Université Abou berkBelkaid Tlemcen (2019/2020)
Faculté des sciences
Département de mathématiques (MI)
TD N°4
W.BENYELLES

1 Exercice N°1

Soit X une variable aléatoire (v.a.r) discréte finie, on définit P_X comme suit:

$$P_X(k) = k \cdot a \qquad pour\ tout\ k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

1. Déterminer "a" afin que P_X définisse bien une fonction de masse de la v.a.r X et ainsi sa loi.
2. Déterminer sa fonction de masse F_X.
3. Calculer les probabilités suivantes: $P(2 \leq X \prec 4)$, $P(X \geq 6)$
4. Calculer l'ésperance de X ainsi que son écart type.
5. On pose $Y = 1/X$, déterminer la loi de Y, calculer E(Y)
6. On pose $Z = X - 4$, déterminer la loi de Z, calculer E(Z)

2 Exercice N°2

On dit qu'une variable alératoire discrète (infinie) X suit une loi géomètrique de paramétre θ, $0 \prec \theta \prec 1$, si sa fonction de masse (sa loi) est donnée par:

$$P_X(k) = \theta\,(1-\theta)^{k-1}\,, pour\ tout\ k \in \mathbb{N}^*$$

1. Vérifier que P ainsi définie est bien une loi de probabilité.
2. Calculer en fonction de θ, la probabilité suivante: $P(X \geq 3)$.
3. calculer en fonction de θ, E(X) et V(X)

3 Exercice N°3

Soit X la variable aléatoire réelle (v a r) continue et soit f une fonction définie par :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lambda\,[1-\cos(2\pi x)]\cdot 1_{[0,1]} \\
&= \begin{cases} \lambda\,[1-\cos(2\pi x)] & si\ x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

1. Déterminer « λ » afin que la fonction f soit une fonction de densité.
2. Calculer l'espérance mathématique E(X)
3. Déterminer la fonction de répartition F, en déduire $P(X \geq 2/3)$.

4 Exercice N°4

Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet la densité :

$$f(x) = \alpha \cdot e^{-|x|} \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante}$$

1. Déterminer la constante α.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X, en déduire $P(X \geq -2)$,
   $P(-1 \leq x \leq 2)$
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer les moments d'ordre k. En déduire V(X).

5 Solutions

5.1 Solution exercice N 1

1. On a
$$P_X(k) = k \cdot a \qquad \textit{pour tout } k \in \{1,2,3,4,5,6\}$$
ou bien

k	1	2	3	4	5	6
$P_X(k) = P(X = k)$	a	2a	3a	4a	5a	6a

P_X une fonction de masse ssi $\begin{cases} P(X=k) \succ 0 & \forall k \\ \sum_{k=1}^{6} P(X=k) = 1 \end{cases}$

la 1 ère condition
$$\begin{aligned} P(X &= k) \succ 0 \Longrightarrow k \cdot a \succ 0 \; Or \; k \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ &\Longrightarrow a \succ 0 \end{aligned}$$

la 2éme condition
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{6} P(X &= k) = 1 \Longleftrightarrow a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a = 1 \\ &\Longrightarrow 21a = 1 \\ &\Longrightarrow a = \frac{1}{21} \; positif \; donc \; accepté \end{aligned}$$

P_X ainsi définie est bien une fonction de masse:

k	1	2	3	4	5	6
$P_X(k) = P(X = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

2. La fonction de répartition:
$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P_X(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) \end{aligned}$$

ainsi
$$F(x) = \begin{cases} 0 & si & x \prec x_1 \\ P_1 & si & x_1 \leq x \prec x_2 \\ P_1 + P_2 & si & x_2 \leq x \prec x_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 & si & x_3 \leq x \prec x_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & si & x \geq x_n \end{cases}$$

ceux qui jouent le role des x_i dans notre exercice ce sont les k, donc notre fonction sera:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \prec 1 \\ \frac{1}{21} & si \quad 1 \leq x \prec 2 \\ \frac{1}{21} + \frac{2}{21} & si \quad 2 \leq x \prec 3 \\ \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{3}{21} & si \quad 3 \leq x \prec 4 \\ \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{4}{21} & si \quad 4 \leq x \prec 5 \\ \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} & si \quad 5 \leq x \prec 6 \\ 1 & si \quad x \geq 6 \end{cases}$$

conclusion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \prec 1 \\ \frac{1}{21} & si \quad 1 \leq x \prec 2 \\ \frac{3}{21} & si \quad 2 \leq x \prec 3 \\ \frac{6}{21} & si \quad 3 \leq x \prec 4 \\ \frac{10}{21} & si \quad 4 \leq x \prec 5 \\ \frac{15}{21} & si \quad 5 \leq x \prec 6 \\ 1 & si \quad x \geq 6 \end{cases}$$

3. calculons $P(2 \leq X \prec 4)$, $P(X \geq 6)$, on sait que

$$P(A) = \sum_{k \in A} P(X = k)$$

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \prec 4) &= \sum_{k \in [2,4[} P(X = k) \\ &= P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{2}{21} + \frac{3}{21} \\ &= \frac{5}{21} \end{aligned}$$

$$P(X \geq 6) = \sum_{k \geq 6} P(X = k) = P(X = 6) = \frac{6}{21}$$

4. Calculons l'espérance et la variance de X:

k	1	2	3	4	5	6	$\sum$
$P_X(k) = P(X = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	1
$k \cdot P(X = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{25}{21}$	$\frac{36}{21}$	$\frac{91}{21}$
k^2	1	4	9	16	25	36	/
$k^2 \cdot P(X = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{27}{21}$	$\frac{64}{21}$	$\frac{125}{21}$	$\frac{216}{21}$	$\frac{441}{21}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_X(x_i) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot P_X(k) \\ &= \frac{1}{21} + ... + \frac{36}{21} \\ &= \frac{91}{21} = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

on a:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

calculons $E(X^2)$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P_X(x_i) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot P_X(k) \\
&= \frac{1}{21} + ... + \frac{216}{21} \\
&= \frac{441}{21} = 21
\end{aligned}$$

ainsi, la variance

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= 21 - \left[\frac{13}{3}\right]^2 \\
&= \frac{20}{9}
\end{aligned}$$

conclusion, l'écat type est:

$$\begin{aligned}
\sigma_X &= \sqrt{V(X)} \\
&= \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{\sqrt{20}}{3}
\end{aligned}$$

5. On pose $Y = 1/X = \varphi(X)$, détermiener la loi de Y (ie sa fonction de masse)

   Définissons son support $D_Y = \varphi(D_X) = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ on constate que Y définit bien une variable aléatoire discréte, selon proposition1 (vu en cours), sa fonction de masse P_Y sera:

k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$P_Y(k) = P(Y = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

   ainsi l'espérance de Y est facile à calculer

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot P_Y(y_i) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot P_Y(k) \\
&= \sum_{k=1}^{6} k \cdot P(Y = k) \\
&= \left(1 \cdot \frac{1}{21}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{21}\right) + ... + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{21}\right) \\
&= \frac{6}{21} = \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

Attention!

on remarque bien que $E(Y) \neq 1/E(X)$ donc

$$si\ Y = 1/X \ \nRightarrow E(Y) = 1/E(X)$$

6. On pose $Z = X - 4 = \varphi(Z)$, déterminer la loi de Z

   Définissons son support $D_Z = \varphi(D_X) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ on constate que Z définit bien une variable aléatoire discréte, selon proposition1 (vu en cours), sa fonction de masse P_Z sera:

k	-3	-2	-1	0	1	2
$P_Z(k) = P(Z = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

   Pour l'espérance de Z, on a deux méthodes

   méthode 1 (utilisant la linéarité de φ) et donc les propriètés de l'espérance (vu en cours) :

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X-4) = E(X) - 4 \\ &= \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   méthode 2 (utilisant la formule de l'espérance, vu qu'on a la fonction de masse)

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot P_Y(z_i) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot P_Z(k) \\ &= \sum_{k=1}^{6} k \cdot P(Z = k) \\ &= \left(-3 \cdot \frac{1}{21}\right) + \left(-2 \cdot \frac{2}{21}\right) + ... + \left(2 \cdot \frac{6}{21}\right) \\ &= \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

5.2 Solution exercice N 2

Dans cet exercice on utilisera un résultat bien connu en analyse sur la série géométrique et ses dérivées ainsi, on sait que, pour tout $|q| \prec 1$, on a:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}(1), \ \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}(2), \ \sum_{k=2}^{+\infty} k\,(k-1)\,q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}(3)$$

1. Pour que P soit une loi de probabilité ou une fonction de masse, il suffit qu'elle vérifie 2 conditions:

$$\begin{cases} P(X=k) \succ 0 & \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \sum_{k\geq 1} P(X=k) = 1 \end{cases}$$

1ère condition

$$0 \prec \theta \prec 1 \Longleftrightarrow 0 \prec 1-\theta \prec 1 \textit{ de plus } 0 \prec (1-\theta)^n \prec 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

conclusions $P_X(k) = \theta\,(1-\theta)^{k-1} \succ 0$ et ceci $\forall k \in \mathbb{N}^*$

2éme condition

$$\begin{aligned} \sum_{k\geq 1} P(X &= k) = \sum_{k\geq 1} \theta\,(1-\theta)^{k-1} \\ &= \theta \sum_{k\geq 1} (1-\theta)^{k-1} = \theta \sum_{n\geq 0} (q)^n \quad \textit{avec } q = 1-\theta \textit{ et } n = k-1 \\ &= \theta \frac{1}{1-q} = \theta \cdot \frac{1}{1-(1-\theta)} \textit{ en utilisant}(1) \\ &= 1 \;\; c.q.f.d \end{aligned}$$

2. Calculons $P(X \geq 3)$

$$\begin{aligned} P(X &\geq 2) = 1 - P(X \prec 3) \textit{ car } P(A) = 1 - P(\overline{A}) \\ &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - \sum_{k\leq 2} P(X=k) \\ &= 1 - [P(X=1) + P(X=2)] \\ &= 1 - \theta - \theta\,(1-\theta) \\ &= \theta^2 - 2\theta + 1 = (\theta-1)^2 \end{aligned}$$

3. l'espérance

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k\geq 1} k \cdot P_X(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \theta\,(1-\theta)^{k-1} \\ &= \theta \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot (1-\theta)^{k-1} \\ &= \theta \left[\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot (q)^{k-1}\right] \textit{ avec } q = 1-\theta \\ &= \theta \left[\frac{1}{[1-(1-\theta)]^2}\right] \textit{ en utilisant } (2) \\ &= \theta \left[\frac{1}{\theta^2}\right] \\ &= \frac{1}{\theta} \end{aligned}$$

La variance, on utilise un astuce déjà vu en cours, calculons d'abord E(X(X-1))

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{k\geq 1} k(k-1)\cdot P_X(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot(k-1)\cdot\theta(1-\theta)^{k-1} \\
&= \theta(1-\theta)\sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot(k-1)\cdot(1-\theta)^{k-2} \;\; \textit{on pose } q = 1-\theta \\
&= \theta(1-\theta)\sum_{k=2}^{+\infty} k\cdot(k-1)\cdot(q)^{k-2} \\
&= \theta(1-\theta)\frac{2}{[1-q]^3} \;\; \textit{en utilisant } (3) \\
&= \frac{2(1-\theta)}{\theta^2}
\end{aligned}$$

Or :

$$E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= E(X(X-1)) + E(X) \\
&= \frac{2(1-\theta)}{\theta^2} + \frac{1}{\theta} \\
&= \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}
\end{aligned}$$

conclusion

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta} - \left[\frac{1}{\theta}\right]^2 \\
&= \frac{1-\theta}{\theta^2} \;\; cqfd
\end{aligned}$$

5.3 Solution exercice N 3

1. Soit f telle que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lambda[1-\cos(2\pi x)]\cdot 1_{[0,1]} \\
&= \begin{cases} \lambda[1-\cos(2\pi x)] & si\ x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & si\ x \prec 0 \\ \lambda[1-\cos(2\pi x)] & si\ x \in [0,1] \\ 0 & si\ x \succ 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$f \quad \text{densité ssi} \begin{cases} f(x) \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

1ére condition:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \Longrightarrow \lambda\left[1-\cos(2\pi x)\right] \\ &\Longrightarrow \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

en effet $|\cos y| \leq 1$ *et ceci* $\forall y$ ainsi $(1 - cosy) \geq 0$ *et ceci* $\forall y$

2éme condition:

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx \\ &= \int\limits_{0}^{1} \lambda\left[1-\cos(2\pi x)\right] \ dx \\ &= \lambda\left[x - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]_0^1 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

donc

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \ \textit{positif donc accepté}$$

conclusion pour $\lambda = 1$, $f(x)$ est bien une fonction de densité.

2. l'espérance:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x \cdot f(x)\ dx + \int_{0}^{1} x \cdot f(x)\ dx + \int_{1}^{+\infty} x \cdot f(x)\ dx \\
&= \int_{0}^{1} x \cdot [1-\cos(2\pi x)]\ dx \quad car\ \lambda = 1 \\
&= \int_{0}^{1} x\ dx + \int_{0}^{1} x \cdot \cos(2\pi x)\ dx\ intégration\ par\ partie \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[x \cdot \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]_0^1 - \int_{0}^{1} \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(2\pi x)\ dx \\
&= \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{(2\pi)^2}\cos(2\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

3. La fonction de répartition:

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longmapsto F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt$$

<u>Si $x \prec 0$</u>

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt = 0$$

Si $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t).dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t).dt + \int_{0}^{x} f(t).dt \\ &= \int_{0}^{x} \left[1 - \cos(2\pi t)\right].dt \\ &= \left[t - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t)\right]_0^x \\ &= x - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x) \end{aligned}$$

Si $x \succ 1$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t).dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t).dt + \int_{0}^{1} f(t).dt + \int_{1}^{x} f(t).dt \\ &= \int_{0}^{1} f(t).dt \\ &= \int_{0}^{1} \left[1 - \cos(2\pi t)\right].dt = 1 \end{aligned}$$

conclusion:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \prec 0 \\ x - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x) & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si \quad x \succ 1 \end{cases}$$

En déduire la probabilité de l'événement

$$P(x \in [a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$
\begin{aligned}
P(X &\geq \frac{2}{3}) = P(x \in [\frac{2}{3}, +\infty[) \\
&= F_X(+\infty) - F_X(\frac{2}{3}) \\
&= \lim_{x \to +\infty} F_X(x) - F_X(\frac{2}{3}) \\
&= \lim_{x \to +\infty} 1 - \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2\pi} \sin(\frac{4}{3}\pi)\right] \\
&= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2\pi} \sin(\frac{4}{3}\pi) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi} \sin(\frac{4\pi}{3})
\end{aligned}
$$

remarque; on peut calculer cette probabilité en utilisant la fonction de densité:

$$P(x \in [a, b]) = \int_a^b f(x)\ dx$$

$$
\begin{aligned}
P(X &\geq \frac{2}{3}) = \int_{2/3}^{+\infty} f(x)\ dx \\
&= \int_{2/3}^{1} f(x)\ dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)\ dx \\
&= \int_{2/3}^{1} [1 - \cos(2\pi x)]\ dx \\
&= \left[x - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x)\right]_{2/3}^{1} \\
&= 1 - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi) - \frac{2}{3} + \frac{1}{2\pi} \sin(\frac{4}{3}\pi) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi} \sin(\frac{4}{3}\pi) \quad cqfd
\end{aligned}
$$

5.4 Solution exercice N°4

Soit la densité :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \alpha \cdot e^{-|x|} \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante} \\
&= \begin{cases} \alpha \cdot e^{-x} & si \quad x \geq 0 \\ \alpha \cdot e^{+x} & si \quad x \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

1. La constante α.

f est une densité donc on a: $\begin{cases} f(x) \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \Longrightarrow \alpha \cdot e^{-|x|} \geq 0 \\ &\Longrightarrow \alpha \geq 0 \;\; car \;\; e^y \geq 0, \; \forall y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= 1 \Longleftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha \cdot e^{-|x|} \; dx = 1 \\ &\Longleftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{0} \alpha \cdot e^{x} \; dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \alpha \cdot e^{-x} \; dx = 1 \\ &\Longleftrightarrow [\alpha \cdot e^{x}]_{-\infty}^{0} + \left[-\alpha \cdot e^{-x}\right]_{0}^{+\infty} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \left[\alpha \cdot e^{0} - 0\right] + \left[0 + \alpha \cdot e^{0}\right] = 1 \\ &\Longleftrightarrow 2\alpha = 1 \\ &\Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= 1 \Longleftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha \cdot e^{-|x|} \; dx = 1 \\ &\Longleftrightarrow 2\int\limits_{0}^{+\infty} \alpha \cdot e^{-x} \; dx = 1 \; car \; la \; fonction \; est \; paire \\ &\Longleftrightarrow 2\left[0 + \alpha \cdot e^{0}\right] = 1 \\ &\Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. La fonction de répartition F_X.

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto F_X(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t).dt \end{aligned}$$

<u>Si $x \leq 0$</u>

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int\limits_{-\infty}^{x} f(t).dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \alpha \cdot e^{t}.dt \\ &= \left[\alpha \cdot e^{t}\right]_{-\infty}^{x} = \alpha \cdot e^{x} \\ &= \frac{e^{x}}{2} \end{aligned}$$

Si $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t).dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(t).dt + \int_{0}^{x} f(t).dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \alpha \cdot e^{t}.dt + \int_{0}^{x} \alpha \cdot e^{-t}.dt \\
&= \left[\alpha \cdot e^{t}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\alpha \cdot e^{-t}\right]_{0}^{x} \\
&= \alpha + \left[-\alpha e^{-x} + \alpha\right] \quad Or\ \alpha = 1/2 \\
&= 1 - \frac{e^{-x}}{2}
\end{aligned}$$

conclusion

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{x}}{2} & si \quad x \leq 0 \\ 1 - \frac{e^{-x}}{2} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

calculons $P(X \geq -2)$, $P(-1 \leq x \leq 2)$

$$\begin{aligned}
P(X &\geq -2) = F_X(+\infty) - F_X(-2) \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{2}\right) - \frac{e^{-2}}{2} \\
&= 1 - \frac{e^{-2}}{2} \\
&=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(-1 &\leq x \leq 2) = F_X(2) - F_X(-1) \\
&= \left(1 - \frac{e^{-2}}{2}\right) - \frac{e^{-1}}{2} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(e^{-2} + e^{-1}\right)
\end{aligned}$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer les moments d'ordre k. En déduire V(X).
   Les moments d'ordre k $\left(ie\ E(X^k)\right)$

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)\ dx$$

Si $k = 2n+1$ $(ie\ k\ est\ impair, n \in \mathbb{N}^*)$

$$E(X^k) = E(X^{2n+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} \cdot f(x)\ dx = 0$$

car $x^{2n+1} \cdot f(x)$ sera une fonction impaire

Si $k = 2n$ $(ie\ k\ est\ pair, n \in \mathbb{N}^*)$

$$E(X^k) = E(X^{2n}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} \cdot f(x)\ dx = 2 \int_{0}^{+\infty} x^{2n} \cdot f(x)\ dx$$

car $x^{2n} \cdot f(x)$ sera une fonction paire

$$\begin{aligned}
E(X^{2n}) &= 2 \int_{0}^{+\infty} x^{2n} \cdot \alpha \cdot e^{-x}\ dx \quad Or \quad \alpha = 1/2 \\
&= \int_{0}^{+\infty} x^{2n} \cdot e^{-x}\ dx \ \ \textit{intégration par partie} \\
&= \left[-x^{2n} \cdot e^{-x}\ \right]_0^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} 2n \cdot x^{2n-1} \cdot e^{-x}\ dx \\
&= 2n \int_{0}^{+\infty} x^{2n-1} \cdot e^{-x}\ dx \ \ \textit{intégration par partie} \\
&= 2n \left[\left[-x^{2n-1} \cdot e^{-x}\ \right]_0^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} (2n-1) \cdot x^{2n-2} \cdot e^{-x}\ dx \right] \\
&= 2n \cdot (2n-1) \int_{0}^{+\infty} x^{2n-2} \cdot e^{-x}\ dx \\
&\ \ \vdots \\
&= (2n)! \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\ dx \\
&= (2n)!
\end{aligned}$$

conclusions le moment d'ordre 1 (ie l'espérance) et le moment d'ordre 2 sont

$$E(X) = 0, \qquad E(X^2) = 2! = 2$$

conclusion la variance est

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= 2 - [0]^2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

6 Exercices supplémentaires (à faire)

6.1 Exercice N°1

I] Dans chaque cas, vérifier si P_X est bien une fonction de masse et caluculer l'espérance:

1. La loi de la variable aléatoire X est donnée par:

$$P_X(-1) = \frac{3}{7}, \qquad P_X(1) = \frac{3}{7}, \qquad P_X(3) = \frac{1}{7}$$

2. La loi de la variable aléatoire Y est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P_Y(k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

3. La loi de probabilité d'une variable aléatoire Z définie sur le support $D_Z = \left\{3^k, k \in \mathbb{N}\right\}$ de plus

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P_Z(3^k) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

II] On pose $U = \varphi(X) = X^2$, déterminer la loi de U (X la v.a.r définie précedemment)

III] On pose $V = \varphi(Y) = 3Y - 1$, déterminer l'espérance de V sans calculer sa loi.

6.2 Exercice N°2

1. Déterminer le réel k tel que, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot |x| & si \quad x \in [-3, 1] \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases}$$

soit une densité de probabilité

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de densité f. Calculer :

   - $P(0 \leq x \leq 1), \quad P(-1 \leq x \leq 2)$
   - l'écart type

3. Déterminer sa fonction de répartition.