Mme BENYELLES WAFAA
(suite du cours MI)

Part I
GENERALITE SUR LES VARIABLES ALEATOIRES REELLES (v.a.r)

1 INTRODUCTION

Dans la plupart des phénomènes aléatoires et après la réalisation de notre expérience aléatoire, on s'intéressera à une fonction du résultat qu'au résultat lui-meme. Ainsi, pour une expérience sur une population (exemple un recensement) on s'intéressera à différentes fonctions: nombre d'enfants ou le pourcentage des individus de moins de 25 ans ou la proportion des filles. Ces grandeurs (nombres réels ou entiers) résultat de cette épreuve sont en fait des fonctions réelles définies sur l'ensemble fondamental (associé à notre expérience), appelé : variables aléatoires réelles (v.a.r)

1.1 Définition

Soit (Ω, P) un espace de probabilité, on appelle variable aléatoire réelle (v.a.r), toute **application** X de Ω vers $\mathbb{R}$ définit par:

$$\begin{aligned} X : (\Omega, P) &\longrightarrow (\mathbb{R}, P_X) \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Remarques

1. (Ω, P) un espace de probabilité: Ω est l'ensemble fondamental (ou univers) associé à notre expérience et P sa mesure de probabilité (vu cours précédent).

2. Les v.a.r permettent modulo un codage (ou une quantification) de transformer tout espace de probabilité (Ω, P) en un espace de probabilité $(\mathbb{R}, P_X)$ dit espace de probabilité induit par X, où X est la v.a.r en question et P_X sa probabilité induite :

$$\begin{aligned} \forall A \quad P_X(A) &= P\left[X^{-1}(A)\right] \\ &= P(\{\omega \in \Omega / \quad X(\omega) \in A\}) \\ &= P(X \in A) \end{aligned}$$

Notations d'usage :

$$\begin{aligned} P(X &= \alpha) = P(X^{-1}\{\alpha\}) \\ P(X &\prec \alpha) = P(X^{-1}(]-\infty,\alpha[) \end{aligned}$$

3. On distingue deux types de variables (v.a.r) selon leur l'ensemble d'arrivée, ainsi , on aura:

$$X:\Omega \longrightarrow X(\Omega)$$

- Si $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable ($\subseteq \mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$), alors X est dite variable aléatoire réelle **discrète.**ie $X(\Omega)=\{x_1,x_2,....,x_n\}$ $(dénombrable\ fini)$ ou $X(\Omega)=\{x_1,x_2,....\}$ $(dénombrable\ infini)$
- Si $X(\Omega)$ est un ensemble non dénombrable ($X(\Omega)=]\alpha,\beta[\subseteq\mathbb{R}$), alors X est dite variable aléatoire réelle **continue.**

Exemples

1. Soit l'expérience aléatoire où l'on jette deux dés non pipés (truqués) (ainsi $\Omega=\{(1,1)\,,\ (1,2)\,,\ ...,(1,6)\,,\ (2,1)\,,...(6,6)\}=\{(i,j)\ \text{ avec } i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$. On considère la v.a.r X_1 qui représente la somme des deux dés et X_2 la v.a.r qui représente le plus grand des deux nombres, on aura:

$$X_1:\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad X_2:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(i,j)\longmapsto i+j \qquad\qquad (i,j)\longmapsto Sup(i,j)$$

Dans cet exemple on remarque bien que les varibales X_1 et X_2 transforment modulo une quantification l'espace Ω associé a notre expérience.

2. Si on lance une piéce de monnaie équilibrée: $\Omega=\{pile,\ face\}$, on définit, la v.a.r Y par:

$$\begin{aligned} Y &: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ Y(pile) &= 0,\ \ Y(face)=1 \end{aligned}$$

ainsi, la probabilité induite par la v.a.r est:

$$\begin{aligned} P_X(\{0\}) &= P\left[Y^{-1}\{0\}\right]=P(pile)=\frac{nombre\ de\ cas\ favorable}{nombre\ de\ cas\ possible}=\frac{1}{2} \\ P_X(\{1\}) &= P\left[Y^{-1}\{1\}\right]=P(face)=\frac{nombre\ de\ cas\ favorable}{nombre\ de\ cas\ possible}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dans cet exemple on remarque bien que la varibale Y transforme modulo un codage notre espace Ω en un espace type $\{0,1\}$

3. On remarquera dans ces trois exemples de les variables sont dscrétes car:

$$X_1(\Omega)=\{2,3,4,..,12\}=D_{X_1}$$

$$X_2(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\} = D_{X_2}$$
$$Y(\Omega) = \{0,1\} = D_Y$$

La notation D_X définit en général **le support** d'une variable aléatoire, mathématiquement $D_X = \{x_i \in \mathbb{R},\ \textit{tel que}:\ P_X(x_i) \succ 0\}$

2 Fonction de répartition, fonction de masse et fonction de densité ou loi de probabilité

Une loi de probabilité d'une v.a.r permet de connaitre les chances d'apparition des différentes valeurs de cette variable.

Dans tout ce qui suit, (Ω, P) est un espace de probabilité et $(\mathbb{R}, P_X)$ est l'espace de probabilité induit par la variable (v.a.r) X.

2.1 Définition de la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle. La loi de probabilité de X est définie par la fonction F_X, appelée fonction de répartition de la variable X, définie par:

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto\ F_X(x) = F(x) = P(X \prec x) = P(X^{-1}\,(]-\infty, x[)$$

et qui vérifie les propriétés suivantes:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
3. $F(x)$ est une fonction croissante
4. $F(x)$ est une fonction continue à droite

Remarques

1. On dit que deux variables aléatoires X et Y ont la même loi si elles ont la même fonction de répartition $F_X = F_Y$.
2. La loi de X est en générale notée $\mathcal{L}$(X) ou $\mathcal{L}$oi(X)
3. Si X est une v.a.r discrète, alors
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P_X(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$
où, P_X définit la fonction de masse de la v.a.r X
4. Si X est une v.a.r continue, alors
$$F(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$
où f est la fonction de densité de X.

2.2 Définition d'une fonction de masse

Soit X une v.a.r **discrète**: La fonction de masse P_X qui caractérise entièrement la Loi de X (elle est aussi dite loi de probabilité de X (cf: cours espace de probabilité: proposition 1 chapitre 2.3)), est une fonction telle que:

$$\begin{aligned} P_X :\ \mathbb{R} &\longrightarrow\ [0,1] \\ x_i &\longmapsto\ P_X(x_i) = P(X = x_i) = P\left(X^{-1}\{x_i\}\right) \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions suivantes:

1. $0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\sum\limits_i P_X(x_i) = 1$

Remarques

1. Soit A un événement de $X(\Omega)$, on définit:

$$P_X(A) = \sum_{x_i \in A} P_X(x_i) = \sum_i P(X = x_i)$$

2. Si $X(\Omega)$ est fini démombrable ie $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$,on aura la fonction de masse définit comme :

x_i :	x_1	x_2	...	x_n
$P_X(x_i) = P_i$:	P_1	P_2	...	P_n

et $P_X(x_i) \ = \ 0$ pour tout $x_i \notin X(\Omega)$

La fonction de répartition (dans ce cas) sera ainsi définie:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P_X(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) \end{aligned}$$

concrétement

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \prec x_1 \\ P_1 & si \quad x_1 \leq x \prec x_2 \\ P_1 + P_2 & si \quad x_2 \leq x \prec x_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 & si \quad x_3 \leq x \prec x_4 \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ 1 & si \quad x \geq x_n \end{cases}$$

Exemple

Reprennons l'un des exemples précédents: X_1 qui définit bien une v.a.r discrète.

1) Déterminer la Loi de X_1 (donc sa fonction de masse)

2) Déterminer sa fonction de répartion F_{X_1}

3) Calculer la probabilité des événements suivants:

$A = \{x \geq 10\}$, $B = [0, 2]$, $C = \{x \leq 9\}$, $D = \{20\}$, $E = [15, 30]$

<u>Solution</u>:

1) X_1est une variable discrète car $X_1(\Omega) = D_{X_1} = \{2, 3, 4, ..., 12\}$,avec $\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (2,1), (2,2), ..., (6,6)\} = \{(i,j)\ ,\ i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ $ainsi\ card\Omega = 36$.

Rappel

$$\begin{aligned} \forall A \ \ P_X(A) &= P\left[X^{-1}(A)\right] \\ &= P(\{\omega \in \Omega / \ \ X(\omega) \in A\}) \\ &= P(X \in A) \end{aligned}$$

Ainsi, Si $A = \{3\}$ $alors$ $P_X(\{3\}) = P\left[X^{-1}(\{3\})\right] = P(\{\omega = (i,j) \in \Omega / \ \ X(\omega) \in A\}) = P(\{(1,2),\ (2,1)\} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorable}{nombre\ de\ cas\ possible} = \frac{2}{36}$

x$_k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(i,j)	$(1,1)$	$(1,2)$ $(2,1)$	$(1,3)$ $(2,2)$ $(3,1)$	$(1,4)$ $(2,3)$ $(3,2)$ $(4,1)$	$(1,5)$ $(2,4)$ $(3,3)$ $(4,2)$ $(5,1)$	$(1,6)$ $(2,5)$ $(3,4)$ $(4,3)$ $(5,2)$ $(6,1)$	$(2,6)$ $(3,5)$ $(4,4)$ $(5,3)$ $(6,2)$	$(3,6)$ $(4,5)$ $(5,4)$ $(6,3)$	$(4,6)$ $(5,5)$ $(6,4)$	$(5,6)$ $(6,5)$	$(6,6)$
$P_X(x_k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$P_{X.}$ ainsi définit est bien une fonction de masse car $\begin{cases} 0 \leq P_X(x_k) \leq 1 \\ \displaystyle\sum_k P_X(x_k) = 1 \end{cases}$ de plus $\forall x_k \notin D_{X_1}$, $P_X(x_k) = 0$

2) La fonction de répartition de X_1 est:

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & = 0 & si & x \prec 2 \\ P_1 & = \frac{1}{36} & si & 2 \leq x \prec 3 \\ P_1 + P_2 & = \frac{3}{36} & si & 3 \leq x \prec 4 \\ P_1 + P_2 + P_3 & = \frac{6}{36} & si & 4 \leq x \prec 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & si & x \geq 12 \end{cases}$$

graphe

3) Le calcul des probabilités des événements:

$$\begin{aligned} P_X(A) &= \sum_{x_k \geq 10} P(X = x_k) = P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) \\ &= \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$P_X(B) = \sum_{x_k \in [0,2]} P(X = x_k) = P(X = 2) = \frac{1}{36}$$

$$\begin{aligned} P_X(C) &= \sum_{x_k \leq 9} P(X = x_k) \\ &= P(X = 2) + ... + P(X = 9) \\ &= \frac{1}{36} + .. + \frac{4}{36} = \frac{30}{36} \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} P_X(C) &= 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\{x \succ 9\}) \\ &= 1 - P(\{x \geq 10\}) \\ &= 1 - (P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12)) \\ &= 1 - \left(\frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}\right) = \frac{30}{36} \end{aligned}$$

$$P_X(D) = P_X(\{20\}) = P(X = 20) = 0$$

$$P_X(E) = \sum_{x_k \in [15,30]} P(X = x_k) = 0$$

Exercice (à faire)

Soit X une v.a.r disrète. Exprimer les probabilités des intervalles]a,b],]a,b[, [a,b[, [a,b],]b,+∞[, [b,+∞[à l'aide de la fonction de masse et de la fonction de répartition.

2.3 Définition d'une fonction de densité

Soit X une v.a.r **continue**: La fonction de densité f_X qui caractérise entièrement la Loi de X (elle est aussi dite loi de probabilité de X (cf: cours espace de probabilité: proposition 2 chapitre 2.3)), est une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que:

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x).dx = 1$

Remarques

1. La fonction de répartition (dans le cas continu) est définie:

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longmapsto F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt$$

de plus: La fonction de répartition d'une variable à densité est continue.

2. Soit A un événement de $X(\Omega)$, on définit:

$$P_X(A) = \int_A f(x).dx$$

$P_X(A)$ correspond à l'aire de la surface comprise entre la courbe de f et l'axe des abcisses sur A (A étant en général un intervalle [a, b]).

quelque soit $A = [a,b]\,,\ ou\ A =]a,b],\ ou\ A = [a,b[,\ ou\ A =]a,b[$ on aura:

$$P_X(A) = F_X(b) - F_X(a) \quad avec\ a, b\ des\ réelles\ a \leq b$$

3. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X. Si F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors X est une variable à densité f donnée par:

$$f(x) = F_X^{'}(x)$$

Exemple

Soit X une v.a.r **continue** et f une fonction définie par:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} x \quad \longmapsto \quad f(x) &= \begin{cases} \alpha \cdot x^2 & si \quad x \in [-1,3] \\ 0 & ailleurs \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad x \prec -1 \\ \alpha \cdot x^2 & si \quad x \in [-1,3] \\ 0 & si \quad x \succ 3 \end{cases} \end{aligned}$$

1) Déterminer α pour que f soit une fonction de densité.
2) Déterminer la fonction de répartion F_X
3) Calculer les probabilités suivantes: $P_X([0,2])\,, P_X(]0,8])\,, P(x \geq 1)$, $P(X \succ 1)$

Solution
1)

$$f\ densit\acute{e} \iff \begin{cases} f(x) \succ 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1 \end{cases}$$

1ère condition:

$$\begin{aligned} f(x) \succ 0 &\Longrightarrow \alpha \cdot x^2 \succ 0 \\ &\Longrightarrow \alpha \succ 0\ car\ x^2\ toujours\ positif \end{aligned}$$

2ème condition

$$\begin{aligned} calculons \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx &= \int\limits_{-\infty}^{-1} f(x)\ dx + \int\limits_{-1}^{+3} f(x)\ dx + \int\limits_{+3}^{+\infty} f(x)\ dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\ dx + \int\limits_{-1}^{+3} \alpha \cdot x^2\ dx + \int\limits_{+3}^{+\infty} 0\ dx \\ &= \int\limits_{-1}^{+3} \alpha \cdot x^2\ dx = \left[\frac{\alpha}{3}x^3\right]_{-1}^{3} \\ &= \left[\frac{\alpha}{3}3^3 - \frac{\alpha}{3}(-1)^3\right] \\ &= \frac{27\alpha + \alpha}{3} = \frac{28\alpha}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Or \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx &= 1 \Longrightarrow \frac{28\alpha}{3} = 1 \\ \Longrightarrow & \quad \alpha = \frac{3}{28} accept\acute{e}\ car\ il\ est\ positif \end{aligned}$$

conculsion pour $\alpha = \frac{3}{28}$, f est bien une fonction de densité.

2) La fonction de répartition

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto F_X(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t).dt \end{aligned}$$

Si $x \prec -1$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t).dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0.dt = 0$$

<u>Si $-1 \leq x \leq 3$</u>

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(t).dt + \int_{-1}^{x} f(t).dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} 0.dt + \int_{-1}^{x} \alpha t^2.dt \\ &= 0 + \left[\frac{\alpha}{3} t^3\right]_{-1}^{x} \\ &= \frac{\alpha}{3}\left[x^3 - (-1)^3\right] = \frac{1}{28}\left(x^3+1\right) \end{aligned}$$

<u>Si $x \succ 3$</u>

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt + \int_{-1}^{+3} f(t)\ dt + \int_{+3}^{x} f(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} 0\ dt + \int_{-1}^{+3} \alpha t^2\ dt + \int_{+3}^{x} 0\ dt = 1 \end{aligned}$$

conclusion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si & x \prec -1 \\ \frac{1}{28}\left(x^3+1\right) & si & -1 \leq x \leq 3 \\ 1 & si & x \succ 3 \end{cases}$$

3) le calcul des probabilités:

a) En utilisant la formule de la fonction de répartion

$$P_X(A = [a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$\begin{aligned} P_X\left([0,2]\right) &= P(x \in [0.2]) = F_X(2) - F_X(0) \\ &= \frac{1}{28}\left(2^3+1\right) - \frac{1}{28}\left(0^3+1\right) \\ &= \frac{8}{28} + \frac{1}{28} - \frac{1}{28} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_X\left(]0,8]\right) &= P(x \in]0,8]) = F_X(8) - F_X(0) \\
&= 1 - \frac{1}{28}\left(0^3 + 1\right) = \frac{27}{28}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(x &\geq 1) = P(X \succ 1) = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) - F_X(1) \\
&= 1 - \frac{1}{28}\left(1^3 + 1\right) = \frac{26}{28} = \frac{13}{14}
\end{aligned}
$$

b) En utilisant la formule de la densité de probabilité

$$
P_X(A) = \int_A f(x).dx
$$

$$
\begin{aligned}
P_X\left([0,2]\right) &= \int_0^2 f(x).dx = \int_0^2 \alpha x^2.dx \\
&= \left[\frac{\alpha}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}\alpha = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}
\end{aligned}
$$

$$
P_X\left(]0,8]\right) = \int_0^8 f(x).dx = \int_0^3 \alpha x^2.dx + \int_3^8 0.dx = \frac{27}{28}
$$

$$
\begin{aligned}
P(x &\geq 1) = P(X \succ 1) = \int_1^{+\infty} f(x).dx \\
&= \int_1^3 f(x).dx + \int_3^{+\infty} f(x).dx = \int_1^3 \alpha x^2.dx + \int_3^{+\infty} 0.dx \\
&= \left[\frac{\alpha}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{13}{14}
\end{aligned}
$$

3 L'Espérance d'une v.a.r

A l'origine des jeux de hasard l'espérance d'une v.a.r (ou moyenne en statistique) tient son nom par le projet qu'espère tirer le joueur d'avoir un gain pendant le jeu; ainsi $E(X) \succ 0$ le joueur espère gagner $E(X) \prec 0$ le joueur "espère" perdre

3.1 Définition

L'espérance d'une variable aléatoire X, notée E(X), représente la valeur moyenne pondérée prise par la variable X, plus précisément, c'est le barycentre du système (x_i, P_i) (i= 1, . . . , n), le «point» x_i étant affecté à la «masse» P_i, $P_i = P_X(x_i)$.

1. Si X v.a.r discrète
$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P_X(x_i)$$
où P_X *la fonction de masse*
   - Si $X(\Omega)$ *est fini ie* $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$
$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 \cdot P_X(x_1) + x_2 \cdot P_X(x_2) + ... + x_n \cdot P_X(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_X(x_i) \end{aligned}$$
   - Si $X(\Omega)$ *est infini ie* $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ...\}$
$$E(X) = \sum_{i \geq 1} x_i \cdot P_X(x_i)$$
l'existance de l'espérance est conditionnée par l'absolue convergence de la série.

2. Si X v.a.r continue
$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) \cdot dx$$
de meme **l'existance de l'espérance** est conditionnée par l'absolue convergence de l'intégrale impropre.

3.2 Propriétés

1. X est dite une v.a.r **centrée** si $E(X) = 0$
2. L'espérance est **linéaire**: en effet, soient $a, b \in \mathbb{R}$ $E(aX + b) = aE(X) + b$
$$\begin{aligned} E(b) &= b \quad \text{pour tout réel b} \\ E(aX) &= aE(X) \text{ pour tout réel a} \end{aligned}$$

3. Si $X \geq 0,\ alors\ E(X) \geq 0$

4. Si $X \geq Y,\ alors\ E(X) \geq E(Y)$

5. Soit Y une v.a.r telle que: $Y = g(X)$ avec g une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, alors
$$dans\ le\ cas\ discret\ : E(g(X)) = \sum_i g(x_i) \cdot P_X(x_i)$$
$$dans\ le\ cas\ continu\ : E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f(x) \cdot dx$$
ainsi, on définit **les moments d'ordre k**, $E(X^k)$,comme suit:
$$dans\ le\ cas\ discret\ : E(X^k) = \sum_i x_i^k \cdot P_X(x_i)$$
ou
$$dans\ le\ cas\ continu\ : E(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k \cdot f(x) \cdot dx$$
On remarque que E(X) est le moment d'ordre 1, et E(X^2) est le moment d'ordre 2.

6. (l'espérance d'un produit de v.a. indépendantes) : Si les v.a. X et Y ont un moment d'ordre un et sont indépendantes, alors la v.a. XY a un moment d'ordre un et on a:
$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

Exemples
Calculer l'espérance mahématique pour chaque cas:

1. Soit X une v.a.r discréte et P_X sa fonction de masse définie sur $D_X = \{-3, -2, 0, 1, 3\}$par:

x_i	-3	-2	0	1	3
$P_X(x_i)$	0.2	0.15	0.4	0.05	0.2

$$\begin{aligned} ainsi\ E(X) &= \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot P_X(x_i) \\ &= (-3)\,P_X(-3) + (-2)\,P_X(-2) + 0P_X(0) + 1P_X(1) + 3P_X(3) \\ &= (-3) \times 0.2 + (-2) \times 0.15 + 0 \times 0.4 + 1 \times 0.05 + 3 \times 0.2 = -0.25 \end{aligned}$$

2. Soit X une v.a.r discréte et P_X sa fonction de masse définie par:

$$P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in D_X = \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P_X(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \lambda \cdot e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \ \textit{on pose } n = k-1 \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \ \textit{Or en analyse on a } \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \qquad \textit{car } e^0 = 1
\end{aligned}$$

3. Soit X une variable continue, sa fonction de densité définie par:

$$f(x) = 2 \cdot e^{-2x} \cdot 1_{[0,+\infty[} = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x \prec 0 \end{cases}$$

remarque $1_A = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$ *est dite fonction indicatrice.*

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) \cdot dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x \cdot f(x) \cdot dx + \int_{0}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} x \cdot 2e^{-2x} \cdot dx \ \textit{par intégration par partie on a} \\
&= \left[-x \cdot e^{-2x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot dx = \left[\frac{-1}{2}e^{-2x}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4 La variance et écart type d'une v.a.r

La variance d'une variable aléatoire X, notée V(X), est définie par:

$$V(X) = E(X - E(X))^2$$

souvent dans les calculs on utilisera la formule de Koenig

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

L'écart-type d'une variable aléatoire X, noté $\sigma(X)$, est définie par:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

4.1 Propriétés

1. X est dite une v.a.r **réduite** si $\sigma(X) = 1, \; V(X) = 1$
2. Soient $a, b \in \mathbb{R} \;\; V(aX + b) = a^2 \cdot V(X)$

$$\begin{aligned} V(b) &= 0 \quad \text{pour tout réel b} \\ V(aX) &= a^2 \cdot V(X) \text{ pour tout réel a} \end{aligned}$$

3. Pour toutes les v.a.r: $V(X) \geq 0$ et $\sigma(X) \geq 0$.
4. (La variance de v.a. **indépendantes**) : Si les v.a. X et Y ont un moment d'ordre un et deux et sont indépendantes, alors, on a:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Exemples

Calculer la variance mahématique et l'écart type pour chaque cas (on reprend les exemples des espérances):

1. Soit X une v.a.r discréte et P_X sa fonction de masse définie sur $D_X = \{-3, -2, 0, 1, 3\}$par:

x_i	-3	-2	0	1	3
$P_X(x_i)$	0.2	0.15	0.4	0.05	0.2
x_i^2	9	4	0	1	9
$x_i^2 \cdot P_X(x_i)$	1.8	0.6	0	0.05	1.8

$$\begin{aligned} \textit{calculons } E(X^2) &= \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot P_X(x_i) \\ &= 9P_X(-3) + 4P_X(-2) + 0P_X(0) + 1P_X(1) + 9P_X(3) \\ &= 1.8 + 0.6 + 0 + 0.05 + 1.8 = 4.25 \end{aligned}$$

la variance

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) = 4.25 - (-0.25)^2 \\ &= 4,1875 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \\ &= \sqrt{4,1875} = 2,046 \end{aligned}$$

2. Soit X une v.a.r discréte et P_X sa fonction de masse définie par:

$$P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in D_X = \mathbb{N}$$

calculons d'abord E(X(X-1))

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\cdot P_X(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k(k-1)\cdot(k-2)!} \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} \\ &= \lambda^2\cdot e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \; on\ pose\ n = k-2 \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} \; Or\ en\ analyse\ on\ a\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2 \qquad car\ e^0 = 1 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= E(X^2 - X) \\ &= E(X^2) - E(X)\ car\ l'espérance\ est\ linéaire \\ &= E(X^2) - \lambda \end{aligned}$$

ainsi on peut en déduire $E(X^2)$

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

conclusions

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda}$$

3. Soit X une variable continue, sa fonction de densité définie par:

$$f(x) = 2 \cdot e^{-2x} \cdot 1_{[0,+\infty[} = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x \prec 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\ dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} x^2 \cdot f(x)\ dx + \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\ dx \\ &= \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 \cdot 2e^{-2x}\ dx \ \textit{intégration par partie} \\ &= \left[-x^2 \cdot e^{-2x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-2x}\ dx \\ &= 2(\frac{1}{2}) = 1 \end{aligned}$$

conclusions

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

et

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

5 Transformation de variables aléatoires

Proposition1

Soit (Ω, P) un espace de probabilité et X une v.a.r discréte de support D_X, une P_X sa fonction de masse et φ une fonction de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ telle que $Y = \varphi(X)$, soit aussi une v.a.r discréte dont le support $D_Y = \varphi(D_X)$ et P_Y sa fonction de masse, définie comme:

$$P_Y(y) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(y)} P_X(x) & \text{si} \quad y \in D_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition2

Soit (Ω, P) un espace de probabilité et X une v.a.r continue de support D_X, f_X sa fonction de masse et φ une application de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ telle que $Y = \varphi(X)$, strictement monotone sur D_X et φ^{-1} est bien définie.

Sous ses conditions $Y = \varphi(X)$ est aussi une v.a.r continue dont le support $D_Y = \varphi(D_X)$ et f_Y sa fonction de masse, définie comme:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot \left|\varphi^{-1\prime}(y)\right| & \text{si} \quad y \in D_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemples

Déterminer les lois des nouvelles variables Y avec $Y = \varphi(X)$

1. Dans le jeu de hasard où l'on jette deux dés non pipés, on suppose qu'un joueur gagne 1DA s'il totalise 2,3,4,5ou 6 et perd 1DA s'il totalise 8,9,10,11ou 12, le jeu est nul s'il totalise 7.Ainsi on définit la nouvelle variable $Y = \varphi(X)$ telle que:

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \varphi(x) = \begin{cases} +1 & si \quad x \in \{2,3,4,5,6\} \\ 0 & si \quad x \in \{7\} \\ -1 & si \quad x \in \{8,9,10,11,12\} \end{cases}$$

   $Y = \varphi(X)$ donc $D_Y = \{-1, 0, +1\}$ on remarque bien que Y est une v.a.r discrète, selon proposition1, la fonction de masse de Y est définie par:

$$P_Y(y) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(y)} P_X(x) & \text{si} \quad y \in D_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_Y(y) &= \begin{cases} \sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(-1)} P_X(x) & si \quad y = -1 \\ \sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(0)} P_X(x) & si \quad y = 0 \\ \sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(1)} P_X(x) & si \quad y = +1 \\ 0 & si \quad y \notin D_Y \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{x \in \{8,9,10,11,12\}} P_X(x) & si \quad y = -1 \\ \sum\limits_{x \in \{7\}} P_X(x) & si \quad y = 0 \\ \sum\limits_{x \in \{2,3,4,5,6\}} P_X(x) & si \quad y = +1 \\ 0 & si \quad y \notin D_Y \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{15}{36} & si \quad y = -1 \\ \frac{6}{36} & si \quad y = 0 \\ \frac{15}{36} & si \quad y = +1 \\ 0 & si \quad y \notin D_Y \end{cases} \end{aligned}$$

   P_X étant déjà définie dans l'exemple1 de la définition de la fonction de masse

2. Soit X une v.a.r continu, définie par sa fonction de densité f_X

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & si \quad x \in]0.3[\\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

On définit $Y = \varphi(X)$ avec φ

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \varphi(x) = x^2$$

donc $D_Y = \varphi(\ D_X) =]0.9[$, on remarque bien que Y une v.a.r continue ainsi selon proposition2 sa fonction de densité est (si $\varphi^{-1} existe$):

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot \left|\varphi^{-1\prime}(y)\right| & \text{si} \quad y \in D_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminons l'application inverse de φ puis sa dérivée:

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x) \Longrightarrow y = x^2 \\ &\Longrightarrow x = \pm\sqrt{y} \\ &\Longleftrightarrow x = \varphi^{-1}(y) \end{aligned}$$

donc $\varphi^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$ sa dérivée sera : $\varphi^{-1\prime}(y) = \pm\frac{1}{2\sqrt{y}}$ conclusion

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \begin{cases} f_X(\sqrt{y})) \cdot \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| & \text{si} \quad y \in]0.9[\\ 0 & ailleurs \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_X(\sqrt{y})) \cdot \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| & \text{si} \quad y \in]0.9[\\ 0 & ailleurs \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{9} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{si} \quad y \in]0.9[\\ 0 & ailleurs \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{18} \cdot \sqrt{y} & \text{si} \quad y \in]0.9[\\ 0 & ailleurs \end{cases} \end{aligned}$$