Exemple 1 (solution). Si $\omega \neq 0$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-a}^{+a} e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \frac{-1}{i\omega} e^{-i\omega x}\Big|_{-a}^{+a} = 2\,\frac{\sin a\omega}{\omega}$$

Si $\omega = 0$, $\hat{f}(0) = \int_{-a}^{+a} dx = 2a$

Remarquons que $\lim\limits_{\omega \to 0} \hat{f}(\omega) = 2a \lim\limits_{\omega \to 0} \dfrac{\sin a\omega}{a\omega} = 2a$

ainsi $\hat{f}(\omega)$ est continue partout, et on peut écrire que

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\sin a\omega}{\omega} & \text{si } \omega \neq 0 \\ 2a & \text{si } \omega = 0 \end{cases}$$

Exemple 2 (solution).

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, e^{-i\omega x}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x(1+i\omega)}\, dx$$

$$= \frac{-1}{1+i\omega} e^{-x} e^{-i\omega x}\Big|_0^{+\infty}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} |e^{-x} e^{-i\omega x}| = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, on aura

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega} = \frac{1-i\omega}{1+\omega^2} \in \mathbb{C}$$