

Chapitre 3

Calcul Intégral dans \mathbb{R}^n

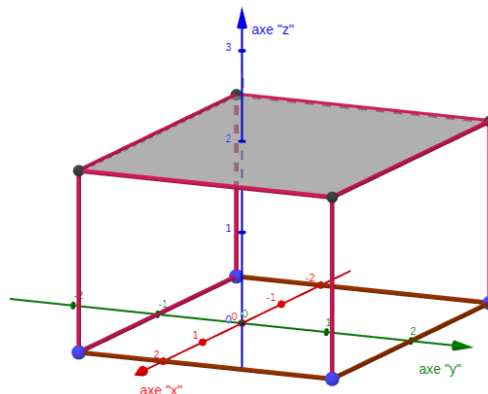
Le présent chapitre est une introduction au calcul intégral dans \mathbb{R}^n . Il s'agit d'une extension de la théorie de l'intégrale de Riemann développée en Analyse 1. Le but recherché en première instance étant de donner à l'étudiant le maximum d'outils pour réussir des calculs explicites. C'est pourquoi, les questions "trop théoriques" ne seront abordées que rarement. Nous présenterons les cas $n = 2$ et $n = 3$. Le cas général est similaire bien que hors programme.

3.1 Le cas $n = 2$

Les domaines de base sont les rectangles fermés $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, et les fonctions de base sont les fonctions constantes $f(x, y) = c$. L'intégrale est définie alors par

$$\iint_{[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]} f(x, y) \, dx dy = c(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$$

Sa valeur absolue représente le *volume* du parallélépipède de base $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ et de hauteur $|c|$. Dans la figure suivante, on a représenté la fonction constante $f(x, y) = 2$ dans le rectangle $[-2, 2] \times [-1, 2]$



Pour définir l'intégrale double on considère une fonction $f : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée i.e, $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq f(x, y) \leq M$, $\forall (x, y) \in Q = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$. On considère aussi une subdivision pour chacun des deux intervalles :

$$a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = a_2 \quad \text{et} \quad b_1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = b_2$$

On aurait pu choisir un nombre différent de points pour chaque subdivision, mais on peut toujours revenir au même nombre en rajoutant des points à celle qui en a moins. Notons

$$\Delta_n = \{(x_i, y_j) \mid i, j = 0, 1, \dots, n\}$$

que nous appellerons *subdivision* du pavé $Q = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$. On notera aussi $Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ avec son aire $\mu(Q_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$. Nous appellerons *pas* de la subdivision Δ_n le nombre

$$\rho_n = \max_{1 \leq i, j \leq n} \mu(Q_{ij})$$

On dira qu'une subdivision $\Delta'_{n'}$ est plus fine que Δ_n si $\Delta_n \subset \Delta'_{n'}$. En particulier, elle contient plus de points, dont les coordonnées se placeront forcément entre celles des point de Δ_n . D'où la diminution du pas : $\rho'_{n'} \leq \rho_n$. Posons

$$m_{ij} = \inf_{Q_{ij}} f(x, y) \quad , \quad M_{ij} = \sup_{Q_{ij}} f(x, y)$$

Les sommes de Darboux inférieure et supérieure sont définies par

$$s(f, \Delta_n) := \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \mu(Q_{ij}) \quad , \quad S(f, \Delta_n) := \sum_{i,j=1}^n M_{ij} \mu(Q_{ij})$$

Une première série d'inégalités se déduit facilement

$$m\mu(Q) \leq s(f, \Delta_n) \leq S(f, \Delta_n) \leq M\mu(Q)$$

Une deuxième série d'inégalités fait intervenir deux subdivisions dont l'une est plus fine que l'autre, $\Delta_n \subset \Delta'_{n'}$

$$s(f, \Delta_n) \leq s(f, \Delta'_{n'}) \leq S(f, \Delta'_{n'}) \leq S(f, \Delta_n)$$

Ceci s'interprète en disant que, respectivement à l'ordre partiel défini par la finesse, les sommes de Darboux inférieures sont croissantes et les sommes de Darboux supérieures sont décroissantes. La démonstration repose sur les deux inégalités, faciles à établir

$$\text{si } A \subset B \text{ alors } \inf_B f(\xi) \leq \inf_A f(\xi) \quad \text{et} \quad \sup_A f(\xi) \leq \sup_B f(\xi)$$

On les applique à $Q'_{i'j'} \subset Q_{ij}$ pour obtenir les bonnes inégalités.

Proposition 3.1.1 Soient Δ_n^1 et Δ_n^2 deux subdivisions quelconques (non nécessairement comparables). Alors

$$s(f, \Delta_n^1) \leq S(f, \Delta_n^2)$$

Démonstration : Posons $\Delta_n = \Delta_n^1 \cup \Delta_n^2$. Alors cette subdivision est plus fine que Δ_n^1 et Δ_n^2 . D'où par ce qui précède

$$s(f, \Delta_n^1) \leq s(f, \Delta_n) \leq S(f, \Delta_n) \leq S(f, \Delta_n^2)$$

■

Notons \mathfrak{D}_Q l'ensemble des subdivisions du pavé Q . On peut maintenant affirmer que les deux quantités suivantes existent et vérifient

$$\sup_{\Delta_n \in \mathfrak{D}_Q} s(f, \Delta_n) \leq \inf_{\Delta_n \in \mathfrak{D}_Q} S(f, \Delta_n)$$

Définition 3.1.2 On dit que la fonction f est Riemann-intégrable sur le pavé Q si et seulement si

$$\sup_{\Delta_n \in \mathfrak{D}_Q} s(f, \Delta_n) = \inf_{\Delta_n \in \mathfrak{D}_Q} S(f, \Delta_n)$$

Dans ce cas, la valeur commune s'appelle intégrale double de f sur Q et se note

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy$$

L'utilisation des sommes de Darboux est souvent réservée à des questions théoriques comme la non intégrabilité d'une fonction. Pour des problèmes pratiques, on a recours à la notion de somme de Riemann.

Définition 3.1.3 On appelle somme de Riemann associée à une subdivision Δ_n la somme

$$\mathfrak{R}(f, \Delta_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} f(\xi_{ij}) \mu(Q_{ij}) \quad (3.1)$$

où $\xi_{ij} \in Q_{ij}$ sont des points arbitrairement choisis.

Proposition 3.1.4 Si f est Riemann-intégrable sur le pavé Q , alors on a

$$\lim_{\rho_n \rightarrow 0} \mathfrak{R}(f, \Delta_n) = \iint_Q f(x, y) \, dx dy$$

Démonstration : L'affirmation découle essentiellement du fait que $s(f, \Delta_n) \leq \mathfrak{R}(f, \Delta_n) \leq S(f, \Delta_n)$. ■

Une large classe de fonctions intégrables au sens de Riemann est formée des fonctions continues, et les fonctions continues par morceaux. La preuve est identique au cas d'une variable (revoir Analyse 1). C'est dans ces classes que nous allons travailler désormais.

3.2 Propriétés

Nous allons énumérer les premières propriétés, identiques par ailleurs au cas d'une variable.

Proposition 3.2.1 1. (Linéarité) Soient f, g deux fonctions continues sur un pavé Q , alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\iint_Q (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \, dx dy = \alpha \iint_Q f(x, y) \, dx dy + \beta \iint_Q g(x, y) \, dx dy$$

2. (Positivité) Si $f \geq 0$ alors $\iint_Q f(x, y) \, dx dy \geq 0$

3. (Croissance) Si $f \leq g$ alors $\iint_Q f(x, y) \, dx dy \leq \iint_Q g(x, y) \, dx dy$

4. On a $|\iint_Q f(x, y) \, dx dy| \leq \iint_Q |f(x, y)| \, dx dy$

Démonstration :

1. La linéarité découle (par exemple) du fait que la somme de Riemann possède la même propriété par rapport à f i.e,

$$\mathfrak{R}(\alpha f + \beta g, \Delta_n) = \alpha \mathfrak{R}(f, \Delta_n) + \beta \mathfrak{R}(g, \Delta_n)$$

on passe à limite ensuite.

2. Idem pour la positivité

3. Pour la croissance, il suffit d'appliquer la positivité à $g - f$ et la linéarité ensuite.

4. Pour la dernière, on a bien $f \leq |f|$.

■

Définition 3.2.2 Notons $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique d'un sous-ensemble A i.e,

$$\mathbb{1}_A(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in A \\ 0 & \text{si } \xi \notin A \end{cases}$$

Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ borné est dit mesurable (ou quarrable) si et seulement si sa fonction caractéristique est intégrable. La bornitude implique l'existence d'au moins un pavé $Q \supset A$. La valeur de l'intégrale dans ce cas définit la surface de A i.e,

$$\mu(A) = \iint_Q \mathbb{1}_A(x, y) \, dx dy = \iint_A dx dy$$

Ces sous-ensembles bornés mesurables vont constituer une classe d'ensembles plus large que celle des pavés, et avec lesquels on pourra calculer des intégrales doubles de fonctions continues. En effet

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \iint_Q f(x, y) \mathbb{1}_A(x, y) \, dx dy$$

Parmi les ensembles mesurables, il y a ceux qu'on appelle simples. Il sont définis par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

ou bien

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d \text{ et } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

où les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sont au moins continues. Un exemple de tels ensembles le disque euclidien de centre $(0, 0)$ et de rayon r i.e,

$$D((0, 0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} D((0, 0), r) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -r \leq x \leq r \text{ et } -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -r \leq y \leq r \text{ et } -\sqrt{r^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2}\} \end{aligned}$$

Un ensemble de mesure (d'aire) nulle est dit négligeable. Par exemple un segment de droite. Il existe des ensembles négligeables plus sophistiqués. Cette notion va nous permettre d'énoncer la formule de Chasles.

Proposition 3.2.3 (*Formule de Chasles*)

Soient A, B deux ensembles bornés mesurables tels que $A \cap B$ soit négligeable. Alors

$$\iint_{A \cup B} f(x, y) \, dx dy = \iint_A f(x, y) \, dx dy + \iint_B f(x, y) \, dx dy$$

Comme conséquence immédiate, le calcul d'une intégrale sur un domaine pourra se faire en décomposant ce domaine en une réunion finie de domaines simples dont les intersections deux à deux sont négligeables.

3.3 Théorème de Fubini

Dans cette section nous allons aborder la première technique majeure pour calculer les intégrales doubles. Il s'agit de ramener ce calcul à celui de deux intégrales simples. L'ordre d'intégration sera sans importance grâce au théorème de Fubini (Guido FUBINI 1879-1943).

Théorème 9 (*de Fubini*)

Soit $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un pavé Q . Alors

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Démonstration : Montrons par exemple la première égalité. Remarquons que la continuité (en deux variables) de f implique d'une part son intégrabilité double sur Q . Elle implique d'autre part que chacune des deux fonctions $f(x, \cdot)$ et $f(\cdot, y)$ est continue et donc intégrable sur son intervalle respectif. Notons $h(x) = \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy$. L'outil essentiel dans cette démonstration est le fait qu'une fonction continue sur un compact (Q en l'occurrence) est uniformément continue i.e,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad |x - x'| + |y - y'| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(x, y) - f(x', y')| \leq \varepsilon$$

(δ_ε ne dépend que de ε et pas des points $(x, y), (x', y')$). L'égalité sera établie si on démontre que l'intégrale double de f sur Q est égale à l'intégrale simple de h sur $[a_1, a_2]$. Nous allons le faire à l'aide des sommes de Riemann. Choisissons une subdivision Δ_n telle que $\forall i, j \quad |x_i - x_{i-1}| + |y_j - y_{j-1}| \leq \delta_\varepsilon$. Rappelons enfin que d'après les résultats (Analyse 3) sur les intégrales dépendants d'un paramètre, la fonction h est continue. Reprenons l'expressions de la somme de Riemann (3.1) où $\xi_{ij} = (u_i, v_j)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(f, \Delta_n) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} f(u_i, v_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \left(\sum_{j=1}^n f(u_i, v_j)(y_j - y_{j-1}) \right) \end{aligned}$$

La dernière somme représente une somme de Riemann pour la fonction $f(u_i, \cdot)$. D'où pour n assez grand

$$\sum_{j=1}^n f(u_i, v_j)(y_j - y_{j-1}) = \int_{b_1}^{b_2} f(u_i, y) dy + \Theta_n(u_i) = h(u_i) + \Theta_n(u_i)$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Theta_n(u_i) = 0$. En fait cette limite est uniforme par rapport aux u_i . En effet,

$$\Theta_n(u_i) = \sum_{j=1}^n f(u_i, v_j)(y_j - y_{j-1}) - \int_{b_1}^{b_2} f(u_i, y) dy = \sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1}}^{y_j} (f(u_i, v_j) - f(u_i, y)) dy$$

et donc

$$\max_{u_i} |\Theta_n(u_i)| \leq \varepsilon(b_2 - b_1)$$

Maintenant

$$\mathfrak{R}(f, \Delta_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})h(u_i) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\Theta_n(u_i)$$

Remarquer que la première somme à droite est une somme de Riemann pour la fonction h , et donc converge vers l'intégrale simple de h . Enfin

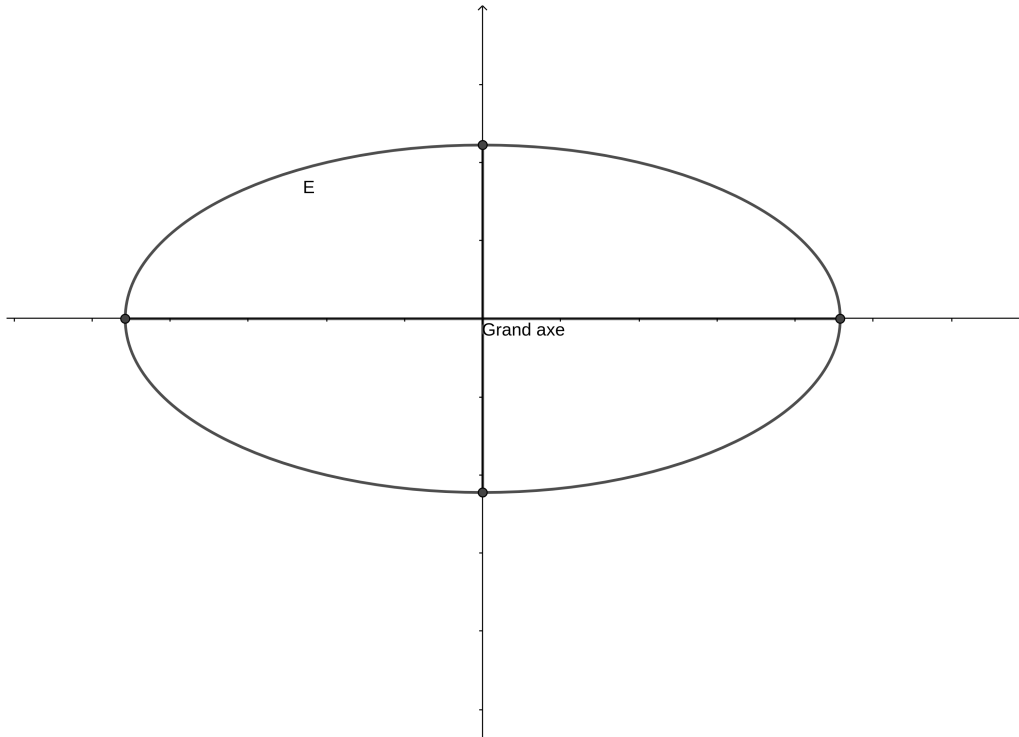
$$|\mathfrak{R}(f, \Delta_n) - \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})h(u_i)| \leq \varepsilon(b_2 - b_1)(a_2 - a_1)$$

Ceci montre que les deux sommes de Riemann tendent vers la même limite. ■

Le théorème de Fubini s'étend naturellement aux domaines simples. Nous omettrons la démonstration un peu technique. Donnons quelques exemples.

Exemple 3.3.1 Calculons l'aire d'une ellipse de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$. Soit

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$



En résolvant l'inégalité par rapport à y (par exemple) on obtient

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a \quad \text{et} \quad -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq \underbrace{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}_{\varphi(x)} \right\}$$

D'où

$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = \iint_{\mathcal{E}} dx dy = \int_{-a}^a \left(\int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)} dy \right) dx = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

Il suffit alors de faire le changement $x = a \cos t$ avec $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ pour avoir

$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2t)) dt = \pi ab.$$

Pour le cas particulier $a = b = r$ on retrouve l'aire du disque.

Exemple 3.3.2 Soit à calculer l'intégrale double $I = \iint_D \cos(xy) dx dy$ où D est le domaine défini par

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2 \quad 0 \leq xy \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

La résolution par rapport à y donne $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2x}$ et par le théorème de Fubini on aura

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\int_0^{\pi/2x} \cos(xy) \, dy \right) dx = \int_1^2 \left[\frac{\sin(xy)}{x} \right]_{y=0}^{y=\pi/2x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_1^2 = \ln 2. \end{aligned}$$

3.4 Changement de variables

La deuxième technique importante pour calculer une intégrale double est celle du changement de variables.

Définition 3.4.1 Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^2 . On appelle *difféomorphisme* (ou *changement de variables*) entre U et V une application

$$\begin{aligned} \Phi : U &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longrightarrow \Phi(u, v) = (x, y) \end{aligned}$$

de classe C^1 inversible, c'est-à-dire de jacobien non nul partout ($\det(J_\Phi) \neq 0$)

Rappelons que si $x = \varphi_1(u, v)$ et $y = \varphi_2(u, v)$ alors

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Le théorème suivant sera donné sans démonstration. Le lecteur intéressé pourra la trouver par exemple dans "Mathématiques, tout-en-un, niveau L2" sous la direction de J.P.Ramis et A.Warusfel, Édition DUNOD 2007.

Théorème 10 Soit $\Phi : U \longrightarrow V$ un changement de variables entre deux ouverts bornés et soit $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue bornée. Alors

$$\iint_V f(x, y) \, dx dy = \iint_U (f \circ \Phi)(u, v) |\det J_\Phi(u, v)| \, du dv$$

Le premier exemple que nous allons présenter montre la pertinence de procéder par changement de variables.

Exemple 3.4.2 Soit à calculer

$$I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dx dy$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ est le disque unité de \mathbb{R}^2 . Nous allons d'abord essayer d'utiliser le théorème de Fubini. Il est clair que $-1 \leq x \leq 1$ et $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, d'où (remarquer la parité en x et y)

$$I = \int_{-1}^1 \left[\frac{\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\sqrt{1+x^2}} \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Il n'est pas évident d'imaginer un changement simple (en une variable) pour calculer cette dernière intégrale. Procédons à présent par le changement en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

On a $J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ et donc $\det J = r$. C'est donc un changement entre les ouverts suivants

$$U = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < 1 \text{ et } 0 < \theta < 2\pi\}$$

et

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(x, 0) \mid 0 \leq x < 1\}$$

Remarquons que $\bar{V} = D$. De là on aura

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{1+r^2} dr d\theta = 2\pi \left[\frac{1}{2} \ln(1+r^2) \right]_0^1 = \pi \ln 2$$

Exemple 3.4.3 On se propose de calculer l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Considérons $I_R = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$. A l'aide du théorème de Fubini on peut écrire

$$I_R^2 = \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-R}^R e^{-y^2} dy \right) = \iint_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

où $Q_R = [-R, R] \times [-R, R]$. Posons $J_R = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ où D_R est le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon R . A l'aide du changement en coordonnées polaires on a

$$J_R = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[\frac{-1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = \pi (1 - e^{-R^2})$$

Maintenant il suffit de voir qu'on peut "coincer" le carré Q_R entre deux disques i.e., $D_R \subset Q_R \subset D_{R\sqrt{2}}$. La positivité de la fonction à intégrer implique que

$$J_R \leq I_R^2 \leq J_{R\sqrt{2}} \iff \pi (1 - e^{-R^2}) \leq I_R^2 \leq \pi (1 - e^{-2R^2})$$

Le résultat s'en déduit par passage à la limite quand $R \rightarrow +\infty$.

3.5 Le cas $n = 3$

L'intégrale triple (dans \mathbb{R}^3) se construit de la même façon que l'intégrale double. D'ailleurs on peut étendre la construction à \mathbb{R}^n . Nous omettrons donc la répétition. Par contre on donnera (sans démonstration) le théorème de Fubini et la formule de changement de variables. On finira par quelques exemples.

3.5.1 Théorème de Fubini

Les ensembles mesurables bornés simples se définissent de la même façon, par exemple

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \text{ et } \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}$$

(si on résout par rapport à z) où D est la projection du domaine A dans le plan $(\vec{o}\vec{x}, \vec{o}\vec{y})$. Cela permettra de réduire l'intégrale triple à d'abord une intégrale simple (en z), puis une intégrale double (en (x, y)). Si on résout d'abord en y (par exemple), on opère *mutatis-mutandis*.

Théorème 11 (de Fubini)

Soit A un domaine borné mesurable simple et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue bornée. Alors

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy$$

Exemple 3.5.2 Calculons le volume d'une boule sphérique de rayon R . Si on la centre en $(0, 0, 0)$ alors

$$\begin{aligned} B_R &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} = \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ et } -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \underbrace{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}_{\varphi(x, y)} \right\} \end{aligned}$$

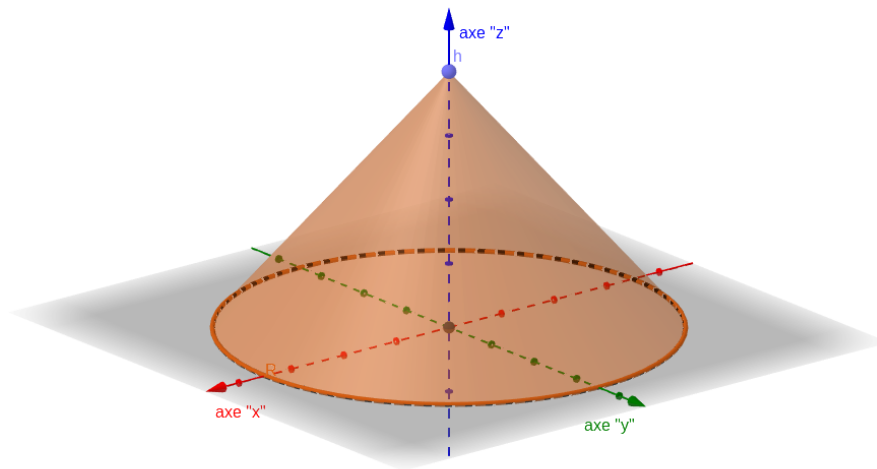
D'où

$$\text{Vol}(B_R) = \iiint_{B_R} dx dy dz = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \left(\int_{-\varphi(x, y)}^{\varphi(x, y)} dz \right) dx dy = 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \varphi(x, y) dx dy$$

En passant en coordonnées polaires on obtient

$$\text{Vol}(B_R) = 2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[\frac{-2}{3} (R^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Exemple 3.5.3 On se propose de calculer le volume d'un cône droit de base circulaire de rayon R et de hauteur h .



Pour trouver l'équation de la surface latérale du cône, il suffit de trouver l'équation d'une génératrice. C'est une droite passant par le point $(0, 0, h)$ et un point du cercle (dans le plan XY) de centre $(0, 0)$ et de rayon R . La droite est dans le plan passant par ces deux points et l'origine. La projection sur le plan XY d'un point de cette génératrice a pour coordonnées $(x, y, 0)$ avec $x^2 + y^2 = r^2 \leq R^2$. L'équation de la génératrice (dans le plan indiqué) est donc

$$z = h \left(1 - \frac{r}{R} \right) = h \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right)$$

Le volume cherché est donc celui du domaine donné par

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq h \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right) \right\}$$

Donc, par le théorème de Fubini

$$\text{Vol}(\mathcal{C}) = \iiint_{\mathcal{C}} dx dy dz = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} h \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right) dx dy$$

Et en passant en coordonnées polaires

$$\text{Vol}(\mathcal{C}) = h \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{r}{R} \right) r dr d\theta = 2\pi h \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R} \right]_0^R = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

3.5.4 Changement de variables

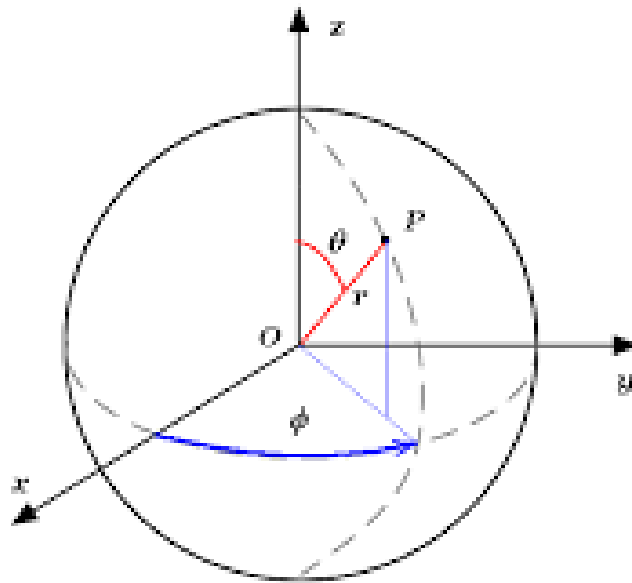
La formule de changement de variables est identique à celle du cas $n = 2$

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_U (f \circ \Phi)(u, v, w) |\det J_\Phi(u, v, w)| \, du dv dw$$

On donnera deux changements remarquables.

Coordonnées sphériques : ce sont les analogues en dimension 3 des coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



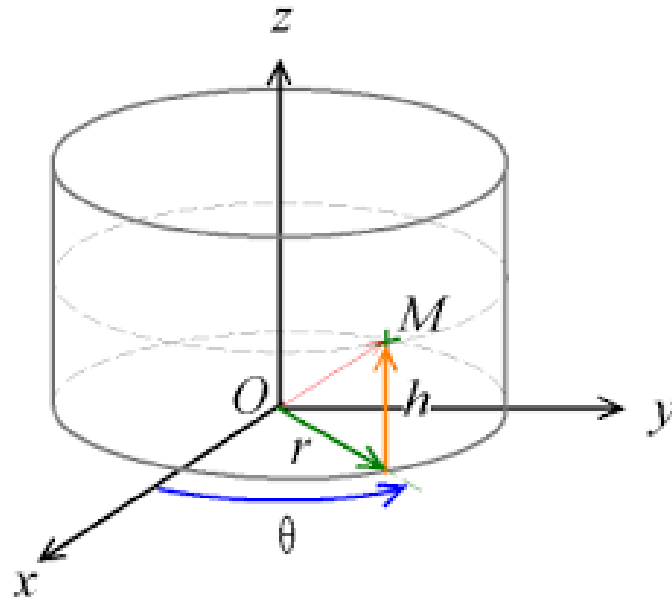
Pour décrire tout l'espace on doit prendre $r > 0$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi[$. La matrice jacobienne se calcule aisément

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

et $\det(J_\Phi) = r^2 \sin \theta$.

Coordonnées cylindriques : on fait opérer les coordonnées polaires sur XY et laisser z inchangé.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = h \end{cases}$$



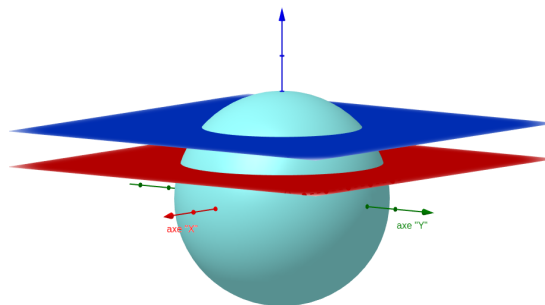
Pour décrire tout l'espace on doit prendre $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $h \in \mathbb{R}$. La matrice jacobienne se calcule facilement

$$J_{\Phi} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\det(J_{\Phi}) = r$.

La plupart du temps les changements de variables sont dictés par la géométrie du domaine d'intégration. Les invariances par certaines transformations (rotation, homothétie,...) peuvent aider à trouver le bon changement. On peut aussi combiner changement de variables et théorème de Fubini.

Exemple 3.5.5 *Calculons le volume d'une portion de boule sphérique de rayon R et délimitée par deux plans parallèles au plan XOY .*



Appelons K cette portion. Alors

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ et } a \leq z \leq b\}$$

où $-R \leq a < b \leq R$. Contrairement à ce qu'on pourrait penser, les coordonnées cylindriques sont les plus adaptées. En effet, la paramétrisation de K devient

$$K = \{(r, \theta, h) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 + h^2 \leq R^2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad a \leq h \leq b\}$$

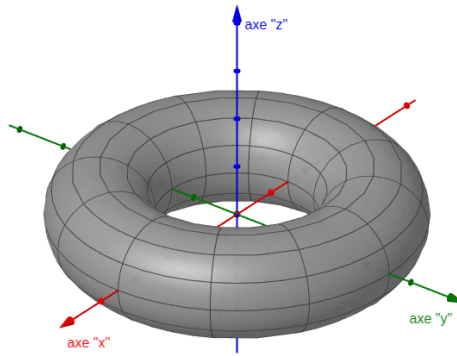
D'où

$$\text{Vol}(K) = \iint\limits_K dx dy dz = \iint\limits_K r dr d\theta dh = \int_0^{2\pi} \int_a^b \left(\int_0^{\sqrt{R^2-h^2}} r dr \right) d\theta dh$$

ou encore

$$\text{Vol}(K) = 2\pi \int_a^b \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{R^2-h^2}} dh = \pi \left[R^2 h - \frac{h^3}{3} \right]_a^b = \pi \left[R^2(b-a) - \frac{(b^3 - a^3)}{3} \right]$$

Nous terminons par le calcul du volume d'un *tore* (une "chambre à air"). Géométriquement on fait tourner un cercle de centre $(R, 0, 0)$ et de rayon $a < R$ situé dans le plan XOZ autour de l'axe OZ pour engendrer un tore \mathcal{T} .



Une paramétrisation est donnée par

$$\begin{cases} x = (R + r \cos u) \cos v \\ y = (R + r \cos u) \sin v \\ z = r \sin u \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq u, v < 2\pi \end{matrix}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est $\det(J) = r(R + r \cos u)$. Ainsi

$$\text{Vol}(\mathcal{T}) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos u) dr du dv = 2\pi^2 R a^2.$$