Méthode de point fixe pour la résolution des problèmes elliptiques

1 Introduction

Nous commençons par répondre à la question suivante: "Comment appliquer la théorie de point fixe à un problème aux limites elliptique?"
Une des stratégies les plus courantes pour formuler des problèmes non linéaires en des problèmes à point fixe est décrite sur l'exemple suivant

$$Lu = g(x; u) \tag{1}$$

Cette stratégie comprend les étapes suivantes:

1. En supposant que nous savons comment résoudre l' équation linéaire

   $$Lu = f(x) \tag{2}$$

   nous ramenons(1) à un problème linéaire en remplaçant u figurant dans le second membre par un v donné qui donne un problème linéaire

   $$Lu = g(x; v) \tag{3}$$

2. La résolution de ce problème linéaire (2 avec $f(x) = g(x; v(x))$) donne, pour $\tilde{u}$ donné, une solution u à l'équation(3) qui dépend de v. En d'autres termes, on définit un opérateur $T : v \to u$.

3. Alors, un point fixe de T serait une solution au problème non linéaire d'origine(1).
   Mais pour appliquer les théorèmes classiques du point fixe (par exemple Banach, Schauder, Brouwer), nous avons besoin d'estimations sur u, indépendantes de v. Ces estimations dites à priori sont souvent la partie la plus difficile.

Cette stratégie motive l'étude plus détaillée des théorèmes des points fixes dans la section suivante.

2 Théorèmes de points fixes

Definition 1 *Soient X un espace topologique et $T : X \to X$ une application. Un point $x \in X$ est dit point fixe de T si*

$$T(x) = x.$$

2.1 Theorème de Banach.

Definition 2 *Soit* $(X;d)$ *un espace métrique et* $T : M \subset X \to X$ *une application. On dit que* T *est une contraction si, pour tout* $x;y \in M$ *avec* $x \neq y$*, il existe* $k \in]0;1[$ *tel que*

$$d(T(x);T(y)) \leq kd(x;y)$$

Theorem 3 *(théorème du point fixe de Banach). Soit* $(X;d)$ *un espace métrique complet et* $M \subset X$*, non vide et fermé. Si une application* $T : M \to M$ *est une contraction, alors* T *admet un point fixe unique* $x \in M$*.*
De plus, l'estimation de l'erreur est donnée par

$$d\ (x;x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1;x_0)$$

Démonstration.
Notez que les sous-ensembles fermés d'espaces métriques complets sont également des espaces métriques complets, il est donc suffisant de considérer le cas $M = X$.
1. **Existence du point fixe**
On fixe un point $x_0 \in X$ et on définit une suite (x_n) par récurence en posant

$$x_{n+1} = T(x_n).$$

Alors

$$d(x_2;x_1) = d(T(x_1);T(x_0)) \leq kd(x_1;x_0)$$

par ittération, on a

$$d(x_{n+1};x_n) \leq k^n d(x_1;x_0)$$

Ainsi, pour $n < m$, en utilisant l'inégalité triangulaire et la somme de série géométrique , on a

$$\begin{aligned} d(x_n;x_m) &\leq d(x_n;x_{n+1}) + ... + d(x_{m-1};x_m) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + ... + k^{m-1})d(x_1;x_0) \\ &= k^n(1 + k + +k^{m-n-1})d(x_1;x_0) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1;x_0) \qquad (4) \end{aligned}$$

comme $k < 1$, $\frac{k^n}{1-k} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, elle admet une limite $x \in X$. T étant une contraction, elle est lipschitzienne donc continue, il s'ensuit donc que

$$T\ (x) = \lim_{n\to+\infty} T\ (x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = x$$

2. **Unicité du point fixe** $x \in X$
Supposons qu'il y ait $x\prime \neq x$ dans X tel que $x\prime$ soit aussi un point fixe de T. Alors, puisque

$$T(x) = x \quad \text{et} \quad T(x\prime) = x\prime$$

on a,

$$d(T(x);T(x')) = d(x;x\prime), \tag{5}$$

Et,T est une contraction, alors

$$d(T(x);T(x\prime)) \leq kd(x;x\prime) < d(x;x\prime) \tag{6}$$

(5)contredit (6). Donc, notre suppoosition est fausse..
En considérant $m \to \infty$ dans (4) on obtient l'estimation d'erreur souhaitée. ■

Remark 4 *1. L'exigence*

$$d(T(x);T(y)) \leq kd(x;y) \text{ avec } k < 1$$

est essentielle; il n'est pas suffisant de considérer

$$d(T(x);T(y)) < d(x;y)$$

2.Le point fixe de Banach peut être utilisé pour prouver de nombreux résultats importants, par exemple les theorèmes de fonctions implicites et d'inversion locale ou le théorème de Picard-Lindel d'existence pour les équations différentielles ordinaires.

2.2 Théorèmes de points fixes topologiques

Notation. Dans $\mathbb{R}^N$,on note par $|.|$ la norme euclidienne , et par $\mathcal{B}_N$ la boule fermée unitaire $\overline{\mathcal{B}}(0,1) := \left\{x \in \mathbb{R}^N, |x| \leq 1\right\}$ et par $\mathcal{S}_{N-1}$ la sphère unité $= \left\{x \in \mathbb{R}^N, |x| = 1\right\}$ $(\mathcal{S}_{N-1} = \partial\mathcal{B}_N)$

Definition 5 *Soit $\mathcal{A}$ un sous ensemble de l'espace topologique X. on appelle retraction l'application $r : X \to \mathcal{A}$*

$$\forall x \in \mathcal{A}; r(x) = x$$

Dans ce cas on dit que $\mathcal{A}$ est le rétracté de X

Lemma 6 ***Theorem 7*** *(Théorème de Non-Retraction). Il n'existe pas de rétraction continue*

$$\text{r} : \mathcal{B}_N \to \mathcal{S}_{N-1}.$$

Démonstration.
Pour $N = 1$, la frontière de l'intervalle $[-1, 1]$ est $\{-1, 1\}$ qui est un ensemble non connexe; alors que $[-1, 1]$ est connexe. alors aucune application continue,

$$r : \mathcal{B}_1 = [-1, 1] \to \mathcal{S}_0 = \{-1, 1\}$$

ne peut exister.
Pour $N = 2$, on peut considérer comme possible candidate pour une rétraction

$$r : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{S}_1 \text{ telque } r(x) = \frac{x}{|x|},$$

Mais cette fonction présente une singularité en $x = 0$.
Intuitivement, il n'y a pas de fonction qui puisse faire continuement de la place sur $\mathcal{S}_1$pour chaque point de l'intérieur de la sphère $(\mathcal{B}_2)$.
Pour $N \geq 2$,prouver le théorème de non-rétraction n'est pas aussi trivial que cela puisse paraître. Les méthodes les plus courantes utilisent des outils bien en dehors du champ ce cours. Des preuves utilisant la topologie algébrique peuvent être trouvées par exemple. dans [[2]].
Nous allons donc simplement **admettre ce lemme**. ■

Theorem 8 *(Th. de Brouwer).*
Toute application continue $T : \mathcal{B}_N \to \mathcal{B}_N$ admet un point fixe.

Démonstration.
Supposons le contraire, c.à.d qu'il existe $T : \mathcal{B}_N \to \mathcal{B}_N$ sans point fixe. On construit l'application, $r : \mathcal{B}_N \to \mathcal{S}_{N-1}$ en étendant un rayon le long du chemin reliant x à $T(x)$ et en définissant $r(x)$ par l'intersection de ce rayon avec la sphère $\mathcal{S}_{N-1}$ (voir figure 1).

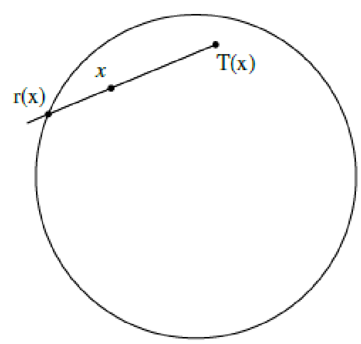

Figure 1: construction de r

De manière explicite, cette application est donnée par

$$r(x) = x + \left(\sqrt{1 - |x|^2 + \langle x, \frac{x - T(x)}{|x - T(x)|} \rangle^2} - \langle x, \frac{x - T(x)}{|x - T(x)|} \rangle \right) \frac{x - T(x)}{|x - T(x)|}$$

L'application r est bien définie puisque T n'a pas de point fixe c.à.d $x - T(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{B}_N$, et continue puisque T est continue. De plus, $r(x) = x$ pour tout $x \in \mathcal{S}_{N-1}$, donc r est une rétraction de $\mathcal{B}_N$ vers $\mathcal{S}_{N-1}$. Mais cela contredit le Lemme (7). Par conséquent, T doit avoir un point fixe. ■

Corollary 9 *Soit K un sous-ensemble non vide, compact et convexe de $\mathbb{R}^N$, alors, toute application continue $T : K \to K$ admet un point fixe.*

Preuve. K étant non vide, compact et convexe de $\mathbb{R}^N$, il est homéomorphe à $\mathcal{B}_N$ (c'est-à-dire qu'il existe une application $h : \mathcal{B}_N \to K$ qui est bijective,et h avec sa fonction inverse h^{-1} sont continues), alors $\widetilde{T} := h^{-1} \circ T \circ h$ est une application continue de $\mathcal{B}_N$ vers $\mathcal{B}_N$ et tout point fixe $\breve{x}$ de $\widetilde{T}$ donne un point fixe $x = h(\breve{x})$ de T. ■

2.3 Théorie du point fixe de Schauder.

Definition 10 *Soit X un espace vectoriel normé et F un sous-ensemble fini de X.*

$$F = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$$

Alors $conv(F)$, l'enveloppe convexe de F, est définie par

$$conv(F) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ / \ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}$$

Definition 11 *Soit X un espace vectoriel normé et F un sous-ensemble de X. L'enveloppe convexe $conv(F)$ est l'intersection de tous les ensembles convexes $S \subset X$ tels que $F \subset S$.*

Lemma 12 *Les définitions* (10) *et* (11) *sont équivalentes pour les ensembles finis.*

Definition 13 *Soit $\varepsilon > 0$. Un sous-ensemble S d'un espace métrique X est dit ε-filet de X si*

$$X \subset \underset{x \in S}{\cup} B(x; \varepsilon)$$

Definition 14 *Un espace métrique X est dit totalement borné s'il existe un ε–filet , pour tout $\varepsilon > 0$.*

Remark 15 *Au lieu de totalement borné, le terme relativement compact est parfois utilisé. Cependant, cela peut également signifier que la fermeture de l'ensemble est compacte. Uniquement pour les espaces métriques complets, les deux notions coïncident.*

Afin d'énoncer le prochain théorème de point fixe, nous avons besoin du lemmel suivant:

Lemma 16 *(lemme de Projection deSchauder).*
Soit K un sous-ensemble compact d'un espace vectoriel normé $(X; \|.\|)$, avec d la métrique induite par la norme $\|.\|$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini $F \subset X$ et une application $P : K \to conv(F)$ tel que

$$\forall x \in K; \ d(P(x); x) < \varepsilon$$

Cette application est appelée projection de Schauder.

Preuve. On considère un $\varepsilon - filet$ pour le compact K et on note par $F := \{x_1, ...x_n\}$ l'ensermble des centres des $\varepsilon-$boules. Pour $i = 1, ..., n$, on définit $\phi_i : K \to \mathbb{R}$ par,

$$\phi_i(x) := \begin{cases} \varepsilon - d(x, x_i) & x \in B(x_i; \varepsilon) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases};$$

On voit que $\phi_i$est continue et strictement positif dans $\mathring{B}(x_i; \varepsilon)$ et s'annule ailleurs. Par conséquent

$$\forall x \in K; \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) > 0$$

On définit la projection de Schauder $P : K \to conv(F)$ par

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i \text{ avec } \phi(x) := \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)$$

L'application P est continue car les ϕ_i le sont. De plus,

$$\begin{aligned} d(P(x), x) &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} (x_i - x) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} \|(x_i - x)\| < \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} \varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

car $\phi_i(x) = 0$ si $\|(x_i - x)\| \geq \varepsilon$. ■

Theorem 17 *(Théorème de point fixe de Schauder).*
Soit X un espace de Banach et soit $M \subset X$, non vide, convexe et fermé. Si $T : M \to M$ est compact (c'est-à-dire que $T(M)$ est relativement compact), alors T admet un point fixe.

Démonstration.
Soit $K = \overline{T(M)}$ la fermeture de $T(M)$ qui, par hypothèse, est compacte. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit F_n un $\frac{1}{n} - filet$ pour K (qui existe car K est compact) et soit $P_n : K \to conv(F_n)$ la projection de Schauder correspondante. La convexité de M implique que $conv(F_n) \subset M$ et on peut définir l'application $T_n : conv(F_n) \to conv(F_n)$;

$$T_n := (P_n \circ T)|_{conv(F_n)}$$

Le corollaire (9) garantit que T_n admet un point fixe. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit un tel point fixe de T_n et le note x_n. Puisque K est compact $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

est bornée , elle admet donc une sous-suite $(x_{n_k})_k$ convergente vers $x \in K$.
Du lemme (16) on a,

$$\begin{aligned} d(T(x);x_{n_k}) &= d(T(x);T_{n_k}(x_{n_k})) \\ &\leq d(T(x);T(x_{n_k})) + d(T(x_{n_k});T_{n_k}(x_{n_k})) \\ &\leq d(T(x);T(x_{n_k})) + \frac{1}{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

puisque T est continu. Ainsi $(x_{n_k})_k$ converge à la fois vers x et $T(x)$. Les limites sont uniques, donc $T(x) = x$. c.q.f.d.
■

Corollary 18 *Soient X un espace de Banach et $M \subset X$, non vide, convexe et compact. Si $T : M \to M$ est continu, alors T admet un point fixe.*

En pratique, il est parfois difficile d'appliquer le théorème de point fixe de Schauder ce qui motive une formulation alternative, connue sous le nom de théorème de point fixe de Schaefer.

Theorem 19 *(Théorème à point fixe de Schaefer).*
Soit X un espace de Banach et $T : X \to X$ une application continue et compacte. Si l'ensemble A, défini par

$$\mathcal{F} := \{x \in X : x = \lambda T(x) \text{ pour un } \lambda \in [0;1]\},$$

est borné, alors T a un point fixe.

Démonstration.
Par hypothèse, on peut choisir une constante M assez grande pour que $\|x\| < M$ si $x = \lambda T(x)$ pour certains $\lambda \in [0;1]$. On définit la retraction $r : X \to \mathcal{B}(0, M)$ par ■

$$r(x) := \begin{cases} x & \|x\| \leq M \\ \left(\frac{M}{\|x\|}\right) x & \|x\| > M \end{cases},$$

Alors, la composée $(r \circ T)$: $\mathcal{B}(0, M) \to \mathcal{B}(0, M)$ est compacte puisque T est compact. Notons par K l'enveloppe convexe fermée de $(r \circ T)(\mathcal{B}(0, M))$. L'ensemble K est convexe par définition, et la compacité de $(r \circ T)$ implique que K est compact. Par le théorème du point fixe de Schauder, il existe un point fixe $x \in K$ de la restriction $(r \circ T)|_K : K \to K$.
Montrons que x est également un point fixe de T.
Pour cela, il suffit de prouver que $T(x) \in K$. Supposons que non. Alors $\|T(x)\| > M$ et

$$x = r(T(x)) = \left(\frac{M}{\|T(x)\|}\right) T(x)$$

ce qui implique

$$\|x\| = \left(\frac{M}{\|T(x)\|}\right) \|T(x)\| = M$$

Or, par hypothèse, $\|x\| < M$, contradiction!.

3 Applications aux problèmes elliptiques

3.1 Équations elliptiques semi-linéaires.

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ouvert, borné, on consideère le problème suivant

$$\begin{cases} Lu = f(x;u) & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

sous les hypothèses suivantes:

$(h1)$ $\partial\Omega$ est C^1

$(h2)$ L'opérateur différentiel L elliptique sous forme divergentielle défini par

$$Lu = -\nabla(A\,(.)\,\nabla u) + cu$$

avec $A(.) = (a_{ij}\,(.))_{1\leq i;j\leq N}$ pour $a_{ij}; c : \Omega \to \mathbb{R}$

$(h3)$ L est uniformément elliptique ,c.à.d

$$\exists\alpha > 0; \forall\xi \in \mathbb{R}^N, p.p.sur\Omega, A(.)\xi.\xi \geq \alpha\,|\xi|^2\,.$$

ou encore $\forall\xi \in \mathbb{R}^N, p.p.sur\Omega, \xi^t A(.)\xi \geq \alpha\,|\xi|^2$

$(h4)$ $a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$ et $c \geq 0$.

$(h5)$ g est tel qu'il peut être prolongé à $H^1(\Omega)$ (c.à.d tel qu'il existe $\breve{g} \in H^1(\Omega)$ avec $\gamma\,(\breve{g}) = g$ $\;[\gamma\,(\breve{g})$: trace de $(\breve{g})]$.

$(h6)$ f est une fonction de Carathéodory telle que il existe $h \in L^q(\Omega)$; $q \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$|f(x;u)| \leq h(x) \text{ pour } x \in \Omega; u \in \mathbb{R}$$

La formulation faible de (7):
"Trouver $u \in H^1(\Omega)$ avec $\gamma(u) = g$ sur $\partial\Omega$ .tel que

$$\int_\Omega \left(\nabla u^t A \nabla v + cuv\right) dx = \int_\Omega f\,(x,u)\,v dx \quad ; \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{8}$$

où

$$\int_\Omega \left(\nabla u^t A \nabla v\right) dx := \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}\,(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,(x)\;\;\frac{\partial v}{\partial x_j}\,(x)\,dx \text{ "}$$

Il faut remarquer que $\int_\Omega f\,(x,u)\,v dx$ est bien définie pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ en raison de l'injection $H_0^1(\Omega \subset L^p(\Omega)$(pour p $\in \mathbb{N}^*$) qui donne $v \in L^p\,(\Omega)$ et, en utilisant l'inégalité de Holder (avec q : conjugué de p) on obtient $f(.;u)v \in L^1(\Omega)$.

Nous avons le résultat d'existence suivant

Proposition 20 *Sous les hypothèses* $(h1)-(h6)$ *le problème* (7)*admet une solution faible* $u \in H^1(\Omega)$ *(au sens de (8)). De plus il existe une constante* $C > 0$, *dépendant uniquement de* A, c *et,* Ω *telle que*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|\breve{g}\|_{H^1(\Omega))} + \|f\|_{L^q(\Omega)}\right) \tag{9}$$

Démonstration.
La preuve est présentée en plusieurs étapes: **Étape 1**: Définition de l'opérateur de point fixe.
Soit $v \in K$ où

$$K := \left\{v \in L^2(\Omega)\,;\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq M\right\}$$

où $M > 0$ sera fixé plus tard.
a) On montre que Kest compact dans $L^2(\Omega)$:
Soit $(u_k)_k \subset K$, de l'injection compacte $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, il existe une soussuite $(u_{k_j})_j$ telle que. $u_{k_j} \underset{j\to\infty}{\to} u$ dans $L^2(\Omega)$. Aussi par le théorème d'Eberlein-Smulian $u_{k_j} \underset{j\to+\infty}{\rightharpoonup} u$ dans $H^1(\Omega)$.
De plus par le théorème de Banach-Steinhaus $\left(u_{k_j}\right)_j$ est bornée et

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \liminf_{j\to\infty}\left\|u_{k_j}\right\|_{H^1(\Omega)} \leq M$$

ce qui prouve que $u \in K$ et donc, K est compact.
b) Soit $u \in H^1(\Omega)$ la solution faible unique du problème linéaire

$$\begin{cases} Lu = f(x; v) & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{10}$$

On sait qu'une telle solution faible existe (en raison du théorème de Lax-Milgram, pour un second membre $f(., v(.))$ dans $H^{-1}(\Omega)$ (l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$). Ce ci étant vrai par l'hypothèse (h6)

$$|f(.; v(.))| \leq h(.) \in L^q(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

On peut ainsi définir l'opérateur

$$T : \underset{v}{K} \underset{\rightsquigarrow}{\to} \underset{u}{L^2}(\Omega)$$

$\underline{\textbf{Étape 2}}$: Montrer que $T : K \to K$ (c.à.d. $T(K) = K$)
a) $\underline{T(K) \subset K}$.
On consider $u = T(v) \in T(K)$. On chosit une fonction test $u - \breve{g} \in H_0^1(\Omega)$ que l'on porte dans la formulation faible du problème (10), on obtient

$$\int_\Omega \left(\nabla u^t A \nabla(u - \breve{g}) + cu(u - \breve{g})\right) dx = \int_\Omega f(x, v)(u - \breve{g})\, dx \tag{11}$$

On commence par estimer le premier membre de (11) en utilisant l'ellipticité de la matrice a et l'inégalité de Cauchy avec ε "$ab \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$",on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\nabla u^t A \nabla (u - \breve{g}) + cu (u - \breve{g})\right) dx && (12)\\
= &\int_\Omega \nabla (u - \breve{g})^t A \nabla (u - \breve{g}) + \nabla \breve{g}^t A \nabla (u - \breve{g}) + c (u - \breve{g})^2 + c\breve{g} (u - \breve{g}) dx\\
\geq &\int_\Omega [\alpha \left|(u - \breve{g})\right|^2 - \frac{\alpha}{2} \left|\nabla (u - \breve{g})\right|^2 - \frac{|A|^2}{2\alpha} \left|\nabla \breve{g}^t\right|^2 + c (u - \breve{g})^2 - \frac{c}{2} \left(\breve{g}^2 + (u - \breve{g})^2\right)] dx\\
\geq &\frac{\alpha}{2} \left\|(u - \breve{g})\right\|_{L^2(\Omega)} - \frac{\|A\|_{L^\infty(\Omega)}}{2\alpha} \|\nabla \breve{g}\|_{L^2(\Omega)} - \frac{\|c\|_{L^\infty(\Omega)}}{2} \|\breve{g}\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

pour estimer le second membre de (11) , on utilise l'inégalité de Holder et l'inégalité de Cauchy avec ε,pour obtenir,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x, v)(u - \breve{g})\, dx &\leq \int_\Omega h (u - \breve{g})\, dx \leq \|u - \breve{g}\|_{L^p(\Omega)} \|h\|_{L^q(\Omega)}\\
&\leq \frac{1}{2\varepsilon} \|h\|^2_{L^q(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2} \|u - \breve{g}\|^2_{L^p(\Omega)} .
\end{aligned}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, comme $p \geq 1$ et nous avons $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. En utilisant la continuité de cette injection et l'inégalité de Poincaré on arrive à

$$\begin{aligned}
\|u - \breve{g}\|_{L^p(\Omega)} &\leq C_1 \|u - \breve{g}\|_{H^1(\Omega)} = C_1 \left(\|u - \breve{g}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla (u - \breve{g})\|_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\leq C_1 (C_p + 1) \|\nabla (u - \breve{g})\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Maintenant, si on choisit $\varepsilon > 0$ assez petit, par exemple

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2C_1^2 (C_p + 1)^2} n$$

de (16) on a

$$\frac{\varepsilon}{2} \|u - \breve{g}\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\alpha}{4} \|\nabla (u - \breve{g})\|_{L^2(\Omega)}$$

et peut donc absorber ce terme (c'est-à-dire le soustraire des deux côtés de la formulation faible) en utilisant le terme équivalent (mais avec préfacteur $\frac{\alpha}{2}$) dans (12). En résumé, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{4} \|\nabla (u - \breve{g})\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2\alpha} \|A\|^2_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \breve{g}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|\breve{g}\|^2_{L^2(\Omega)}\\
+\frac{C_2^2}{\alpha} \|h\|^2_{L^q(\Omega)} &= : M_0^2
\end{aligned}$$

L'utilisation de l'inégalité de Poincaré une fois de plus donne alors

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|u-\breve{g}\|_{H^1(\Omega)} + \|\breve{g}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \left(C_3 M_0 + \|\breve{g}\|_{H^1(\Omega)}\right) =: M \end{aligned} \tag{13}$$

et nous concluons $u \in K$. Cela montre que l'opérateur est definie de K dans K et implique l'estimation à priori (9), dès que l'on connaît l'existence d'un point fixe.

Étape 3: On montre que T est continu.

Soit $(v_k)_k \subset K$, telle que $v_k \underset{k\to\infty}{\rightarrow} v$ dans $L^2(\Omega)$ et montrons que $T(v_k) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} T(v)$ dans $L^2(\Omega)$.Pour cela on considère une sous suite $(v_{k_j})_j$ et on poses $u_j = T\left(v_{k_j}\right)$, alors u_j vérifie

$$\int_\Omega \left(\nabla u_j^t A \nabla w + c u_j w\right) dx = \int_\Omega f(x, v_j)\, w dx \text{ pour w} \in H_0^1(\Omega) \tag{14}$$

et en particulier, par (13), $(u_j)_j$ est uniformément bornée dans $H^1(\Omega)$. elle admet donc une sous-suite $(u_{j_l})_l = (T(v_{k_{jl}}))_l$ telle que par le théorème d'Eberlein-Smulian et par l'injection compacte de $H^1(\Omega)$dans $L^2(\Omega)$ elle vérifie

$$u_{j_l} \underset{l\to+\infty}{\rightharpoonup} u \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ et } u_{j_l} \underset{l\to+\infty}{\rightarrow} u \text{ dans } L^2(\Omega)$$

On obtient alors,

$$\int_\Omega \left(\nabla u_{j_l}^t A \nabla w + c u_{j_l} w\right) dx \underset{l\to+\infty}{\rightarrow} \int_\Omega \left(\nabla u^t A \nabla w + c u w\right) dx$$

Utilisant la continuité de l'opérateur de trace $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ et $\gamma(u_{j_l}) = g$ pour tout l , on a alors

$$\gamma(u_{j_l}) \underset{l\to+\infty}{\rightarrow} \gamma(u) \text{ dans } L^2(\partial\Omega),$$

c'est-à-dire $\gamma(u) = g$.(La propriété qui, pour une sous-suite convergente, l'image est également faiblement convergente est appelée faible continuité séquentielle et ne s'applique qu'aux applications linéaires et continues entre les espaces de Banach).

Reste à determiner la limite du terme $\int_\Omega f\left(x, v_{k_{jl}}\right) w dx.$

Rappelons un résultat démontré en TD:

Si f est de Carathéodory, tq pour tout $s \in \mathbb{R}$ et p.p sur Ω,on a

$$|f(x,s)| \leq C\,|s|^r + b(x)\,, \quad 1 \leq q, qr < \infty, c \geq 0, b \in L^q(\Omega)\,, b \geq 0$$

alors $F(u)(.) := f(., u(.))$, est continue de $L^{qr}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Par application de ce rappel en choisissant $C = 0$ et $r = \frac{2}{q}$; $v \rightsquigarrow f(.,v)$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.
Ainsi $v_{k_j} \underset{j\to\infty}{\rightarrow} v$ dans $L^2(\Omega)$, implique $f(;v_{k_j}) \underset{j\to\infty}{\rightarrow} f(;v)$ dans $L^q(\Omega)$ Et alors,

$$\int_\Omega f\left(x, v_{k_{jl}}\right) w dx \rightarrow \int_\Omega f(x,v)\, w dx \text{ , pour } w \in H_0^1(\Omega)$$

Et par suite u vérifie

$$\int_\Omega \left(\nabla u^t A \nabla w + cuw\right) dx = \int_\Omega f(x,v)\, w dx; \text{ pour } w \in H_0^1(\Omega)$$

donc u est solution faible du problème(10) et comme ce problème admet une solution unique, on conclut que $u = T(v)$ et donc on a montré que

$$T(v_{kj_l}) = u_{j_l} \underset{l\to\infty}{\rightarrow} u = T(v) \text{ dans } L^2(\Omega)$$

Par le résultat suivant:
"Si $(u_n)_n$ une suite dans un espace topologique X, telle que chaque sous-suite $(u_{n_k})_k$admet une autre sous-suite $(u_{n_{k_m}})_m$ convergeant vers $u \in X$. Alors, la suite complète converge vers u.",
on a
La limite u est unique et donc toute la suite $T(v_k)$ converge vers u et la continuité de T est prouvée.
Étape 4: Existence d'un point fixe.
On voit que toutes les hypothèses nécessaires pour le théorème de point fixe de Schauder sont satisfaites, il existe donc $u \in H^1(\Omega)$ tel que. $u = T(u)$. Clairement, ce u est une solution (faible) de (7).

——————————- ■

Remark 21 *Etant donné que la structure de cette preuve est à appliquer, on rappelle les étapes à suivre:*
Preuve via l'argument du point fixe de Schauder
(1) Définir un ensemble K

$$K = \left\{u \in L^2(\Omega) : \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq M\right\} \subset L^2(\Omega)$$

et montrer que K est compact.
(2) Choisir $v \in K$ et résoudre le problème linéaire $Lu = f(x;v)$.
(3) Définir un opérateur $T : K \to L^2(\Omega)$avec $T(v) = u$.
(4) Montrer que, pour tout $v \in K$, $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq M$, c.à.d $T(K) = K$.
(5) $T : K \to K$est continu.
(6) Appliquer le théorème du point fixe de Schauder à T.

3.2 Équations semi-linéaires monotones.

Comme dans la section précédente, nous considérons des équations elliptique

$$\begin{cases} Lu = f(x;u) \text{ dans } \Omega \\ u = g \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{15}$$

Nous avons le résultat d'existence suivant

Proposition 22 *(Existence et unicité pour les équations semi-linéaires monotones). Si les hypothèses* $(h1)-(h5)$ *sont satisfaites et* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction de Caratheodory telle que* $u \rightsquigarrow f(x,u)$ *est décroissante pour presque tout* $x \in \Omega$ *et vérifie*

$$|f(x,u)| \leq \beta |u|^{p-1} + h(x)\,;\ \ p.p \text{ sur } \Omega \text{ et pour tout } u \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

où $\beta > 0$*,*$h \in L^q(\Omega)$ $q \in \mathbb{N}^*$*,* $1 < p < \frac{2N}{N-2}$ *(*$p < \infty$*, si* $N \leq 2$*) et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*.*
Il existe alors une solution faible à (15) unique et une constante $\mathcal{C}>0$ *qui ne dépend que de* A, c *et* Ω *telle que*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{C}\left(\|\breve{g}\|_{H^1(\Omega))} + \|f\|_{L^q(\Omega)}\right) \tag{17}$$

Remark 23 *Notez que les valeurs de* p *et* q *sont choisies telles que, l'injection* $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *est compacte et que* $f(;u) \in L^q(\Omega)$*: ceci est une conséquence de*

$$|f(;u)|^q \leq cste\left(|u|^{(p-1)q} + h(x)^q\right)$$

La preuve sera à nouveau basée sur un argument de point fixe, mais cette fois nous ne pouvons pas utiliser le théorème de Schauder.

Démonstration de la proposition.
Étape 1: Définition de l'opérateur de point fixe.
Pour $v \in L^p(\Omega)$ donné et $\lambda \in [0;1]$ soit $u \in H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ être la seule solution faible pour

$$\begin{cases} Lu = \lambda f(x;v) \quad \text{dans } \ \Omega \\ u = \lambda g \qquad \text{sur}\partial\Omega \end{cases} \tag{18}$$

Cela définit l'opérateur

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad L^p(\Omega) \times [0;1] \to L^p(\Omega); \\ u \quad &= \quad T(v,\lambda) \end{aligned}$$

Pour $\lambda = 0$, la solution de (18) est u = 0, c'est-à-dire

$$T(v;0) = 0 \text{ pour tout } v \in L^p(\Omega)$$

Étape 2: T est continu et compact (similaire à l'étape 3 de la preuve de la proposition (20). Soit $(v_k)_k$ une suite bornée avec $\|v_k\|_{L^p(\Omega)} \leq M$. ($M$ = constante > 0)

t.q $v_k \underset{k\to\infty}{\to} v$ dans $L^p(\Omega)$ et $\lambda_k \to \lambda$.
On définit $u_k = T(v_k;\lambda_k)$ et on utilise $u_k - \lambda_k\breve{g}$ comme fonction test dans la forme faible de (18):

$$\int_\Omega \left(\nabla u_k^t A\nabla\left(u_k - \lambda_k\breve{g}\right) + cu_k\left(u_k - \lambda_k\breve{g}\right)\right)dx = \lambda_k \int_\Omega f\left(x, v_k\right)\left(u_k - \lambda_k\breve{g}\right)dx \tag{19}$$

Comme dans la démonstration de la proposition(20) , on peut estimer le premier membre de (19) en utilisant l'ellipticité de A, pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}\int_\Omega \left|\nabla\left(u_k - \lambda_k\breve{g}\right)\right|^2 dx &\le \int_\Omega \left|f\left(x, v_k\right)\left(u_k - \lambda_k\breve{g}\right)\right| dx + C\left(A, c, \breve{g}\right) \qquad (20)\\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\left\|u_k - \lambda_k\breve{g}\right\|^2_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\left\|f\left(., v_k\right)\right\|^2_{L^q(\Omega)} + C\left(A, c, \breve{g}\right)\end{aligned}$$

La constante $C(A, c, \breve{g})$ dépend des normes L^∞ de A et c et de la norme H^1de $\breve{g}$ et on a utilisé l'inégalité de Holder et celle de Young dans la dernière inégalité de (20).
Et en utilisant la continuité de l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, l'inégalité de Poincaré et $\lambda_k \le 1$, on peut donner l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2}\left\|u_k - \lambda_k\breve{g}\right\|^2_{L^p(\Omega)} &\le \frac{\varepsilon}{2}C_1^2\left\|u_k - \lambda_k\breve{g}\right\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad (21)\\ &\le 2\frac{\varepsilon}{2}C_1^2\left(1 + C_p\right)^2\left\|\nabla\left(u_k - \lambda_k\breve{g}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Pour ε suffisamment petit, par exemple $\varepsilon = \frac{\alpha}{4C_1^2(1+C_p)^2}$,dans (21) on peut absorber le premier terme dans le second membre de l'inégalité (20)par le premier membre de (20). Le deuxième terme est estimé comme suit, en utilisant (16):

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|f\left(x, v_k\right)\right|^q dx &\le \beta\int_\Omega \left|v_k\right|^{q(p-1)} dx + \int_\Omega |h|^q dx\\ &\le C_3\left(M^2 + \|h\|_{L^q(\Omega)}\right)\end{aligned}$$

puisque $(p-1)q = p$. Ainsi, le côté droit est borné, ce qui implique

$$\left\|u_k\right\|_{H^1(\Omega)} \le C_4 \tag{22}$$

Ainsi, la suite $\left(u_k = T\left(v_k, \lambda_k\right)\right)_k$ est bornée dans $H^1(\Omega)$, il existe alors une sous suite telle que

$$u_{k_j} \underset{j\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ et } u_{k_j} \underset{j\to\infty}{\to} u \text{ dans } L^p(\Omega)$$

Puisque $v_k \underset{k\to\infty}{\to} v$ dans $L^p(\Omega)$ on a $f\left(x, v_{k_j}\right) \to f(x, v)$dans $L^q(\Omega)$,alors en passant à la limite dans la formulation faible,

$$\int_\Omega \left(\nabla u_{k_j}^t A\nabla w + cu_{k_j}w\right)dx = \lambda_k\int_\Omega f\left(x, v_{k_j}\right)wdx \text{ , pour } w \in H_0^1(\Omega)$$

on obtient,

$$\int_{\Omega}\left(\nabla u^{t}A\nabla w+cuw\right)dx=\lambda\int_{\Omega}f\left(x,v\right)wdx$$

où, en raison de la faible continuité de l'opérateur de trace, la limite satisfait également les conditions aux limites. Ainsi, u est une solution à (18), c'est-à-dire $u=T(v;\lambda)$ et $T(v_{k_j};\lambda_{k_j})=u_{k_j}\rightarrow u=T(v;\lambda)$ dans $L^{p}\left(\Omega\right)$. Comme nos arguments sont toujours valables si nous commençons par une sous-suite arbitraire et en raison de l'unicité de la limite, le rappel montre à nouveau la convergence de toute la suite $\left(T\left(v_k;\lambda_k\right)\right)_k$. Ainsi, T est continu.
La compacité de T est une conséquence de l'estimation (uniforme en k) (22). En effet, si $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$est une suite bornée dans $L^{p}\left(\Omega\right)$, alors $\left(u_k\right)_{k\in\mathbb{N}}=\left(T(v_k;\lambda_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est borné dans $H^{1}\left(\Omega\right)$, c'est-à-dire admet une sous-suite convergente dans $L^{p}\left(\Omega\right)$
Étape 3: Estimation à priori.
Reste à montrer les estimations sur les points fixes.càd on montre que l'ensemble $\mathcal{F}$ est borné.
Soit, $\lambda\in[0,1]$ et $u\in H^{1}\left(\Omega\right)$ un point fixe de $T(;\lambda)$. On prend $u-\lambda g\in H_0^{1}\left(\Omega\right)$comme fonction test et on obtient (par un calcul similaire à celui cidessus

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^{2}dx &\leq \lambda\int_{\Omega}f\left(x,u\right)\left(u-\lambda\breve{g}\right)dx+C\left(A,c,\breve{g}\right) \qquad (23)\\ &\leq \lambda\int_{\Omega}f\left(x,u\right)-f\left(x,\lambda\breve{g}\right)\left(u-\lambda\breve{g}\right)dx\\ &\quad+\lambda\int_{\Omega}f\left(x,\lambda\breve{g}\right)\left(u-\lambda\breve{g}\right)dx+C\left(A,c,\breve{g}\right)\end{aligned}$$

utilisant $\lambda\leq1$ et la monotonie de $f\left(x,.\right)$, on obtient,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^{2}dx &\leq \frac{\varepsilon}{2}\left\|u-\lambda_k\breve{g}\right\|_{L^{p}(\Omega)}^{2}+\frac{1}{2\varepsilon}\left\|f\left(.,\lambda\breve{g}\right)\right\|_{L^{q}(\Omega)}^{2}+C\left(A,c,\breve{g}\right) \qquad (24)\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\left\|u\right\|_{L^{p}(\Omega)}^{2}+\frac{1}{2\varepsilon}\left\|f\left(.,\lambda\breve{g}\right)\right\|_{L^{q}(\Omega)}^{2}+\check{C}\left(A,c,\breve{g}\right)\end{aligned}$$

En appliquant encore l'injection de Sobolev et l'inégalité de Poincaré au premier terme du second membre de (24) on obtient pour ε assez petit,

$$\frac{\varepsilon}{2}\left\|u\right\|_{L^{p}(\Omega)}^{2}\leq\frac{\alpha}{4}\left\|\nabla u\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+C_4\left\|\breve{g}\right\|_{H^{1}(\Omega)}^{2}$$

Le premier terme ddu second membre peut etre absorbé par le premier membre de (**??**.) . Le secnd terme de (24) est estimé en utilisant (16)de sorte que l'on obtient,

$$\frac{\alpha}{4}\left\|\nabla u\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\leq C_5\left(\left\|\breve{g}\right\|_{L^{q(p-1)}(\Omega)}^{2(p-1)}+\left\|h\right\|_{L^{q}(\Omega)}^{2}\right)+C\left(A,c,\breve{g}\right)$$

qui est borné car $(p-1)q = p$ et l'injection$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$,est continue. On arrive alors à l'estimation,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_6 \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_7$$

où C_7 depend de g et h. On est maintenant en position d'appliquer le théorème de Scheafer et conclure que $T(;1)$ admet un point fixe .

Étape 4: Unicité.

Soit u_1 et u_2 deux solutions faibles à (15). Alors, $u_1 - u_2 \in H^1(\Omega)$ est une fonction test admissible et on obtient

$$\int\limits_\Omega \left(\nabla u_i^t A \nabla (u_1 - u_2) + c u_i (u_1 - u_2)\right) dx = \int\limits_\Omega f(x, u_i)(u_1 - u_2)\, dx \text{ ;i=1,2}$$

en soustrayant les deux équations et en utilisant la monotonie de f on arrive à,

$$\begin{aligned} & \int\limits_\Omega \left(\nabla (u_1 - u_2)^t A \nabla (u_1 - u_2) + c (u_1 - u_2)^2\right) dx \\ = & \int\limits_\Omega (f(x, u_1) - f(x, u_2))(u_1 - u_2)\, dx \leq 0 \end{aligned}$$

et, en utilisant l'ellipticité de A, nous concluons que

$$\nabla (u_1 - u_2) = 0,$$

c'est-à-dire $u_1 - u_2 = const\ p.p.$ dans Ω. Comme $(u_1 - u_2)$ vérifie la condition de Dirichlet nulle nous concluons $u_1 = u_2$. ■

Remark 24 *D'autres exemples sont présentés dans [3].voir les pages 10, 25, 30 et 31 .Ainsi que dans [1] page 508 exemple 2 ,th.5.*

References

[1] L. C. Evans,Partial differential equations, Graduate studies in Mathematics, volume 19, Providence, R.I.: American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-4974-3, MR 2597943 American Mathematical Society.

[2] A. Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.

[3] M. Rupflin, Fixed Point Methods for Nonlinear PDE https://courses.maths.ox.ac.uk/node/view_material/2037