H.BENALLAL

Courbes et Surfaces Paramétrées

Université de TLEMCEN, Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2019-2020

Surfaces paramétrées

H.BENALLAL

28 avril 2020

1 Rappel sur les différentielles

L'étude des surfaces paramétrées est une généralisation de celle des arcs paramétrées. Nous nous intéressons ici aux propriétés affines des surfaces paramétrées et nous introduisons la notion de surface géométrique.

On rappelle dans cette partie les notions différentielles utiles pour les surfaces.

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ (ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$).

Définition 1.0.1 *Une fonction* $\begin{array}{c} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \longmapsto f(u,v) \end{array}$ *est dite de classe* C^1 *si* f *et ses dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ *existent et sont continues.*

Définition 1.0.2 *La fonction* f *est dite de classe* C^k *si les dérivées partielles jusqu'à l'ordre* k *existent et soient continues.*

f est dite de classe C^∞ si f est de classe $C^k, \forall k$.

Si f est de classe C^2, alors: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$

Notations: On note par:

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, f_v = \frac{\partial f}{\partial v}, f_{uv} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, f_{vu} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}.$$

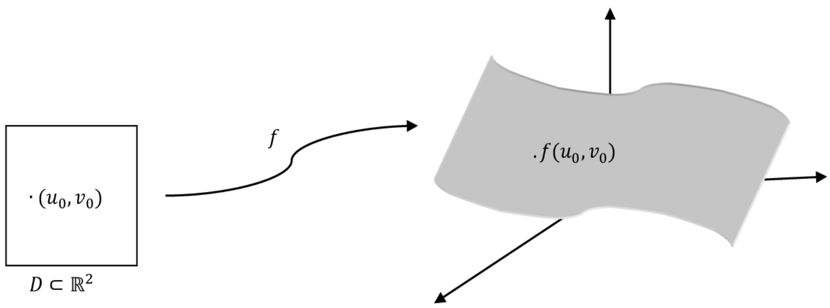
2 Représentation paramétrique des surfaces régulières

Définition 2.0.1 (Surfaces paramétrées)

Une représentation paramétrique de classe C^k d'un sous ensemble des points M dans $\mathbb{R}^3$ est une application de classe C^k:

$$\begin{array}{c} f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \longmapsto f(u,v) \end{array}$$

L'image $M = f(D) = \{f(u,v), u, v \in D\}$ est appelée la surface géométrique ou le support géométrique de la surface paramétrée. (une surface lisse de classe au moins C^1)



Exemple 2.0.2 *La sphère $S^2(0,a)$ est définie par l'application*

$$f : [0, 2\pi] \times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(v,u) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$$

2.1 Reparamétrisation

On peut reparamétrer les surfaces paramétrées par les difféomorphismes. Soient $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée de classe C^1 et $g : X \subset\!\longrightarrow D$ un C^1 difféomorphisme. Alors: $f \circ g : X \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une surface paramétrée qui a exactement le même support géométrique de f. On dit que $f \circ g$ est une reparamétrisation de la surface.

Définition 2.1.1 *On dit qu'une surface paramétrée est simple si et seulement si l'application f est injective.*

Définition 2.1.2 *On dit qu'une surface paramétrée est cartésienne si et seulement si, il existe un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$ tel que l'on ait:*

$$\forall (u,v) \in D : f(u,v) = O + u\,\overrightarrow{i} + v\,\overrightarrow{j} + h(u,v)\,\overrightarrow{k}$$

Définition 2.1.3 *Soit $f : (u,v) \longmapsto f(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$ une nappe paramétrée de $\mathbb{R}^3$. La matrice jacobienne de la nappe est la fonction matricielle*

$$J : (u,v) \longmapsto J(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Définition 2.1.4 *Une surface paramétrée: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dite régulière au point $p = f(u,v)$ si et seulement si la matrice jacobienne est de rang 2. Ce-ci est équivalent à: $f_u \wedge f_v \neq 0, \quad \forall u,v \in D$*

Définition 2.1.5 *Un sous ensemble M de $\mathbb{R}^3$ connexe est appelé une surface si chaque point de M admet un voisinage qui soit régulièrement paramétré.*

2.2 Exemples

1) Le graphe d'une fonction de classe C^2

$$\begin{gathered} g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \longmapsto g(u,v) = z \end{gathered}$$

définie par: $G_g = \big\{(u,v,g(u,v)) \in \mathbb{R}^3, u,v \in D\big\}$.
La paramétrisation $f(u,v) = (u,v,g(u,v))$ de G_g est régulière. En effet:

$f_u = (1,0,g_u),\ f_v = (0,1,g_v)$ et $f_u \wedge f_v = (-g_u, -g_v, 1) \neq 0 \ \forall u,v \in D$

2) La représentation paramétrique:

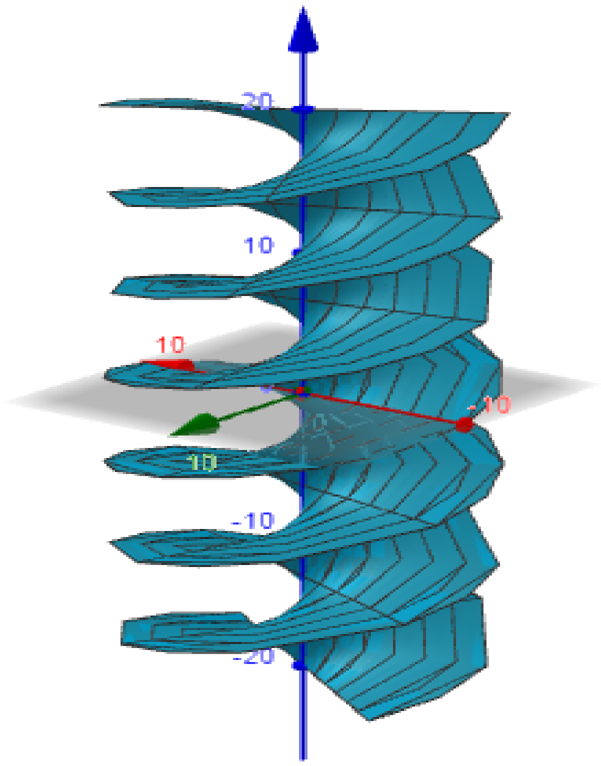
$$f(u,v) = (u+v, u-v, u^2+v^2)$$

est régulière: $f_u = (1,1,2u), \quad f_v = (1,-1,2v)$ et $f_u \wedge f_v = (2v + 2u, 2u - 2v, -2) \neq 0 \ \ \forall u,v \in \mathbb{R}^2$

3) L'hélicoïde:

$$f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv) \quad u \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}, b > 0$$

On a: $f_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $f_v = (-u \sin v, u \cos v, b)$ et $f_u \wedge f_v = (b \sin v, -b \cos v, u) \neq 0$

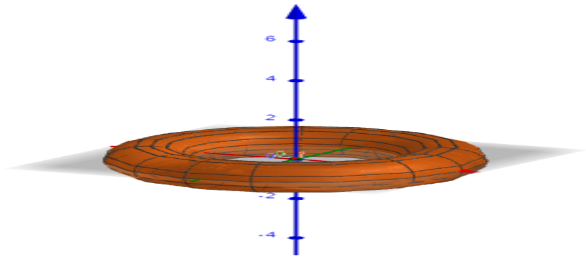


4) Le tore:

$$f(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, b \sin u)$$

$u \geq 0, v < 2\pi, R > r > 0$, On a:

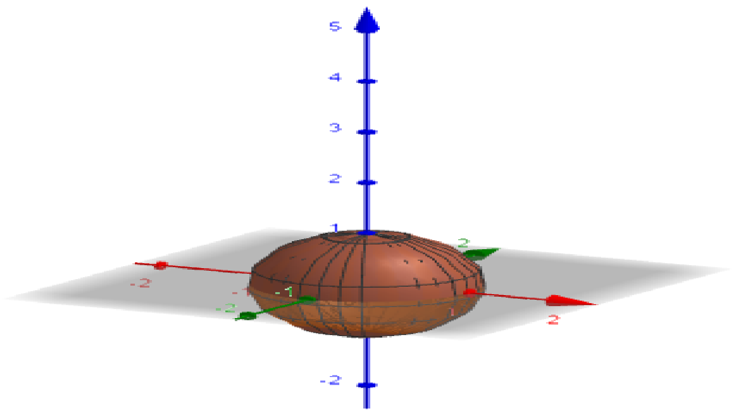
$$f_u \wedge f_v = -b(R + r \cos u)(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \neq 0, \forall u, v$$



5) La sphère unité:

$$f(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u), (u,v) \in]0,\pi[\times]0,2\pi[$$

On a: $f_u \wedge f_v = (\sin u) f(u,v) \neq 0, \forall u, v$



3 Plan tangent à une surface régulière

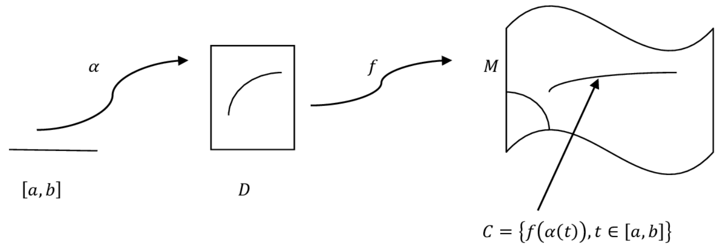
3.1 Courbe tracée sur une surface de $\mathbb{R}^3$

Soit $f(u,v)$ une représentation paramétrique d'une surface M de classe C^1. Soit

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (u(t), v(t)) \end{aligned}$$

une courbe paramétrée régulière plane de classe C^1. Considérons l'image de cette courbe dans la surface M. Alors l'application $f \circ \alpha$:

$I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée de classe C^1, dont le support est inclus dans le support: $M = f(D)$.



Considérons la courbe $\alpha_1 : u \in I \longmapsto \alpha_1(u) = f(u, v_0)$. Si α_1 est régulière , alors le vecteur $\alpha_1'(u_0)$ est tangent à la courbe α_1 au point $\alpha_1'(u_0)$.

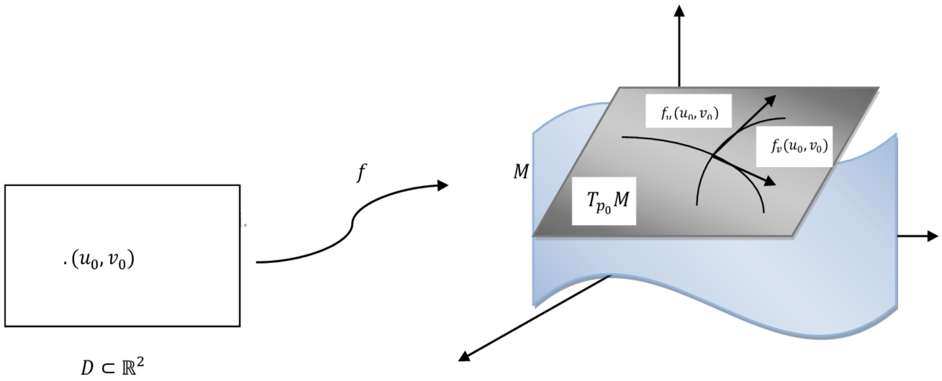
De même si la courbe: $\alpha_2 : v \in J \longmapsto \alpha_2(v) = f(u_0, v)$ est régulière, alors le vecteur $\alpha_2'(v_0)$ est tangent à la courbe α_2 au point $\alpha_2(v_0)$. Où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que: $(u_0, v_0) \in I \times J \subset D$. Et $\alpha_1'(u_0) = f_u(u_0, v_0), \alpha_2'(v_0) = f_v(u_0, v_0)$.

Et comme $f_u \wedge f_v \neq 0$ par hypothèse, alors les vecteurs f_u et f_v sont linéairement indépendants et ils engendrent un plan.

3.2 Plan tangent à une surface

Définition 3.2.1 *L'espace tangent à une surface paramétrée $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ au point $p_0 = f(u_0, v_0)$ est l'espace vectoriel de dimension 2, noté*

$T_{p_0}M$, passant par p_0 est engendré par les vecteurs $f_u(u_0, v_0)$ et $f_v(u_0, v_0)$.



Définition 3.2.2 *Soit $T_{p_0}M$ le plan tangent passant par le point p_0, le vecteur $N = \dfrac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}$ s'appelle le vecteur unitaire normal.*

Exemple 3.2.3 *L'hélicoïde:*

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv) \quad u \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}, b > 0$$

On a: $f_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $f_v = (-u \sin v, u \cos v, b)$, $f_u \wedge f_v = (b \sin v, -b \cos v, u) \neq 0$ et $\|f_u \wedge f_v\| = \sqrt{b^2 + u^2} \neq 0$, d'où:

$$N = \frac{1}{\sqrt{b^2 + u^2}}(b \sin v, -b \cos v, u)$$

3.3 Équation du plan tangent

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de $\mathbb{R}^3$ dans lequel $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ s'écrit: $(u, v) \longmapsto f(u, v) = f_1(u, v)\overrightarrow{i} + f_2(u, v)\overrightarrow{j} + f_3(u, v)\overrightarrow{k}$.

$p_0 = f(u_0, v_0)$ étant un point régulière de la surface M. Le plan tangent $T_{p_0}M$ est l'ensemble des points $m = (x, y, z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que le système $(\overrightarrow{p_0m}, f_u(u_0, v_0), f_v(u_0, v_0))$ soit lié, admet pour équation cartésienne:

$$\begin{vmatrix} x - f_1(u_0, v_0) & f_{1,u}(u_0, v_0) & f_{1,v}(u_0, v_0) \\ y - f_2(u_0, v_0) & f_{2,u}(u_0, v_0) & f_{2,v}(u_0, v_0) \\ z - f_3(u_0, v_0) & f_{3,u}(u_0, v_0) & f_{3,v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

c-à-d: $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{p_0 m} = af_u + bf_v$.

Exemple 3.3.1 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *telle que:*
$f(u, v) = (5u - 3v^2 + 3, -u + v^2, 3u + 4v^2)$ *l'équation de l'espace tangent à* M *au point* $m_0 = f(0, 0) = (3, 0, 0)$. *On a:* $f_u = (5, -1, 3), f_v = (-6v, 2v, 8v)$. *Soit* $m = (x, y, z) \in T_{m_0}M$, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\overrightarrow{m_0 m} = af_u + bf_v = (5a, -a, 3a) + (-6bv, 2bv, 8bv)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x - 3 &= 5a - 6bv \\ y &= -a + 2bv \\ z &= 3a + 8bv \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x &= 5a - 6bv + 3 \\ y &= -a + 2bv \\ z &= 3a + 8bv \end{cases} \quad \textit{L'équation paramétrique}$$

l'équation cartésienne:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 5 & 0 \\ y & -1 & 0 \\ z & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x &= 5a + 3 \\ y &= -a \\ z &= 3a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x &= 5y + 3 \\ a &= -y \\ z &= -3y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x - z = -2y + 3 \Longrightarrow x + 2y - z - 3 = 0$$

4 les deux formes fondamentales

4.1 Première forme quadratique fondamentale

Soit $f : (u, v) \longmapsto f(u, v)$ une surface régulière de classe $C^k, k \geq 2$.

Définition 4.1.1 *On appelle la différentielle de* $f(u, v)$, *noté* df, *une application bijective du vecteur* (du, dv) *associe le vecteur:*$df = f_u du + f_v dv$ *dans le plan tangent.*

Définition 4.1.2 *La première forme quadratique fondamentale* I_p *(une forme bilinéaire symétrique) est la restriction de la forme quadratique* $X \longmapsto \|X\|^2$ *au plant tangent à* M *au point* $p = f(u, v)$*:*

$$\forall V, W \in T_pM : I_p(V, W) = V.W$$

où $V.W$ est le produit scalaire des vecteurs V, w dans $\mathbb{R}^3$.

Le plan vectoriel tangent à M est engendré par les deux vecteurs: f_u et f_v. Un vecteur du plan tangent est donc de la forme $V = \lambda f_u + \mu f_v$ est on a:

$$I_p(V,V) = \lambda^2 \|f_u\|^2 + 2\lambda\mu f_u.f_v + \mu^2 \|f_v\|^2$$

Elle s'exprime dans la base $\{f_u, f_v\}$ de T_pM par:

$$\begin{aligned} I_p(df, df) = df.df &= (f_u du + f_v dv) . (f_u du + f_v dv) \\ &= f_u.f_u du^2 + 2f_u.f_v du.dv + f_v.f_v dv^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdu.dv + Gdv^2 \end{aligned}$$

En désignant par: $E = f_u.f_u$, $F = f_u.f_v$ et $G = f_u.f_v$ des applications de classe C^{k-1} de D dans $\mathbb{R}$.

Les coefficients E, F et G s'appellent coefficients de la première forme fondamentale.

Théorème 4.1.3 *La forme T_p est une forme définie positive.*

Preuve

$$\begin{aligned} I_p = df.df &= Edu^2 + 2Fdu.dv + Gdv^2 \\ &= \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Edu + Fdv \\ Fdu + Gdv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors la forme I_p est définie par la matrice symétrique $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$. Pour qu'elle soit définie positive il faut et il suffit que: $E > 0$ et $EG - F^2 > 0$. On a bien: $E = |f_u|^2 > 0$ et

$$EG - F^2 = (f_u.f_u)(f_v.f_v) - (f_u.f_v)^2 = (f_u \wedge f_v)^2 > 0$$

(On utilisera la formule : $(a \wedge b)(.c \wedge d) = (a.c)(b.d) - (a.d)(b.c)$).

Exemple 4.1.4 *Considérons la surface définie par:*

$f(u,v) = (u+v, u-v, uv) : f_u(u,v) = (1,1,v)$ *et* $f_v(u,v) = (1,-1,u)$

Les coefficients de la première forme fondamentale sont: $E = f_u.f_u = 2 + v^2, G = f_v.f_v = 2 + v^2$ et $F = f_u.f_v = uv$. D'où $I_p = (2 + v^2)du^2 + 2uvdu.dv + (2 + u^2)dv^2$, cette forme est définies positive, car $E = 2 + v^2 > 0$ et $EG - F^2 = 2u^2 + 2v^2 + 4 > 0$.

4.2 Longueur et Aire

4.2.1 longueur d'un arc tracé sur une surface

Prenons une surface paramétrée: $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 et $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow D$ une courbe paramétrée plane. Alors $f \circ \alpha = \gamma$ est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans $f(D)$.

$$\alpha : t \longmapsto (u(t), v(t)) \longmapsto f(u(t), v(t)) = \gamma(t)$$

Le vecteur tangent à γ en $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ est $\gamma'(t) = f_u(u(t), v(t))u'(t)+ f_v(u(t), v(t))v'(t)$.

γ est ainsi rectifiable , sa longueur est donnée par:

$$L(\gamma(t)) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt = \int_a^b \|f_u(u(t), v(t))u'(t) + f_v(u(t), v(t))v'(t)\|dt$$

$$= \int_a^b \left[(u'(t))^2\|f_u(u(t), v(t))\|^2 + (v'(t))^2\|f_v(u(t), v(t))\|^2 + 2u'(t)v'(t)f_u.f_v\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_a^b \left[(u'(t))^2E(u(t), v(t)) + (v'(t))^2G(u(t), v(t)) + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t)\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_a^b \left[(u'(t))^2E(u(t), v(t)) + (v'(t))^2G(u(t), v(t)) + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t)\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

Donc

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{I_p(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt$$

4.2.2 l'aire d'une surface

La norme du produit vectoriel est égale à la surface du parallélogramme construit sur $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ c-à-d: $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \, |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}|$.

Considérons $\triangle\ s = du.dv$ une petite surface encadrée par du et dv du point (u, v). Soit ΔS, l'image de $\triangle\ s$ par f:

$$\Delta S = |df \wedge df| = |f_u \wedge f_v| \, dudv = \sqrt{EG - F^2}dudv$$

Définition 4.2.3 *L'aire de la surface paramétrée $M = f(D)$ où $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est égale à*

$$Aire(M) = \iint_D \sqrt{FG - F^2}dudv$$

D est le domaine de la paramétrisation.

Exemple 4.2.4 *Soit M la surface d'un tore*

$$f(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, b\sin u)$$

$u \geq 0, v < 2\pi, R > r > 0,$ *On a:*

$f_u(u,v) = -r(\sin u \cos v, -r\sin u \sin v, r\cos u), f_v(u,v) = (R{+}r\cos u)(-\sin v, \cos$

Ainsi

$$E = f_u{\cdot}f_u = r^2, \quad F = f_u{\cdot}f_v = 0, \quad G = f_v{\cdot}f_v = (R + r\cos u)^2.$$

L'aire de cette surface est donc

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{EG - F^2}dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(r(R + r\cos u))dudv$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[r(Ru + r\sin u)\right]_0^{2\pi} dv = r\int_0^{2\pi} 2R\pi dv = 2Rr\pi[v]_0^{2\pi} = 4\pi^2 rR.$$

4.3 Application de Gauss

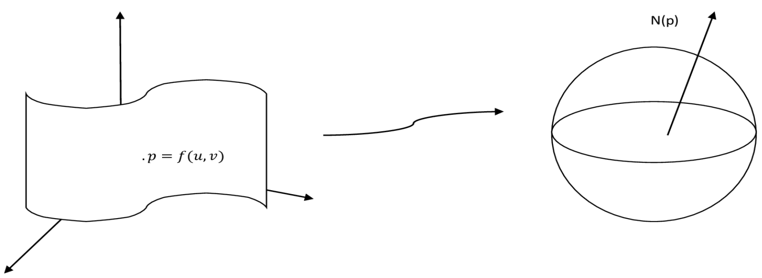
Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface régulière en tout point et $N(u,v) = \dfrac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}$ le vecteur normal unitaire au point $p = f(u,v)$ de M.

Soit $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

L'application $N : M \longrightarrow s^2$ qui associe à chaque point $p = f(u,v)$, le vecteur unitaire normal en $f(u,v)$ est appelée application de Gauss de la surface:

$$N : p \in M \longmapsto N(p) \in S^2$$

On montre qu'elle est de classe C^∞ . Sa différentielle d_pN est une application linéaire de T_pM dans $T_{N(p)}S^2$. Comme ces deux espaces sont parallèles , d_pN peut être interprétée comme un endomorphisme de l'espace vectoriel T_pM.



4.4 Dérivée directionnelle

Soit $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles , p un point de M et V un vecteur tangent à M au point p $\;(V \in T_pM)$.

On donne $\beta :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$ une courbe de classe C^1 telle que $\beta(0) = p$ et $\beta'(0) = V$. Alors :

$$\begin{aligned} F \circ \beta :]-\varepsilon, \varepsilon[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (F \circ \beta)(t) \end{aligned}$$

Définition 4.4.1 $(F \circ \beta)'(t)$ *est appelée la dérivée directionnelle de la fonction* F *dans la direction du vecteur* V.

$$D_V F(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (F \circ \beta)(t) = \lim_{s \mapsto 0} \frac{F(t + sV) - F(t)}{s}$$