Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2019/2020.
Master1_EDP&Appli_S2

Théorie des éléments finis

- Eléments finis de Lagrange -

(Support de cours : Chapitre 2)

par Fethi ABI-AYAD
E-mail : fethi65@yahoo.com

Eléments finis de Lagrange

Référence de base : P.A. Raviart & J.M. Thomas
Introduction à l'analyse numérique des E.D.Ps
Edition Dunod (Masson)
A partir de page 79.

I - Introduction des Eléments finis de Lagrange et interpolation

On se donne une partie compacte K de $\mathbb{R}^n$, connexe et $\mathrm{Int}\,K \neq \emptyset$, un ensemble fini $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^{N}$ de N points distincts de K ; un espace vectoriel P de dimension finie et composé de fonctions définies sur K à valeurs réelles.

Définition 1 : On dit que l'ensemble Σ est P-unisolvant si et seulement si, étant donnés N scalaires réels quelconques α_j $1 \leq j \leq N$, $\exists$ une fonction p de l'espace P et une seule telle que $p(a_j) = \alpha_j$ $1 \leq j \leq N$.

Définition 2 : Lorsque Σ est P-unisolvant, le triplet (K, P, Σ) est appelé élément fini de Lagrange.

Donc étant donné un élément fini de Lagrange (K, P, Σ), il existe N fonctions uniques p_i de l'espace P telles que $p_i(a_j) = \delta_{i,j}$ $1 \leq j \leq N$, pour tout $i = 1, \dots, N$. ($\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $\exists$ une fction p_i unique de P t.q. $p_i(a_j) = \delta_{j\,i}$ pour $j = 1, \dots, N$ où $\delta_j = (\delta_{1j}, \delta_{2,j}, \dots, \delta_{j-1,j}, \delta_{jj}, \delta_{j+1,j}, \dots, \delta_{N,j}) = (0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0)$ avec $\delta_{j,i} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$)

Plus généralement, pour toute fonction v définie sur K à valeurs réelles, $\exists\, p \in P$ et une seule qui interpole v sur Σ, c.à d. p est telle que $p(a_j) = v(a_j)$ $1 \leq j \leq N$ $(\alpha_j = v(a_j),\ a_j \in \Sigma \subset K,\ j = \overline{1,N})$

Définition 3 : Etant donné un élément fini de Lagrange (K, P, Σ), on appelle fonctions de base les N fonctions p_i, $1 \leq i \leq N$ définies par : $p_i(a_j) = \delta_{i,j}$ où $p_i \in P$ pour $1 \leq i \leq N$ et $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^{N} = \{a_1, \dots, a_N\}$.

On appelle opérateur de P-interpolation de Lagrange sur Σ l'opérateur qui à toute fonction v définie sur K associe la fonction Πv définie par : $\Pi v = \sum_{i=1}^{N} v(a_i) p_i$. Πv s'appelle le P-interpolé de Lagrange de v sur Σ.

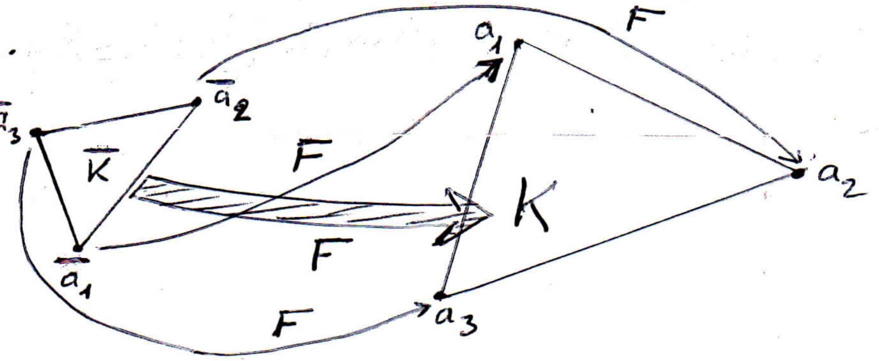
A titre d'exo, vérifier que la fction $\Pi v \in P$ et qu'elle interpole la fonction v sur $\Sigma = \{a_1, \dots, a_N\}$ c.à.d. $(\Pi v)(a_j) = v(a_j)$ $\forall j = \overline{1,N}$.
Πv est donc l'unique fonction p de P vérifiant $p(a_j) = v(a_j)$ $j = \overline{1,N}$.
Les fonctions p_i $(1 \leq i \leq N)$ sont dites des fonctions de forme (en anglais "shape functions") et forment une base pour l'espace P avec $\dim P = \operatorname{Card} \Sigma = N$.
A titre d'exercice, vérifier le, sachant que le nbre maximum de fonctions p_i t.q. $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ $(j = \overline{1,N})$ est N. Il suffira donc de montrer que les p_i $(i = \overline{1,N})$ forment un système libre dans P c.à.d.

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i p_i = 0_P \Longrightarrow \beta_i = 0 \quad \forall i = \overline{1,N}.$$

On peut prouver la P-unisolvance de Σ en explicitant les fctions de forme p_i $(1 \leq i \leq N)$. En effet, si ces fctions p_i existent, à toute donnée de N scalaires réels α_i $(1 \leq i \leq N)$, on associe la fction $p = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i$ et comme p est une combinaison linéaire unique des fonctions p_i $(1 \leq i \leq N)$, on a, par conséquent, une unique fction p de l'espace fonctionnel $P / p(a_j) = \alpha_j$ pour $j = \overline{1,N}$.

Soit $\overline{K}$ une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, connexe et t.q. $\operatorname{int} \overline{K} \neq \emptyset$. Soit F une application de $\overline{K}$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que $K = F(\overline{K})$ est une partie compacte, connexe et t.q $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ (Rem: Dès que F est une bijection bicontinue de $\overline{K}$ sur K, ces hypothèses sur K résultent de celles faites sur $\overline{K}$).

Théorème 1: On suppose l'application F bijective. Alors si $(\overline{K}, \overline{P}, \overline{\Sigma})$ est un élément fini de Lagrange, (K, P, Σ) où $K = F(\overline{K})$, où $P = \{p : K \to \mathbb{R} ;\ p \circ F \in \overline{P}\}$ et où $\Sigma = F(\overline{\Sigma})$ est un élément fini de Lagrange.



Preuve : $\mathbb{R}^n \supset \bar{K} \xrightarrow{F} K \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}$ $\quad p \in P$
$$\bar{p} = p \circ F \in \bar{P}$$

$$K \xrightarrow{F^{-1}} \bar{K} \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{\bar{p}} \mathbb{R}$$
$$p = \bar{p} \circ F^{-1} \in P$$

$(\bar{K}, \bar{P}, \bar{\Sigma})$ un élément fini de Lagrange
et $\bar{\Sigma} = \{\bar{a}_j\}_{j=1}^N$ est un ensemble de N points distincts de $\bar{K}$. On pose
$a_j = F(\bar{a}_j)$, $1 \leq j \leq N \iff \bar{a}_j = F^{-1}(a_j)$ $1 \leq j \leq N \Rightarrow \Sigma = \{a_j\}_{j=1}^N$
car $\Sigma = F(\bar{\Sigma}) = \{F(\bar{a}_j), a_j \in \bar{\Sigma}, 1 \leq j \leq N\}$.
F est bijection de $\bar{K}$ sur K alors $\mathrm{card}(\Sigma) = \mathrm{Card}(\bar{\Sigma}) = \dim(\bar{P})$

On pourra montrer aussi que $\dim(P) = N = \dim(\bar{P})$ quand on aura explicité une base de N fonctions de forme p_i $(1 \leq i \leq N)$ de l'espace P (ceci sera fait après avoir montré que Σ est P-unisolvant).

Pour montrer que Σ est P-unisolvant, il suffit donc d'exhiber les fonctions de base de P (relatives à (K, P, Σ)). On note d'abord par $\bar{p}_i$ $(1 \leq i \leq N)$ les fonctions de base de $\bar{P}$ (càd. relatives à l'élément fini de Lagrange $(\bar{K}, \bar{P}, \bar{\Sigma})$) et par F^{-1} l'application réciproque de la bijection F de $\bar{K}$ sur K. On pose alors
$$p_i := \bar{p}_i \circ F^{-1} \quad (1 \leq i \leq N) \qquad p_i : K \to \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, N.$$
On a : $p_i(a_j) = (\bar{p}_i \circ F^{-1})(F(\bar{a}_j)) = \bar{p}_i(F^{-1}(F(\bar{a}_j))) = \bar{p}_i(\bar{a}_j) = \delta_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq N)$
puisque $\{\bar{p}_i\}_{i=1}^N$ est une base de fonctions de forme de $\bar{P}$.

Rappel
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par ailleurs, $\{p_i\}_{i=1}^N$ forme une base pour l'espace P puisque :
$$\sum_{i=1}^N \alpha_i p_i = 0_P \Rightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i(x) = 0 \ \forall x \in K \Rightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i(a_j) = 0 \ \forall j = \overline{1,N} \ (\Sigma = \{a_j\}_1^N \subset K)$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{i,j} = 0 \ \forall j = \overline{1,N} \Rightarrow \alpha_j \delta_{j,j} = 0 \ \forall j = \overline{1,N} \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j = \overline{1,N} \ (\delta_{jj} = 1 \ \forall j = \overline{1,N})$$
Par conséquent, $\{p_i\}_{i=1}^N$ est bien une base de fctions de forme pour l'espace P, ce qui prouve, en effet, que (K, P, Σ) est bien un élément fini de Lagrange.

Définition 4 : Deux éléments finis de Lagrange $(\bar{K}, \bar{P}, \bar{\Sigma})$ et (K, P, Σ) sont dits équivalents s'il existe une bijection F de $\bar{K}$ sur K t.q. $P = \{p : K \to \mathbb{R};\ p \circ F \in \bar{P}\}$ et $\Sigma = F(\bar{\Sigma})$.
De plus si la bijection F est choisie affine inversible alors $(\bar{K}, \bar{P}, \bar{\Sigma})$ et (K, P, Σ) sont dits affine-équivalents.

Rappel : $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est affine-inversible s'il existe une matrice A $n\times n$ inversible et un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ t.q $F(x_1,\dots,x_n) = A(x_1,\dots,x_n)^T + b$.

Théorème 2 : Soient $(\overline{K}, \overline{P}, \overline{\Sigma})$ et (K, P, Σ) deux éléments finis de Lagrange équivalents. Soit F la bijection de $\overline{K}$ sur K assurant l'équivalence entre les deux éléments finis c.à d. t.q. $P = \{p : K \to \mathbb{R} ; p\circ F \in \overline{P}\}$ et $\Sigma = F(\overline{\Sigma})$. Alors si $\overline{\Pi}$ est l'opérateur de $\overline{P}$-interpolation sur $\overline{\Sigma}$, l'opérateur Π de P-interpolation sur Σ est caractérisé par :

$$(\Pi v)\circ F = \overline{\overline{\Pi}}(v\circ F) \quad \text{c.à d.} \quad \overline{\Pi v} = \overline{\overline{\Pi}}\,\overline{v}$$

pour toute fonction v définie sur K (où l'on a posé $\overline{v} = v\circ F$).

Preuve : On note $\overline{\Sigma} = \{\overline{a}_j\}_{j=1}^N$ et $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^N$ ~~de~~ de sorte que $a_j = F(\overline{a}_j)$ $(1\leq j \leq N)$. Le P-interpolé de Lagrange sur Σ d'une fonction v définie sur K s'exprime à l'aide des fonctions de base p_i de P dans (K, P, Σ) sous la forme :

$$\Pi v = \sum_{i=1}^N v(a_i) p_i .$$

Puisqu'on a vu que $a_i = F(\overline{a}_i)$ $(1\leq i\leq N)$ et $\overline{p}_i = p_i\circ F$ $(1\leq i \leq N)$

alors $(\Pi v)\circ F = \left(\sum_{i=1}^N v(a_i) p_i\right)\circ F = \left(\sum_{i=1}^N v(F(\overline{a}_i)) p_i\right)\circ F = \sum_{i=1}^N (v\circ F)(\overline{a}_i)(p_i\circ F)$

et donc $(\Pi v)\circ F = \sum_{i=1}^N (v\circ F)(\overline{a}_i)\,\overline{p}_i$

où les $\overline{p}_i$ sont, bien entendu, les fonctions de base de $\overline{P}$ ds $(\overline{K}, \overline{P}, \overline{\Sigma})$ et donc $(\Pi v)\circ F$ n'est autre que le $\overline{P}$-interpolé unique sur $\overline{\Sigma}$ de $v\circ F$. Par ailleurs, le $\overline{P}$-interpolé de $v\circ F$ s'écrit aussi à l'aide de l'opérateur de $\overline{P}$-interpolation de Lagrange sur $\overline{\Sigma}$ comme suit :

$$\overline{\overline{\Pi}}(v\circ F) = \sum_{i=1}^N (v\circ F)(\overline{a}_i)\cdot \overline{p}_i = (\Pi v)\circ F .$$

D'où $\overline{\Pi v} := (\Pi v)\circ F = \overline{\overline{\Pi}}(v\circ F) = \overline{\overline{\Pi}}\,\overline{v}$

(Ici, toute fonction définie sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$: $g : K \to \mathbb{R}$ lui correspond, via la bijection F, une fonction $\overline{g}$ définie sur $\overline{K}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que : $\overline{g} = g\circ F$ où $F : \overline{K} \to K$ et $\overline{g} : \overline{K} \xrightarrow{F} K \xrightarrow{g} \mathbb{R}$)

II - Eléments finis simpliciaux

Soit (K, P, Σ) un élément fini de Lagrange t.q. K est un n-simplexe quelconque de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$).

Définition : Un n-simplexe de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de $(n+1)$ points a_j de $\mathbb{R}^n$ non situés dans un même hyperplan de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire tels que si $a_j = (a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{nj})^T$ pour $j = 1, \dots, n+1$; les $a_{i,j}$ $(1 \leq i \leq n)$ constituant les coordonnées de a_j dans $\mathbb{R}^n$, alors la matrice carrée d'ordre $n+1$:

$$A_n = \begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & & a_n & a_{n+1} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

est inversible :

$a_j \in \mathbb{R}^n$ $(1 \leq j \leq n+1)$ non situés ~~ds~~ un même hyperplan de $\mathbb{R}^n$ $\Longleftrightarrow$ $\det A_n \neq 0$ (A_n inversible)

Dans ce cas le domaine géométrique K est appelé, précisément, n-simplexe de sommets a_j $(1 \leq j \leq n+1)$.

Exemples : Si $n = 1$, le 1-simplexe de sommets a_j $(j = 1, 2)$ est l'intervalle fermé borné $[a_1, a_2]$ avec $a_1 \neq a_2$ (les hyperplans ds $\mathbb{R}$ sont les singletons $\{a\}, a \in \mathbb{R}$)

Si $n = 2$, le 2-simplexe de sommets a_j $(j = 1, 2, 3)$ est le triangle non dégénéré (a_1, a_2, a_3) c.à.d. les 3 pts a_j ne sont pas situés sur une même droite (hyperplan ds $\mathbb{R}^2$)

Si $n = 3$, le 3-simplexe de sommets a_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ est le tétraèdre $(a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$ non dégénéré c.à.d. les 4 sommets a_1, a_2, a_3 et a_4 ne sont pas situés ds un même plan (hyperplan ds $\mathbb{R}^3$)

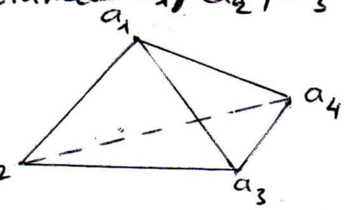


Figure ci-contre : le tétraèdre de $\mathbb{R}^3$ (3-simplexe) formé par 4 faces triangulaires, 6 arêtes (5 visibles et une cachée) et 4 sommets (visibles).

Tout point x de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées cartésiennes x_i $(i = \overline{1,n})$ peut être exprimé comme combinaison affine unique des points a_j, $j = \overline{1, n+1}$ constituant les sommets du n-simplexe K. Autrement dit on peut écrire

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) a_j \text{ avec } \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \text{ et } \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) a_{i,j} = x_i & 1 \leq i \leq n \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow A_n \underline{\lambda}(x) = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \text{ où } \underline{\lambda}(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))^T$$

et $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = (x_1, \dots, x_n, 1)^T$.

(écriture matricielle).

Les coefficients $\lambda_j(x)$ $(j = \overline{1, n+1})$ de la combinaison affine exprimant x sont des scalaires réels dépendant de x d'une façon unique : $\underline{\lambda}(x) = A_n^{-1} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$

Les scalaires $\lambda_j(x)$ $(1 \leq j \leq n+1)$ sont appelés les coordonnées barycentriques du point x par rapport aux $(n+1)$ sommets a_j $(j = \overline{1,n+1})$.

Comme, par définition, le n-simplexe K est l'enveloppe convexe des $n+1$ points a_j $(j=\overline{1,n+1})$: $K = CO(\{a_1, \dots, a_{n+1}\})$ (c'est aussi, par définition, l'intersection de tous les convexes contenant l'ens. fini $\{a_j\}_{j=1}^{n+1}$) et comme l'enveloppe convexe d'un ensemble quelconque A est, par définition, l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des éléments de A $(A \subset \mathbb{R}^n)$:

$$CO(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^n / \exists m \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \text{ avec } a_i \in A \; \forall i = \overline{1,m} \text{ et } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 ; \lambda_i \geq 0 \; \forall i = \overline{1,m}\right\}$$

alors on peut écrire le n-simplexe K de sommets a_j $(j = \overline{1,n+1})$ sous la forme $K = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j / \lambda_j \geq 0 \; \forall j = \overline{1,n+1} \text{ et } \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \right\}$

Comme $\begin{cases} \lambda_j \geq 0 \; \forall j = 1, \dots, n+1 \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \lambda_j \leq 1 \; \forall j = 1, \dots, n+1$ alors on peut écrire

aussi $K = \{x \in \mathbb{R}^n / 0 \leq \lambda_j(x) \leq 1 \; (1 \leq j \leq n+1)$ où $\lambda_j(x)$ $(1 \leq j \leq n+1)$ sont les coordonnées barycentriques de x par rapport aux sommets a_j du n-simplexe $K\}$.

<u>Remarque</u> : $x \in \mathbb{R}^n$ $x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) a_j$ avec $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1$ alors si $\lambda_j(x) \geq 0 \; \forall j = \overline{1,n+1}$ $\Rightarrow x \in K$.

Pour tout entier $k \geq 0$, on désigne par P_k l'espace des polynômes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq k$, c.à.d. de la forme :

$$x \in \mathbb{R}^n \quad p(x) = p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n \geq 0 \\ i_1 + i_2 + \dots + i_n = k}} \alpha_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

On montre que $\dim P_k = C_{n+k}^{k} = \frac{(n+k)!}{n!(n+k-k)!} = \frac{(n+k)!}{k!\,n!}$

<u>exemples</u> : Dans $\mathbb{R}^2$ $(\underline{n=2})$, on considère l'espace des polynômes de degré $\leq \underline{k=2}$:

$$P_2 = \{p : (x_1, x_2) \mapsto p(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_4 x_1 + \alpha_5 x_2 + \alpha_6 \; ; \alpha_i \in \mathbb{R} \; \forall i = \overline{1,6}\}$$

$$\mathcal{B}_{P_2} = \{1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2\} \Rightarrow \dim P_2 = 6 = \frac{(2+2)!}{2!\,2!} = \frac{4!}{4} = \frac{2 \times 3 \times 4}{4} = 2 \times 3 = 6$$

- Dans $\mathbb{R}^3$ $(n=3)$, on considère l'espace des polynômes de degré $\leq k=2$:

$$P_2 = \{p : (x_1, x_2, x_3) \mapsto p(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_1 x_2 + \alpha_5 x_1 x_3 + \alpha_6 x_2 x_3 + \alpha_7 x_1 + \alpha_8 x_2 + \alpha_9 x_3 + \alpha_{10} \; ; \alpha_i \in \mathbb{R} \; \forall i = 1, \dots, 10.\}$$

$$\mathcal{B}_{P_2} = \{1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3\} \Rightarrow \dim P_2 = \mathrm{Card}(\mathcal{B}_{P_2}) = 10$$

Cela correspond bien à $\dim P_2 = \frac{(3+2)!}{2!\,3!} = \frac{5!}{2 \times 2 \times 3} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{3 \times 4} = 2 \times 5 = 10.$

$\forall k \geq 1$, on définit le "treillis principal d'ordre k" du n-simplexe K de sommets a_j $(1 \leq j \leq n+1)$:

$$\Sigma_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ;\ \lambda_j(x) \in \left\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\right\}, 1 \leq j \leq n+1 \right\}$$

Dans Σ_k, les $\lambda_j(x)$ $(j = 1, \dots, n+1)$ sont les coordonnées barycentriques de x par rapport aux sommets a_j $(1 \leq j \leq n+1)$ de K. $\left(\sum_1^{n+1} \lambda_j(x) = 1\ \forall x \in \Sigma_k\right)$

$\Sigma_k \subset K$ car $\forall x \in \Sigma_k$ $\lambda_j(x) \in [0,1]$ $\forall j = \overline{1, n+1}$.

<u>Exemple</u> : Dans $\mathbb{R}^2$, le treillis principal d'ordre 1 est Σ_1 :

$\Sigma_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 ;\ \lambda_j(x) \in \{0, 1\}, 1 \leq j \leq 3 \right\}$. On rappelle que le 2-simplexe est, dans ce cas, le triangle non dégénéré de sommets a_1, a_2 et a_3 :

$K = (a_1, a_2, a_3)$ $\left(\text{dét } A_2 = \text{dét}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{dét}\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0 \right)$

$\forall x \in K\ \exists \{\lambda_j(x)\}_{j=1}^3 \subset [0,1] / x = \sum_{j=1}^3 \lambda_j(x) a_j$ et $\sum_{j=1}^3 \lambda_j(x) = 1$ $\left(0 \leq \lambda_j(x) \leq 1\ \forall j = \overline{1,3}\right)$

$\Sigma_1 \subset K \Rightarrow \forall a \in \Sigma_1\ \exists \{\lambda_j(a)\}_{j=1}^3 \subset \{0,1\} /\ a = \sum_{j=1}^3 \lambda_j(a) a_j$ avec $\sum_{j=1}^3 \lambda_j(a) = 1$

Cela veut dire que lorsque $a \in \Sigma_1$ les coordonnées barycentriques de a ne peuvent prendre que les 2 valeurs possibles : 0 ou 1 en gardant toujours à l'esprit que : $\lambda_1(a) + \lambda_2(a) + \lambda_3(a) = 1$. Voici donc toutes les possibilités des valeurs prises par les coordonnées barycentriques des points de Σ_1 :

<u>1ère possibilité</u> $\lambda_1(a) = 1$, $\lambda_2(a) = 0$ et $\lambda_3(a) = 1 - \lambda_1(a) - \lambda_2(a) = 1 - 1 - 0 = 0$

Donc $a = \sum_{j=1}^3 \lambda_j(a) a_j = \lambda_1(a) a_1 + \lambda_2(a) a_2 + \lambda_3(a) a_3 = 1.a_1 + 0a_2 + 0a_3 = a_1$

<u>2ème possibilité</u> : $\lambda_1(a) = 0$, $\lambda_2(a) = 1$ et $\lambda_3(a) = 1 - \lambda_1(a) - \lambda_2(a) = 1 - 0 - 1 = 0$

Donc $a = \sum_{j=1}^3 \lambda_j(a) a_j = \lambda_1(a) a_1 + \lambda_2(a) a_2 + \lambda_3(a) a_3 = 0.a_1 + 1.a_2 + 0a_3 = a_2$

<u>3ème possibilité</u> : $\lambda_1(a) = \lambda_2(a) = 0$ et $\lambda_3(a) = 1 - \lambda_1(a) - \lambda_2(a) = 1 - 0 - 0 = 1$

Donc $a = \sum_{j=1}^3 \lambda_j(a) a_j = \lambda_1(a) a_1 + \lambda_2(a) a_2 + \lambda_3(a) a_3 = 0.a_1 + 0a_2 + 1.a_3 = a_3$

<u>Conclusion</u> : $\Sigma_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ c.à.d. que dans $\mathbb{R}^2$, le treillis principal d'ordre 1 ne renferme que les sommets du 2-simplexe (triangle) K.

Lorsque $k = 0$, on pose par convention, $\Sigma_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_j(x) = \frac{1}{n+1}, 1 \leq j \leq n+1 \right\} = \{a_0\}$

où a_0 est le barycentre du n-simplexe K : $a_0 = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} a_j$ $\left(\text{on a bien } \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(a_0) = 1\right)$

On montre alors que $\text{Card}(\Sigma_k) = C_{n+k}^k = \frac{(n+k)!}{n!\,k!}$

(c.à.d. $\text{Card}(\Sigma_k) = \dim P_k$ où P_k est l'espace des polynômes de n variables de degré $\leq k$).

Théorème 3 : $\forall k \in \mathbb{N}$ Σ_k est P_k-unisolvant.

Esquisse de démonstration : $Card(\Sigma_k) = C_{n+k}^{k} = \frac{(n+k)!}{n!\,k!} = \dim P_k$

Il suffit donc d'expliciter les fonctions de base (forme) de P_k pour prouver la P_k-unisolvance de Σ_k et, par suite, montrer que (K, P_k, Σ_k) est un élément fini de Lagrange.

Lorsque $k=0$, la fction p_0 définie par $\forall x \in K$ $p_0(x) = 1$ est la fction de base de $P_0 = \mathbb{R}$ (espace des fonctions constantes). $Card(\Sigma_0) = 1 = \dim P_0$

On suppose, à présent, $k \geq 1$ et on rappelle que tout point a du treillis principal Σ_k s'écrit comme suit : $a = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(a)\, a_j$ où $\lambda_j(a) \in \{0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\}$ $\forall j = \overline{1, n+1}$.

c.à.d. $\exists m_j \in \{0, 1, 2, \dots, k\} / \lambda_j(a) = \frac{m_j}{k}$ $\forall j = \overline{1, n+1}$. On rappelle aussi que $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(a) = 1$

c.à.d. $\sum_{j=1}^{n+1} \frac{m_j}{k} = 1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n+1} m_j = k$. Si on pose alors $m = (m_1, \dots, m_n)$ $\left(m_{n+1} = k - \sum_{j=1}^{n} m_j\right)$ on peut affecter au point $a \in \Sigma_k$ le multi-indice m t.q. $a_m = \sum_{j=1} \frac{m_j}{k} a_j \in \Sigma_k$.

Donc tout point du treillis principal Σ_k s'écrit sous la forme :

$$a_m = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n+1} m_j\, a_j \quad \text{avec } m = (m_1, \dots, m_n) \quad m_j \in \{0, 1, \dots, k\} \ (j = \overline{1, n+1}) \text{ et } \sum_{j=1} m_j = k$$

(m est un vecteur de composantes entières ($m \in \mathbb{N}^n$) et est appelé multi-indice)

Au point a_m de Σ_k, on associe la fonction p_m définie par

$$p_m(x) = p_m(x_1, \dots, x_n) = \left[\prod_{j=1}^{n+1} (m_j!)\right]^{-1} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ m_j \geq 1}}^{n+1} \left[\prod_{i=0}^{m_j - 1} (k\, \lambda_j(x) - i)\right] \quad \text{avec } m = (m_1, \dots, m_n) \text{ et } m_{n+1} = k - \sum_{j=1}^{n} m_j$$

où les $\lambda_j : x \longmapsto \lambda_j(x)$ sont les fonctions coordonnées barycentriques par rapport aux sommets a_j $(1 \leq j \leq n+1)$. Les fonctions λ_i $(i = 1, \dots, n+1)$ sont affines : $\lambda_i(x) = b_{i,1} x_1 + b_{i,2} x_2 + \dots + b_{i,n} x_n + b_{i,n+1}$ pour $i = 1, \dots, n+1$.

où les $b_{i,j}$ $(j = \overline{1, n+1})$ sont les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice inversible $B_n = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1} = A_n^{-1} \left((\lambda_j(x))_{j=1}^{n+1} = B_n \binom{x}{1} = A_n^{-1} \binom{(x_i)_{i=1}^{n}}{1} \right)$. Comme $\deg \lambda_i = 1$ $\forall i = 1, \dots, n+1$, on montre aisément que $\deg p_m = k$ et les polynômes p_m sont bien des fonctions de P_k (A vérifier par les étudiants). Reste à montrer que les polynômes p_m constituent des fonctions de forme pour l'espace P_k (Si $\mathcal{B}_{P_k}$ désigne la base de fctions de forme de P_k alors $p_m \in \mathcal{B}_{P_k}$ et $Card(\mathcal{B}_{P_k}) = C_{n+k}^{k} = (n+k)!/n!\,k!$). Pour cela, il suffit de montrer que $p_m(a_m) = 1$ $\forall a_m \in \Sigma_k$ (facile) et $p_m(a_\ell) = 0$ $\forall a_\ell \in \Sigma_k$ t.q. $\ell \neq m$ (un peu délicat). On rappelle que ℓ et m sont des multi-indices c.à.d. $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$

où $l_j \in \{0,1,\dots,k\}$ et $\sum_{j=1}^{n+1} l_j = k$. De même $m=(m_1,\dots,m_n)$ où $m_j \in \{0,1,\dots,k\}$ et $m_{n+1} = k - \sum_{j=1}^{n} m_j$. Donc $l \neq m \iff \exists$ (au moins) $j_0 \in \{1,\dots,k\}$ t.q. $l_{j_0} \neq m_{j_0}$.

Ainsi, les fonctions polynômes p_m constituent une base pour P_k et il y a C_{n+k}^{k} de telles fonctions de forme. (K, P_k, Σ_k) est donc un élément fini de Lagrange. Sous ces conditions, on peut définir le triplet (K, P_k, Σ_k) comme étant un élément fini n-simplexe de type (k) (ou élément fini simplicial de type (k)) lorsque le compact K est un n-simplexe de $\mathbb{R}^n$ et Σ_k est le treillis principal d'ordre k $(k \geq 0)$ de K.

<u>Exercice</u>: Si $\{a_j\}_{j=1}^{n+1} \subset \mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des sommets du n-simplexe K alors montrer que $a_j \in \Sigma_k \ \forall j = 1,\dots,n+1$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

<u>Exemples</u> (détermination de la base de fctions de forme de P_k)

<u>exple 1</u>: $n=1$, $k=2$. Ds $\mathbb{R}$, le 1-simplexe est l'intervalle $[a_1, a_2]$ avec $a_1 \neq a_2$

$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ inversible car dét $A_1 = a_1 - a_2 \neq 0$. On détermine alors les coordonnées barycentriques de tout pt x de $\mathbb{R}$ par rapport aux sommets a_1 et a_2 en résolvant le système linéaire (sous forme matricielle) $\begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \end{pmatrix} = A_1^{-1} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

Tout calcul fait on trouve pour A_1^{-1}:

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1/(a_1-a_2) & -a_2/(a_1-a_2) \\ -1/(a_1-a_2) & a_1/(a_1-a_2) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1(x) = \dfrac{x}{a_1-a_2} - \dfrac{a_2}{a_1-a_2} = \dfrac{x-a_2}{a_1-a_2} \\ \lambda_2(x) = \dfrac{-x}{a_1-a_2} + \dfrac{a_1}{a_1-a_2} = \dfrac{-x+a_1}{a_1-a_2} \end{cases}$$

On détermine, à présent, le treillis principal d'ordre 2 $(k=2)$ ds $\mathbb{R}$ $(n=1)$:

$\Sigma_2 = \{a \in \mathbb{R} / \lambda_j(a) \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}, j = 1,2\}$. Ds ce cas $a = \lambda_1(a)a_1 + \lambda_2(a)a_2$
$= \frac{m_1}{2} a_1 + \frac{m_2}{2} a_2$

avec $m_j \in \{0,1,2\}$ $\forall j = 1,2$ et $\boxed{\sum_{j=1}^{2} m_j = 2}$

Le nbre de possibilités pour former 1 pt de Σ_2 est donc 3:

<u>1ère possibilité</u>: $m_1 = 2 \Rightarrow m_2 = 2 - m_1 = 2-2 = 0$. Donc $a = \frac{m_1}{2}a_1 + \frac{m_2}{2}a_2 = \frac{2}{2}a_1 = a_1$

<u>2nde possibilité</u>: $m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = 2 - m_1 = 2-0 = 2$. Donc $a = \frac{m_1}{2}a_1 + \frac{m_2}{2}a_2 = \frac{2}{2}a_2 = a_2$

<u>3ème possibilité</u>: $m_1 = 1 \Rightarrow m_2 = 2 - m_1 = 2-1 = 1$. Donc $a = \frac{m_1}{2}a_1 + \frac{m_2}{2}a_2 = \frac{1}{2}(a_1+a_2) = a_{1,2}$

D'où le treillis principal $\Sigma_2 = \{a_1, a_{1,2}, a_2\}$ où $a_{1,2}$ est le milieu de $[a_1, a_2]$.

On voit bien que $\mathrm{card}(\Sigma_2) = \dim P_2 = 3$ puisque, dans $\mathbb{R}$ $(n=1)$, P_2 est l'espace des polynômes (à une variable) de degré ≤ 2:

$P_2 = \{p : x \mapsto p(x) = ax^2 + bx + c \,;\, a,b,c \in \mathbb{R}\}$ $\mathcal{B}_{P_2} = \{1, x, x^2\}$ base canonique de P_2 et par suite $\dim P_2 = 3 \Rightarrow$ il y a 3 fonctions de forme de P_2, lesquelles ?

En effet, le multi-indice m est, ici, réduit à 1 seul indice $m = m_1$ et donc

- pour $\underset{(m_2=0)}{m_1=2}$ $p_{m_1}(x) = \prod_{j=1}^{2} (m_j!)^{-1} \prod_{\substack{j=1 \\ m_j \geq 1 \\ (m_j \neq 0)}}^{2} \left(\prod_{i=0}^{m_j-1} (2\lambda_j(x) - i) \right) = 2^{-1} \prod_{i=0}^{2-1} (2\lambda_1(x) - i) = \dots$ /...

Ici $m_1 = 2 \geq 1$ alors que $m_2 = 0$.

Donc $p_{m_1}(x) = p_2(x) = \frac{1}{2}(2\lambda_1(x))(2\lambda_1(x)-1) = \lambda_1(x)(2\lambda_1(x)-1)$.

• Pour $\underline{m_1=1}$ $(m_2=1)$ $p_{m_1}(x) = p_1(x) = \prod_{j=1}^{2}(m_j!)^{-1}\prod_{j=1}^{2}\left(\prod_{i=0}^{m_j-1}(2\lambda_j(x)-i)\right) = (2\lambda_1(x)-0)(2\lambda_2(x)-0)$

Ici $m_1=m_2 \geq 1$ $\quad m_j\geq 1$ $\quad$ Ici $m_1=1 \Rightarrow m_1-1=0$ et $m_2=1 \Rightarrow m_2-1=0$

Donc $p_1(x) = 4\lambda_1(x)\lambda_2(x)$

• Pour $\underline{m_1=0}$ $(m_2=2)$ $p_{m_1}(x) = p_0(x) = \prod_{j=1}^{2}(m_j!)^{-1}\prod_{\substack{j=1\\ m_j\geq 1\\ m_j\neq 0}}^{2}\left(\prod_{i=0}^{m_j-1}(2\lambda_j(x)-i)\right) = 2^{-1}\prod_{i=0}^{\overset{m_2}{2}-1}(2\lambda_2(x)-i)$.

Ici $m_2 = 2 \geq 1$ mais $m_1 = 0$

Donc, comme pour p_2, on a

$p_0(x) = \frac{1}{2}(2\lambda_2(x))(2\lambda_2(x)-1) = \lambda_2(x)(2\lambda_2(x)-1)$.

A titre d'exo, vérifier que $p_i(a_j) = \delta_{i,j}$ pour $1\leq i,j\leq 3$ où l'on a procédé à une renumérotation des pts du treillis principal Σ_2 et des fonctions de forme de P_2 :

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \leftarrow a_1 \\ a_2 \leftarrow a_2 \\ \frac{a_1+a_2}{2} = a_3 \leftarrow a_{1,2} \end{array}\right\}\text{pts de } \Sigma_2 \qquad \left.\begin{array}{l} p_1 \leftarrow p_2 \\ p_2 \leftarrow p_0 \\ p_3 \leftarrow p_1 \end{array}\right\}\text{fctions de forme de } P_2.$$

Ds ce cas, $p_1(x) = \lambda_1(x)(2\lambda_1(x)-1)$, $p_2(x) = \lambda_2(x)(2\lambda_2(x)-1)$ et $p_3(x) = 4\lambda_1(x)\lambda_2(x)$.

<u>exple 2</u> : $n=2$, $k=1$. Ds $\mathbb{R}^2$, le 2-simplexe est le triangle non dégénéré de sommets a_1, a_2 et a_3 (non situés sur une m̂ droite de $\mathbb{R}^2$) tels que la matrice

$$A_2 = \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{bmatrix}\right. & \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{bmatrix} & \left.\begin{bmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \end{bmatrix}\right) \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

soit inversible. ($\det A_2 \neq 0$)

Les coordonnées barycentriques de tout pt x de $\mathbb{R}^2$ par rapport aux 3 sommets a_1, a_2 et a_3 du 2-simplexe $K=(a_1,a_2,a_3)$ peuvent être déterminés en résolvant toujours le même système linéaire : $A_2(\lambda_1(x),\lambda_2(x),\lambda_3(x))^T = (x_1,x_2,1)^T$
$\Rightarrow (\lambda_1(x),\lambda_2(x),\lambda_3(x))^T = A_2^{-1}(x_1,x_2,1)^T$.

Dans $\mathbb{R}^2$, on a déjà déterminé le treillis principal d'ordre 1 (Voir page 7) : $\Sigma_1 = \{a_1,a_2,a_3\}$

$\mathrm{Card}(\Sigma_1) = 3 = \dim P_1$ où P_1 est l'espace des polynômes à 2 variables de degré ≤ 1 : $P_1 = \{p : (x_1,x_2)\mapsto p(x_1,x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 \quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\}$ $\mathcal{B}_{P_1} = \{1, x_1, x_2\}$ base canonique de P_1 et par suite $\dim P_1 = 3 \Rightarrow$ il y a donc 3 fonctions de forme de P_1 :

Le multi-indice est ici $m=(m_1,m_2)$ avec $m_1+m_2+m_3 = k = 1$ ($m_j\in\mathbb{N}$ $j=1,2,3$), on aura donc :

• pour $m_1 = 1$ $(\Rightarrow m_2=m_3=0)$ $p_{(m_1,m_2)}(x_1,x_2) = p_{(1,0)}(x_1,x_2) = \prod_{j=1}^{3}(m_j!)^{-1}\prod_{\substack{j=1\\ m_j\geq 1\\ (m_j\neq 0)}}^{3}\left(\prod_{i=0}^{m_j-1}(1.\lambda_j(x_1,x_2)-i)\right)$

Ici $m_1 \geq 1$ mais $m_2 = 0$ et $m_3 = 0$

Donc $p_{(1,0)}(x_1,x_2) = (1!)(0!)(0!)\prod_{i=0}^{1-1}(\lambda_1(x_1,x_2)-i) = \lambda_1(x_1,x_2) - 0$
$= \lambda_1(x_1,x_2)$

• pour $m_1=0$ (et $m_2=1 \Rightarrow m_3=0$) $p_{(m_1,m_2)}(x_1,x_2) = p_{(0,1)}(x_1,x_2) = (0!)(1!)(0!)\prod_{i=0}^{1-1}(\lambda_2(x_1,x_2)-i) = \lambda_2(x_1,x_2)$

• pour $m_1=m_2=0 \Rightarrow m_3=1$ $p_{(m_1,m_2)}(x_1,x_2) = p_{(0,0)}(x_1,x_2) = (0!)(0!)(1!)\prod_{i=0}^{1-1}(\lambda_3(x_1,x_2)-i) = \lambda_3(x_1,x_2)$

Après renumérotation des fonctions de forme, on pourra écrire :

$p_1(x_1,x_2) = p_{(1,0)}(x_1,x_2) = \lambda_1(x_1,x_2)$; $p_2(x_1,x_2) = p_{(0,1)}(x_1,x_2) = \lambda_2(x_1,x_2)$ et $p_3(x_1,x_2) = p_{(0,0)}(x_1,x_2) = \lambda_3(x_1,x_2)$

Après avoir déterminé les expressions explicites des coordonnées barycentriques $\lambda_j : (x_1, x_2) \longmapsto \lambda_j(x_1, x_2)$ pour $j = 1, 2, 3$, on pourra vérifier aisément que :

$p_i(a_j) = \delta_{i,j}$ pour $i, j = 1, 2, 3$ $\left(\forall i = 1, 2, 3 \;\; p_i(x_1, x_2) = \lambda_i(x_1, x_2)\right)$

Ainsi $\{p_i\}_{i=1}^{3}$ forme une base de fctions de forme pour P_1 lorsque $n = 2$.

<u>Exercice</u> : Lorsque $n = 2$ et $k = 2$, déterminer la base de fctions de <u>forme</u> de P_2 (l'espace des polynômes à 2 variables, de degré ≤ 2) après avoir explicité le treillis principal d'ordre 2 dans $\mathbb{R}^2$.

<u>Théorème 4</u> : $\forall k \in \mathbb{N}$, deux éléments finis n-simplexes de type (k) sont affine-équivalents.

<u>Preuve</u> : Soient $(\bar{K}, \bar{P}_k, \bar{\Sigma}_k)$ et (K, P_k, Σ_k) deux éléments finis n-simplexes de type (k) où : $\bar{K}$ = n-simplexe de sommets $\bar{a}_j$, $1 \leq j \leq n+1$
K = n-simplexe de sommets a_j, $1 \leq j \leq n+1$

On associe alors l'application F de $\mathbb{R}^n$ ds $\mathbb{R}^n$ entre $\bar{K}$ et K telle que à tout point $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées barycentriques $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{n+1}$ par rapport aux points $\bar{a}_j$, $1 \leq j \leq n+1$, fait correspondre le pt $x = F(\bar{x})$ de coordonnées barycentriques $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ par rapport aux points a_j $1 \leq j \leq n+1$ telle que $\lambda_j = \bar{\lambda}_j$ $1 \leq j \leq n+1$.

Soient $(\bar{a}_{ij})_{i=1}^{n}$ les coordonnées cartésiennes du sommet $\bar{a}_j$ de $\bar{K}$ et $\bar{A}$ la matrice inversible d'ordre $n+1$ correspondante :

$$\bar{A}_n = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1,1} & \bar{a}_{1,2} & \cdots & \bar{a}_{1,n+1} \\ \vdots & & & \\ \bar{a}_{n,1} & \bar{a}_{n,2} & \cdots & \bar{a}_{n,n+1} \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

. Alors F est l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui au point $\bar{x}$ de coordonnées cartésiennes $(\bar{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$ associe le point $x = F(\bar{x})$ de coordonnées cartésiennes $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ définies par

$$x \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_n \\ \bar{\lambda}_{n+1} \end{pmatrix} = A_n \bar{A}_n^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \bar{x} \quad \text{car } \bar{A}_n \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pose alors $B_n = A_n \bar{A}_n^{-1} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, ce qui permettra d'écrire, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = B_n \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n+1,1} & \cdots & b_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \bar{x}_j + b_{i,n+1} \quad 1 \leq i \leq n \right.$$

sous forme développée :

On en déduit alors, sous forme matricielle, le vecteur x en fonction de $\bar{x}$: .../...

$x = B_n' \bar{x} + b$ où $x = (x_i)_{i=1}^n$, $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i=1}^n$, $B_n' = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $b = (b_{i,n+1})_{i=1}^n$

D'où la transformation affine $F : \bar{x} \mapsto x = F(\bar{x}) = B_n' \bar{x} + b$. F est inversible car la sous-matrice B_n' de B_n est inversible (Voir définition de l'inversibilité d'une application affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ page 4 en haut : Rappel).

On vérifie alors que $K = F(\bar{K})$ et que $\Sigma_k = F(\bar{\Sigma}_k)$:

En effet, pour montrer que $K = F(\bar{K})$ il suffit de montrer la double inclusion $K \subseteq F(\bar{K})$ et se rappeler que le n-simplexe K a été caractérisé par l'ensemble $K = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ 0 \leq \lambda_j(x) \leq 1,\ 1 \leq j \leq n+1\}$ (Voir page 6). De même pour $\bar{K} = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ 0 \leq \bar{\lambda}_j(x) \leq 1,\ 1 \leq j \leq n+1\}$: On prend alors $\bar{s} \in \bar{K} \Rightarrow 0 \leq \bar{\lambda}_j(\bar{s}) \leq 1$ pour $j = 1, \dots, n+1$ et $s = F(\bar{s}) = B_n' \bar{s} + b \Rightarrow 0 \leq \lambda_j(s) = \bar{\lambda}_j(\bar{s}) \leq 1$ pour $j = \overline{1, n+1} \Rightarrow s \in K$. On en conclut alors que $F(\bar{K}) \subset K$. Inversement si $s \in K$ alors il existe $\exists \bar{s} \in \mathbb{R}^n / s = F(\bar{s}) = B_n' \bar{s} + b$ et $0 \leq \bar{\lambda}_j(\bar{s}) \leq 1$ car $0 \leq \lambda_j(s) \leq 1$ pour $j = \overline{1, n+1}$ et donc $\bar{s} \in \bar{K} \Rightarrow K \subset F(\bar{K})$. D'où le résultat $K = F(\bar{K})$.

La démonstration que $\Sigma_k = F(\bar{\Sigma}_k)$ est laissée aux étudiants.

Enfin, comme F est une bijection de $\bar{K}$ sur K, il est clair que P_k et $\bar{P}_k$ constituent le même espace sauf que P_k représente l'espace des polynômes de n variables, de degré $\leq k$ et définis sur K alors que $\bar{P}_k$ est l'espace des polynômes de n variables, de degré $\leq k$ mais définis sur $\bar{K}$. De plus, $\forall p \in P_k$, il existe un et un seul polynôme $\bar{p} \in \bar{P}_k / \bar{p} = p \circ F$ (changement de variables par rapport aux domaines de définition de p ($D_p = K$) et $\bar{p}$ ($D_{\bar{p}} = \bar{K}$)).

Ainsi, les deux éléments finis n-simplexes de type (k) sont affine-équivalents.

<u>Remarque</u> : Ce théorème et le théorème 1 (Voir page 2 en bas) permettent d'affirmer que tout élément fini affine-équivalent à un élément fini n-simplexe de type (k) est un n-simplexe de type (k). Il suffira donc d'étudier un élément fini n-simplexe de type (k) de <u>référence</u> (facile à étudier) et de transférer, ensuite, toutes les propriétés et tous les résultats qui en découlent par le biais de la transformation affine F. En pratique, on choisit, comme domaine n-simplexe de référence, le n-simplexe unité $\bar{K}$ de sommets $\bar{a}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, $\bar{a}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$, $\dots$, $\bar{a}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$ et $\bar{a}_{n+1} = (0, \dots, 0)^T$.

Dans ce cas, les coordonnées barycentriques de tout point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ par rapport à ces sommets sont : $\bar{\lambda}_i(\bar{x}) = \bar{x}_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et $\bar{\lambda}_{n+1}(\bar{x}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i$

En effet, la matrice $\bar{A}_n$ correspondant à ces sommets $(\bar{a}_j ; j = 1, \dots, n+1)$ s'écrit comme suit

$$\bar{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A}_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_{n+1}(\bar{x}) \end{bmatrix} = \bar{A}_n^{-1} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>c.q.f.d.</u>

Donc, en présence d'un élément fini de référence $(\overline{K}, \overline{P}_k, \overline{\Sigma}_k)$ facile à calculer et moyennant l'application affine-inversible F assurant l'équi-valence affine entre cet élément et un autre quelconque (K, P_k, Σ_k), il sera facile de déterminer la base de fctions de forme de ce dernier en utilisant la correspondance déjà vue : $p_i = \overline{p}_i \circ F^{-1}$ ($\{\overline{p}_i\}_{i=1}^{card(\overline{\Sigma}_k)}$ est la base de fonctions de forme de $\overline{P}_k$) où $F : \overline{K} \longrightarrow K$

$\Rightarrow F^{-1} : K \longrightarrow \overline{K}$ $\qquad\qquad \overline{x} \longmapsto x = F(\overline{x}) = B_n' \overline{x} + b$

$x \longmapsto \overline{x} = F^{-1}(x) = ?$ (A faire par les étudiants) $\boxed{B_n' \text{ 1ère sous matrice d'ordre } n \text{ de } B_n}$

On rappelle que $B_n = A_n \overline{A}_n^{-1}$ inversible. Ainsi, on aura déterminé la base de fonctions de forme $\{p_i\}_{i=1}^{card(\Sigma_k)}$ de P_k pour n'importe quel élément fini n-simplexe de type (k) affine-équivalent à $(\overline{K}, \overline{P}_k, \overline{\Sigma}_k)$ par le biais de la transfor-mation affine-inversible F.

Exemple $n=2$. Dans $\mathbb{R}^2$, le 2-simplexe K est le triangle de sommets a_1, a_2 et a_3 : $a_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $a_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Il existe alors une transformation affine $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $K = F(\overline{K})$ où $\overline{K}$ est le triangle de réfé-rence de sommets $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O_{\mathbb{R}^2}$ (l'origine de $\mathbb{R}^2$).

$A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. On montre alors que A_2 est inversible c.à.d. $\det A_2 \neq 0$ si les 3 sommets ne sont pas colinéaires.

$\overline{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\det \overline{A}_2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \overline{A}_2$ aussi inversible. On détermine alors $\overline{A}_2^{-1}$ par, par exple, la méthode de Gauss :

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & a' & b' & c' \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} a-c & b-c & c & a'-c' & b'-c' & c' \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Ainsi, $\overline{A}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B_2 = A_2 \overline{A}_2^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 & x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$F : \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \longmapsto F\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = B_2' \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} + b$ où $B_2' = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Ce qui permet d'écrire l'expression analytique de F : $x = F(\overline{x})$ c.à.d.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} (x_1 - x_3)\overline{x} + (x_2 - x_3)\overline{y} + x_3 = F_1(\overline{x}, \overline{y}) \\ (y_1 - y_3)\overline{x} + (y_2 - y_3)\overline{y} + y_3 = F_2(\overline{x}, \overline{y}) \end{cases} \quad \text{où } F(\overline{x}, \overline{y}) = (F_1(\overline{x}, \overline{y}), F_2(\overline{x}, \overline{y})).$$

Exercice : Ds $\mathbb{R}^3$ $(n=3)$, déterminer la transformation affine inversible de $\overline{K}$ ds K où $\overline{K}$ est le 3-simplexe de référence de $\mathbb{R}^3$ (à préciser) et K est le 3-simplexe de sommets a_j $(j = 1, \ldots, 4)$ à préciser aussi.