Mme BENYELLES WAFAA
(suite du cours MI)

Partie I
Analyse combinatoire

1 Introduction et définition

L'analyse combinatoire a pour but le dénombrement des dispositions que l'on peut former à l'aide des éléments d'un ensemble fini, dans cet ensemble on distingue deux genres d'éléments: *éléments identiques ou indiscernables* et des *éléments distincts ou discernables.*

Exemple:

une urne contient 4 boules blanches $\longrightarrow$ éléments identiques.
une urne contient 4 boules blanches numérotées de 1 à 4 $\longrightarrow$ éléments distincts (grace à la numérotation).

Cette disposition est une suite d'éléments mais là aussi on remarquera 4 types de dipositions:

1 *une disposition ordonnée*: dans ce cas l'ordre est important.

exemple: une urne qui contient 6 boules blanches numérotées de 1 à 6, on tire successivement 2 boules: le tirage $(1,4) \neq (4,1)$ ie tirer la boule numéro 1 puis la boule numéro 4 est different du tirage de la numéro 4 puis 1. donc $(a,b) \neq (b,a)$

2 *une disposition non ordonnée*: dans ce cas l'ordre ne joue aucun rôle.

exemple: si on tire simultanément les 2 boules: le tirage $(1,4) = (4,1)$ en d'autre terme $(a,b) = (b,a)$

3 *une disposition sans répétition*: dans ce cas un élément (dans notre cas un numéro) ne peut apparaitre qu'une seul fois

exemple: quand on fait un tirage de 2 boules, on obtiendra toujours (a,b) tel que $a \neq b$ donc (1,2) ou (2,4)...

4 *une disposition avec répétition*: dans ce cas un élément (dans notre cas un numéro) peut apparaitre plus d'une fois.

exemple: on effectue un tirage avec remise, ie on tire une boule, on note le numéro on la remet dans l'urne puis on fait un deuxième tirage. ainsi on pourra obtenir un tirage type (a,b) tel que $a = b$ donc (2,2) ou (3,3) sont des tirages possibles.

2 Principe fondamental de l'analyse combinatoire (PFAC)

Soit E un ensemble de k-uplets c'est a dire *des dispositions ordonnées* de k-éléments $(x_1, x_2, ..., x_k)$, on pose $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_k$ produit cartésien de ces ensembles tels que:
$card\ E\ =\ card\ E_1 \times card\ E_2 \times ... \times card\ E_k\ =\ n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$.([1])

si on a n_1 façons de choisir x_1.
.... n_2 façons de choisir x_2.
$\vdots$
.... n_k façons de choisir x_k
le nombre de façon de choisir le k-uplet $(x_1, x_2, ..., x_k)$ sera $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$.
Ce résulat est connu sous le nom du Principe Fondamentale de l'Analyse Combinatoire (PFAC).

Exemples

1) Combien de nombre peut-on former à partir de 3 chiffres ? (sachant qu'un nombre qui commence par "0" est un nombre a deux chiffres)

soit E_1 ([2]) l'ensemble des choix possible du 1ér chiffre $card\ E_1\ =\ 9$.
soit E_2 ([3]) l'ensemble des choix possible du 2ème chiffre $card\ E_2\ =\ 10$.
soit E_3 l'ensemble des choix possible du 3ème chiffre $card\ E_3\ =\ 10$.
or selon le PFAC on a: 9×10×10=900 façons d'obtenir un nombre a 3 chiffres.

2) Meme question, sauf que les 3 chiffres doivent etre obligatoirement differents.

pour le 1ér chiffre on aura 9 *possibilités*([4])
pour le 2ème chiffre on aura 9 *possibilités*([5])
pour le 3ème chiffre on aura 8 *possibilités*([6])
or selon le PFAC on a: 9×9×8=648 façons d'obtenir un nombre à 3 chiffres differents.

[1] card E= nombre des éléments de l'ensemble E
[2] On ne choisit pas le zéro donc l'ensemble des choix du premier chiffre est $E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ainsi $card\ E_1 = 9$
[3] l'ensemble des choix du deuxiéme chiffre est $E_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ donc $card\ E_2 = 10$
[4] on ne choisit pas le zéro
[5] on ne choisit pas le chiffre déjà sorti en E_1
[6] on ne choisit pas le chiffre déjà sorti en E_1 et en E_2

3) Meme question sauf que le nombre doit etre pair.

pour le 1ér chiffre on aura 9 $cas.$([7])
pour le 2ème chiffre on aura 10 $cas.$([8])
pour le 3ème chiffre on aura 5 $cas.$([9])
or selon le PFAC on a: 9×10×5=450 possibilités d'obtenir un nombre pair.

3 Les Permutations

3.1 Les permutations sans répétitions

Soit E un ensemble tel que $card\ E = n$, on appel une permutation sans de E, toute façon d'ordonner ces "n" éléments de E.

Le nombre de permutations sans répétition de ces "n" éléments est noté:

$$P_n = n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

Exemple De combien de façon peut-on asseoir 8 personnes sur 8 chaises?
$P_n = n! =\ 8! = 1 \times 2 \times \cdots \times 7 \times 8$
on peut vérifier ce résultat en utilisant le PFAC en effet:
on a 8 possibilités d'assoir la 1ére personne
on a 7 possibilités d'assoir la 2éme personne
on a 6 possibilités d'assoir la 3éme personne
$\vdots$
on a 1 possibilité d'assoir la 8éme personne
ainsi selon le PFAC on aura 8×7× ⋯ ×1=8!

3.2 Les permutations avec répétitions

Soit E un ensemble tel que $card\ E = n$, de plus E = $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_p$ avec E_i un sous-groupe de E, dont les éléments sont indiscernable, $n_i = card\ E_i$ $(1 \leq p \leq n)$ et $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$

Le nombre de permutations avec répétition de ces "n" éléments de E, est:

$$\widehat{P_n} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_p!}$$

[7] on ne choisit pas le zéro

[8] l'ensemble des choix du deuxiéme chiffre est $E_2 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ donc $card\ E_2 = 10$

[9] l'ensemble des choix du troisième chiffre (qui doit etre pair) est $E_3 = \{0,2,4,6,8\}$ donc $card\ E_3 = 5$

Exemples

1) Combien de mot peut-on former à partir des lettres du mot "papa" et "anticonstitutionnellement" (sans tenir compte du sens).?

pour "papa" on a: $\widehat{P_n} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{2!.3.4}{2!1.2} = 3 \times 2 = 6$ *possibilités*
pour "anticonstitutionnellement" on aura: $\widehat{P_n} = \frac{25!}{5!4!3!3!2!2!}$

2) On a 9 boules dont 3 rouges, 3blanches, 3jaunes, combien de permutation peut-on faire?

$\widehat{P_n} = \frac{9!}{3!3!3!} = \frac{3!4.5.6.7.8.9}{3!1.2.3.1.2.3} = 1680$

4 Les Arragements

4.1 Arrangement sans répétitions

Soit E un ensemble tel que $card\ E = n$, soit $p \leq n$, faire un arrangement sans répétition de "p" éléments de E c'est choisir "p" éléments parmi les "n" éléments de E et les ordonnées, ce nombre est noté par:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}, \qquad p \leq n$$

Exemples

1) De combien de façons peut-on assoir 4 personnes sur 8 chaises? $A_8^4 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{4!.5.6.7.8}{4!} = 1680$

2) Combien de mots de 3 lettres differentes (ie: sans répétitions) peut-on former en ignorant le sens ce dernier? $A_{26}^3 = \frac{26!}{(26-3)!} = \frac{23!.24.25.26}{23!} = 24 \times 25 \times 26 = 15600$.

Remarque Si $n = p$ l'arrangement sera une permutation sans répétition en effet $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n \qquad car\ 0! = 1$

4.2 Arrangement avec répétitions

Soit E un ensemble tel que $card\ E = n$, si dans l'arrangement précédent on permet qu'un ou plusieurs éléments puissent être répétés, on parlera alors d'arrangements avec répétition, ce nombre est défini par:

$$\widehat{A_n^p} = n^p, \quad avec \quad p \quad quelconque$$

Exemple on reprend l'arrangement précédent : Combien de mots de 3 lettres (ici les lettres peuvent etre les memes, ie: avec répétitions) peut-on former en ignorant le sens ce dernier? $\widehat{A_{26}^3} = 26^3$

5 Les Combinaisons

5.1 Les Combinaisons sans répétitions

Soit E un ensemble tel que $card\ E = n$, une combinaison sans répétition de "p" éléments de E est le choix de "p" éléments distincts dans un ordre quelconque, ce nombre est défini par:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\ (n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}\ , \qquad p \leq n$$

Exemple Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires; on tire simultanément 2 boules (donc l'ordre est facultatif).

1) Quel est le nombre de tirage possible? $C_7^2 = \frac{7!}{2!\ 5!} = \frac{5!6.7}{5!1.2} = 21$

2) De combien de façons peut-on tirée deux boules blanches? $C_4^2 = \frac{4!}{2!\ 2!} = \frac{2!3.4}{2!1.2} = 6$

3) De combien de façons peut-on tirée une boule blanche et une boule noire? $C_4^1 \times C_3^1 = 4 \times 3 = 12$

5.2 Les Combinaisons avec répétitions

Soit E un ensemble tel que $card\ E = n$, une combinaison avec répétition de "p" éléments de E est une disposition non ordonnée de ces "p" éléments qui ne sont pas forcement distincts (en d'autre termes ils peuvent éventuellement se répéter) avec un nombre "p" qui est quelconque. ce nombre de combinaison est défini par:

$$\widehat{C_n^p} = C_{n+p-1}^p\ , \qquad avec\ \ p\ \ quelconque$$

Exemple combien de combinaisons de mots de 2 lettres peut-on former a partir des lettres $\{a, b, c\}$ sans tenir compte du sens? sachant que l'ordre n'est pas important et qu'on peut répéter les lettres

$\widehat{C_3^2} = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$

6 Le Triangle de Pascal

Blaise Pascal fut amener à rassembler l'ensemble des nombres de combinaisons "C_n^p" sous forme d'un tableau particulièrement efficace, connu sous le nom du **Triangle de pascal.**

n ╲ p	0	1	2	3	4	....	p-1	p	...	n-1	n
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
$\vdots$											
n-1	1= C_{n-1}^0	C_{n-1}^1	C_{n-1}^2	C_{n-1}^3	C_{n-1}^4		C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p		$C_{n-1}^{n-1} = 1$	
n	1= C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4			C_n^p		C_n^{n-1}	$C_n^n = 1$

On désigne par C_n^p le nombre placé sur la n^{ième} position sur la p^{ième} colonne.

De ce triangle, on remarque quelques propriétés des combinaisons facilement démontrables

- $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = n$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- $C_{n-1}^{p-1} \ + \ C_{n-1}^p \ = \ C_n^p$

7 Le Binôme de Newton

Le binôme de Newton est simplement le produit de n facteurs égaux de (a+b) soit $(a+b)^n$. Le developpement de ce binôme se fait grace au triangle de Pascal ainsi on aura:

$$(a+b)^n \ = \ \sum_{p=0}^{n} C_n^p \ a^p \ b^{n-p}$$

une des conséquences les plus connues est: $2^n \ = \ \sum_{p=0}^{n} C_n^p$

Preuve: on a: $(a+b)^n \ = \ \sum_{p=0}^{n} C_n^p \ a^p \ b^{n-p}$

il suffit de prendre a=1 et b=1 et on aura $2^n \ = \ \sum_{p=0}^{n} C_n^p$. ■

La fiche de TD N^{0}3 sera prête dans une semaine et son corrigé sera posté une semaine après pour vous donnez le temps de la préparer