad , n \geq 2.$$

D'où

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) \frac{\partial \phi(x-y)}{\partial \eta(y)} dS_y = \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} \int_{[|y-x|=\varepsilon]} u(y)\, dS_y = M(u;x,\varepsilon)$$

où $M(u;x,\varepsilon)$ est la moyenne de la fonction u sur la sphère de centre x et de rayon ε

$$M(u;x,\varepsilon) = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{[|y-x|=\varepsilon]} u(y)\, dS_y$$

comme $M(u; x, \varepsilon) \longrightarrow u(x)$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, nous déduisons en passant à la limite dans (4) que

$$\int_{\Omega} \phi(x-y)\Delta u(y)\, dy = \int_{\partial\Omega} \left(\phi(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial \eta} - u(y)\frac{\partial \phi(x-y)}{\partial \eta(y)} \right) dS_y - u(x)$$

et finalement

$$u(x) = -\int_{\Omega} \phi(x-y)\Delta u(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} \left(\phi(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial \eta} - u(y)\frac{\partial \phi(x-y)}{\partial \eta(y)} \right) dS_y.$$

C'est la formule (RI). ■

Remarque: La formule précédente reste valable pour $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Exercice 1:

1. Démontrer que pour $y \in \partial B(x, \varepsilon) \subset \bar{B}(x, \varepsilon) \subset \Omega$ on a

$$\frac{\partial \phi(x-y)}{\partial \eta(y)} = \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}, \qquad n \geq 2.$$

$\eta(y)$ désigne la normale unitaire extérieure en $y \in \partial\Omega_\varepsilon$ avec $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \bar{B}(x, \varepsilon)$.

2. Soit u une fonction intégrable sur Ω. Montrer que pour toute boule $B(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ telle que $\bar{B}(x, \varepsilon) \subset \Omega$ on a

$$\frac{1}{\alpha_n \varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} u(y)\, dy \longrightarrow u(x) \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0$$

$$\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\, dS_y \longrightarrow u(x) \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Exercice 2:

En adaptant la preuve du théorème, démontrer la formule (RI) pour $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Application: Voyons maintenant un des intérêts de la formule (RI).

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Considérons le problème suivant.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ \quad u = g \text{ sur } \partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = h \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où les fonctions f, g et h sont continues, chacune sur son domaine.

En utilisant la formule (RI) nous obtenons directement la solution u, à savoir,

$$u(x) = \int_{\Omega} \phi(x-y) f(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} \left(\phi(x-y)h(y) - g(y)\frac{\partial \phi(x-y)}{\partial \eta(y)} \right) dS_y, \ \forall x \in \Omega.$$

a_bensedik@mail.univ-tlemcen.dz

Une conséquence immédiate du Théorème 1, est le corollaire suivant.

Corollaire: *Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$ et $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique. Alors pour tout $x \in \Omega$,*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \eta} - u(y) \frac{\partial \phi(x-y)}{\partial \eta(y)} \right) dS_y.$$

3. Fonction de Green et équation de Poisson

Soit Ω un domaine borné régulier. Considérons l'équation de Poisson avec condition de Dirichlet.

$$(\mathcal{P}) \qquad -\Delta u = f \text{ dans } \Omega; \quad u = g \text{ sur } \partial\Omega$$

où f et g sont des fonctions continues.

En essayant d'appliquer la formule (RI), on se heurte à un petit problème; la valeur de $\partial u/\partial \eta$ sur $\partial\Omega$ est inconnue.

Nous allons donc modifier la formule (RI) de sorte qu'elle ne contienne plus le terme $\partial u/\partial \eta$.

Pour se faire, soit H une fonction harmonique dans Ω. En utilisant la troisième formule de Green nous obtenons, du fait que $\Delta H = 0$ dans Ω,

$$\int_{\Omega} H \Delta u \, dy = \int_{\partial\Omega} \left(H \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) dS$$

d'où

$$0 = \int_{\Omega} H(y) \Delta u(y) \, dy - \int_{\partial\Omega} \left(H(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \eta} - u(y) \frac{\partial H(y)}{\partial \eta} \right) dS. \qquad (5)$$

En ajoutant, membre à membre, (RI) et (5) nous avons

$$u(x) = -\int_{\Omega} \big(\phi(x-y) - H(y)\big) \Delta u(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} \left(\big(\phi(x-y) - H(y)\big) \frac{\partial u(y)}{\partial \eta} - u(y) \frac{\partial\big(\phi(x-y) - H(y)\big)}{\partial \eta(y)} \right) dS_y.$$

Choisissons maintenant parmi les fonctions harmoniques H dans Ω celle qui vérifie la condition, $\qquad H(y) = \phi(x-y), \forall y \in \partial\Omega.$

Pour cette fonction H, $x \in \Omega$ représente un paramètre, notons-la par H_x.

En remplaçant dans l'expression de $u(x)$, nous obtenons que pour tout $x \in \Omega$

$$u(x) = -\int_{\Omega} \left(\phi(x-y) - H_x(y)\right)\Delta u(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial\left(\phi(x-y) - H_x(y)\right)}{\partial\eta(y)} dS_y.$$

Définition: *On appelle fonction de Green pour le domaine Ω, la fonction* G *définie par*

$$G(x,y) = \phi(x-y) - H_x(y); \quad x, y \in \Omega, x \neq y.$$

Ceci étant, la fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ s'exprime en terme de la fonction de Green

$$u(x) = -\int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial\eta(y)} dS_y.$$

Remarquons que le terme $\partial u/\partial\eta$ n'apparait plus dans cette nouvelle formule.

Pour le problème de Poisson $(\mathcal{P})$, la solution est donnée par

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y) f(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial\eta(y)} dS_y.$$

Pour le problème de Laplace avec condition de Dirichlet, nous obtenons

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial\eta(y)} dS_y = -\int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial\eta(y)} dS_y$$

et la fonction

$$P(x,y) = -\frac{\partial G(x,y)}{\partial\eta(y)}$$

est *le noyau de Poisson.*

Passons maintenant aux propriétés de la fonction de Green.

Théorème:

1. *La fonction de Green pour le domaine* Ω *est telle que, pour tout* $x \in \Omega$ *fixé*

$$\begin{cases} \Delta G(x,y) = 0 & y \in \Omega \setminus \{x\}, \\ G(x,y) = 0 & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

2. *La fonction de Green est symétrique,*

$$\forall x, y \in \Omega, x \neq y; \; G(x,y) = G(y,x).$$

Preuve:

La première propriété découle directement de la définition.

Montrons que la fonction de Green est symétrique.

Fixons $x, y \in \Omega$ tels que $x \neq y$, et posons pour tout $z \in \Omega$

$$u(z) = G(x, z), \qquad v(z) = G(y, z).$$

Alors les fonctions u et v sont harmoniques dans $\Omega \backslash \{x\}$ et $\Omega \backslash \{y\}$ respectivement et $u = v = 0$ sur $\partial\Omega$.

Posons pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \big(B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)\big)$ et appliquons la troisième formule de Green dans Ω_ε aux fonctions u et v,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u) dz = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial\eta(z)} - v \frac{\partial u}{\partial\eta(z)}\right) dS_z$$

donc

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial\eta} - v \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) dS = 0.$$

Comme $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B(x, \varepsilon) \cup \partial B(y, \varepsilon)$ et $u = v = 0$ sur $\partial\Omega$ alors

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon) \cup \partial B(y,\varepsilon)} \left(u \frac{\partial v}{\partial\eta(z)} - v \frac{\partial u}{\partial\eta(z)}\right) dS_z = 0.$$

D'où

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(u \frac{\partial v}{\partial\eta(z)} - v \frac{\partial u}{\partial\eta(z)}\right) dS_z + \int_{\partial B(y,\varepsilon)} \left(u \frac{\partial v}{\partial\eta(z)} - v \frac{\partial u}{\partial\eta(z)}\right) dS_z = 0$$

ce qui implique que

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(u \frac{\partial v}{\partial\eta(z)} - v \frac{\partial u}{\partial\eta(z)}\right) dS_z = \int_{\partial B(y,\varepsilon)} \left(v \frac{\partial u}{\partial\eta(z)} - u \frac{\partial v}{\partial\eta(z)}\right) dS_z. \qquad (6)$$

Par similarité, traitons uniquement le premier membre. On a

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(u \frac{\partial v}{\partial\eta(z)} - v \frac{\partial u}{\partial\eta(z)}\right) dS_z = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u \frac{\partial v}{\partial\eta(z)} dS_z - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} v \frac{\partial u}{\partial\eta(z)} dS_z.$$

La fonction v est régulière en dehors de $B(y,\varepsilon)$, donc elle l'est sur $B(x,\varepsilon)$ et par suite $\partial v/\partial\eta$ est bornée sur $\partial B(x,\varepsilon)$ d'où

$$\left|\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u\frac{\partial v}{\partial\eta(z)}dS_z\right| \leq C \sup_{\partial B(x,\varepsilon)}|u| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} dS_z = C\omega_n\varepsilon^{n-1}\sup_{\partial B(x,\varepsilon)}|u| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Pour le deuxième terme, on a

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(z)\frac{\partial u(z)}{\partial\eta(z)}dS_z = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(z)\frac{\partial G(x,z)}{\partial\eta(z)}dS_z$$

or

$$\frac{\partial G(x,z)}{\partial\eta(z)} = \frac{\partial\big(\phi(x-z)-H_x(z)\big)}{\partial\eta(z)} = \frac{\partial\phi(x-z)}{\partial\eta(z)} - \frac{\partial H_x(z)}{\partial\eta(z)}.$$

D'où

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(z)\frac{\partial u(z)}{\partial\eta(z)}dS_z = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(z)\frac{\partial\phi(x-z)}{\partial\eta(z)}dS_z - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(z)\frac{\partial H_x(z)}{\partial\eta(z)}dS_z.$$

Sachant que H_x est régulière dans Ω, alors

$$\left|\int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(z)\frac{\partial H_x(z)}{\partial\eta(z)}dS_z\right| \leq C_1\omega_n\,\varepsilon^{n-1} \longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Pour le terme en ϕ

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(z)\frac{\partial\phi(x-z)}{\partial\eta(z)}dS_z = -\int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(z)\frac{\partial\phi(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}dS_z = \frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(z)\,dS_z$$

donc

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(z)\frac{\partial\phi(x-z)}{\partial\eta(z)}dS_z \longrightarrow v(x) \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Finalement

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(u\frac{\partial v}{\partial\eta(z)} - v\frac{\partial u}{\partial\eta(z)}\right)dS_z \longrightarrow v(x) \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

De la même manière nous obtenons

$$\int_{\partial B(y,\varepsilon)} \left(v\frac{\partial u}{\partial\eta(z)} - u\frac{\partial v}{\partial\eta(z)}\right)dS_z \longrightarrow u(y) \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

En faisant tendre ε vers 0 dans (6), nous arrivons à $v(x) = u(y)$, et en revenant aux

expressions de u et v nous obtenons $G(y,x) = G(x,y)$.

■

4. Construction de la fonction de Green

L'expression explicite de la fonction de Green, pour des domaines Ω de forme générale, n'est pas facile à établir, puisque sa construction consiste à déterminer la fonction H_x, où x parcourt Ω et telle que $\Delta H_x(y) = 0, y \in \Omega$ et $H_x(y) = \phi(x-y), y \in \partial\Omega$; chose qui n'est pas évidente dans le cas où Ω est de forme quelconque, rappelons-nous que ϕ est radiale.

Nous allons nous restreindre à deux cas.

a. Fonction de Green pour le demi-espace:

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_n > 0\}$ le demi-espace positif de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.
Pour $x \in \mathbb{R}^n$ posons $x = (x', x_n)$ où $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.
On a $\partial\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_n = 0\} = \{(x', 0);\ x' \in \mathbb{R}^{n-1}\} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$,
avec ces notations le point $(x', 0)$ est identifié à $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.
Nous allons appliquer la méthode de réflexion pour construire la fonction de Green pour le demi-espace Ω.
Soit $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega$, le réfléchi de x est le point $x^* = (x_1 \dots, x_{n-1}, -x_n)$.
Le point x^* n'appartient pas à Ω puisque $-x_n < 0$. La projection des points x et x^* sur $\partial\Omega$ est le point x'.
La fonction ϕ étant la solution fondamentale du laplacien, remarquons que $\phi(y - x^*)$ est harmonique par rapport $y \in \Omega$, de plus puisque $|y - x^*| = |y - x|$ pour tout $y \in \partial\Omega$ alors $\phi(y - x^*) = \phi(y - x)$ pour $y \in \partial\Omega$ i.e. $\phi(y' - x^*) = \phi(y' - x)$.
En posant maintenant $H_x(y) = \phi(y - x^*)$ nous écrivons d'après ce que nous avons remarqué que

$$\begin{cases} \Delta H_x(y) = 0 & y \in \Omega \\ H_x(y) = \phi(y - x^*) & y \in \partial\Omega, \end{cases}$$

et la fonction de Green pour le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$ est

$$G(x,y) = \phi(y-x) - H_x(y) = \phi(y-x) - \phi(y-x^*); \quad x, y \in \mathbb{R}^n_+, x \neq y.$$

et puisqu'elle est symétrique, $G(x,y) = \phi(x-y) - \phi(x-y^*)$.

a_bensedik@mail.univ-tlemcen.dz

Exercice 3:

1. Déterminer le noyau de Poisson relatif au demi-espace $\mathbb{R}^n_+$.

2. En déduire la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ dans } \mathbb{R}^n_+ \\ u = 1 \ \text{ sur } \ \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$$

b. Fonction de Green pour la boule:

Soit $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n;\ |y| < r\}$ la boule de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon r. On définit le réfléchi ou le dual de $x \in \Omega \backslash \{0\}$ par rapport à $\partial\Omega$ le point x^* donné par

$$x^* = \frac{r^2}{|x|^2} x.$$

Le dual de 0 est indéterminé mais on écrit par convention $|0^*| = +\infty$.

Nous avons les propriétés suivantes.

1. Si $x \in \Omega, x \neq 0$ alors son dual n'appartient pas Ω.

En effet $|x^*| = r(r/\,|x|) > r$ car $r/\,|x| > 1$ donc $x^* \notin \Omega$.

2. $\forall x \in \Omega, \forall y \in \partial\Omega$

$$\frac{|y - x^*|}{|y - x|} = \frac{r}{|x|}.$$

Soit $x \in \Omega$ et $y \in \partial\Omega$. Nous avons

$$|y - x^*|^2 = |y|^2 - 2y.x^* + |x^*|^2 = r^2 - 2\frac{r^2}{|x|^2}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \frac{r^4}{|x|^2}, \ \text{ car } |y| = r$$

donc

$$|y - x^*|^2 = \frac{r^2}{|x|^2}\left(r^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + |x|^2\right) = \frac{r^2}{|x|^2}\left(|y|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + |x|^2\right)$$

d'où

$$|y - x^*|^2 = \frac{r^2}{|x|^2}(|y - x|^2).$$

Ainsi pour $x \in \Omega$ et $|y| = r$ nous avons la deuxième propriété,

$$\frac{|y - x^*|}{|y - x|} = \frac{r}{|x|}.$$

Déduction de la fonction de Green:

Posons pour $x \in \Omega$, $H_x(y) = \phi(y-x)$. Alors si $y \in \partial\Omega$ i.e. $|y| = r$, d'après la propriété que nous venons de démontrer

$$H_x(y) = \phi(y-x) = \phi(|y-x|) = \phi\left(\frac{|x|}{r}(|y-x^*|)\right).$$

En gardant cette même expression nous remarquons que H_x est harmonique dans Ω puisque pour $y \in \Omega$, $y \neq x^*$. Ceci étant nous avons de ce qui précède

$$\begin{cases} \Delta H_x(y) = \Delta_y \phi\left(\frac{|x|}{r}(|y-x^*|)\right) = 0 \quad \text{si} \;\; y \in B(0,r) \\ H_x(y) = \phi\left(\frac{|x|}{r}(|y-x^*|)\right) = \phi(y-x) \;\; \text{si} \;\; y \in \partial B(0,r). \end{cases}$$

Et finalement la fonction de Green relative à la boule $B(0,r)$ est

$$G(x,y) = \phi(y-x) - H_x(y) = \phi(y-x) - \phi\left(\frac{|x|}{r}(|y-x^*|)\right); \quad x, y \in B(0,r), x \neq y.$$

Exercice 4:

Donner en terme de la fonction de Green la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \;\; \text{dans} \; B(0,r) \\ u = g \;\; \text{sur} \;\; \partial B(0,r). \end{cases}$$

où est une fonction continue. Écrire l'expression explicite du noyau de Poisson.