# Chapitre IV– Diagnostics des distributions d'électrons non-Maxwelliennes dans un plasma chaud

## I- Existence d'électrons suprathermiques (ou non-thermiques)

Souvent dans des plasmas naturels et produits en laboratoire, les électrons libres ne suivent pas une distribution d'énergie de Maxwell caractérisée par une température cinétique $T_e$.
Il se produit des déviations à la distribution de Maxwell au niveau de la queue haute énergie, liées à la formation d'une population relativement faible (quelques pourcents) d'électrons énergétiques dits suprathermiques.

Plusieurs mécanismes sont à l'origine de la formation de tels électrons suprathermiques, parmi lesquels on peut citer :

- accélération par des champs électriques (par exemple dans les plasmas de tokamak),
- présence de forts gradients de température (par exemple la région de transition solaire),
- instabilités paramétriques ou instabilités MHD (cas des plasmas produits par laser),
- ondes de choc.

L'impact des électrons suprathermiques dans un plasma peut être importante dans :

- bilan d'énergie,
- transport de chaleur,
- instabilités,
- confinement,
- équilibre d'ionisation,
- spectre d'émission de raies ou continue.

On cherche à connaître la distribution d'énergie des électrons suprathermiques présents dans un plasma en se basant sur les émissivités relatives de deux raies produites à partir d'un même ion fortement chargé contenu dans le plasma.

Deux cas sont à considérer :

- Electrons suprathermiques avec une distribution de vitesses isotrope.

  On cherche à connaître leur distribution d'énergie

- Electrons suprathermiques avec une distribution de vitesses anisotrope.

  On cherche leur distribution d'énergie et leur distribution angulaire.

## II- Distributions d'énergie non-Maxwelliennes

Plusieurs types de distributions d'énergie non-Maxwellienne sont habituellement utilisés pour décrire la cinétique des électrons libres dans des plasmas chauds.

(i) Distribution bi-Maxwellienne caractérisée par deux paramètres $T_1$ et $T_2$

$$f(E) = (1-R)\, f_{T_1}(E) + R\, f_{T_2}(E) \qquad \text{avec} \qquad f_T(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} \sqrt{E}\, \exp\left(-E/(kT)\right)$$

où $T_1 < T_2$, $T_1$ étant la température associée aux électrons thermiques et $T_2$ celle associée aux électrons suprathermiques (électrons dits chauds), et $R$ représente la fraction d'électrons suprathermiques (quelques %). La fonction $f(E)$ vérifie la relation de normalisation :

$$\int_0^{\infty} f(E)\, dE = 1$$

Remarque : on rappelle que la distribution de vitesses de Maxwell est donnée par :

$$f_T(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-m v^2/(2kT)\right)$$

On peut déduire $f_T(E)$ à partir de $f_T(v)$ en utilisant la relation : $f_T(v)dv = f_T(E)dE$

avec $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ et $dv = \frac{dE}{\sqrt{2mE}}$.

(ii) Distribution en loi de puissance (power-law) caractérisée par deux paramètres $E_1$ (cut-off) et $\gamma$ (exposant > 1)

$$f(E) = (1-R)\, f_T(E) + R\, f_{\mathrm{PL}}(E)$$

avec $f_{\mathrm{PL}}(E) = \begin{cases} C\, E^{-\gamma} & \text{pour } E \geq E_1 \\ 0 & \text{pour } E < E_1 \end{cases}$ , $C$ étant une constante de normalisation.

Pour obtenir la constante $C$, on utilise :

$$\int_{E_1}^{\infty} f_{\mathrm{PL}}(E)\, dE = 1 \;\Rightarrow\; C \left.\frac{E^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right|_{E_1}^{\infty} = 1 \qquad \text{soit} \quad C = (\gamma - 1)\, E_1^{\gamma-1}$$

Donc $f_{\mathrm{PL}}(E) = (\gamma-1)\, E_1^{\gamma-1}\, E^{-\gamma}$ pour $E \geq E_1$

(iii) Distribution Gaussienne caractérisée par deux paramètres $E_0$ (centre) et $\Gamma$ (largeur)

$$f(E) = (1-R)\, f_T(E) + R\, f_{\mathrm{G}}(E)$$

avec $f_{\mathrm{G}}(E) = g\sqrt{E}\, \exp\left(-(E-E_0)^2/(2\Gamma^2)\right)$, $g$ étant une constante de normalisation.

(iv) Distribution monénergétique caractérisée par le paramètre $E_0$ (énergie)

$$f(E) = (1-R)\, f_T(E) + R\, f_{\mathrm{ME}}(E)$$

avec $f_{\mathrm{ME}}(E) = \delta(E - E_0)$

## III- Diagnostics de distribution des électrons suprathermiques

### 1°) Principe de base

Il s'agit de sélectionner deux raies notées *a* et *b* produites toutes les deux à partir d'un même ion par différentes régions de la distribution d'énergie des électrons.

• Comme raie *a*, il est adéquat de prendre une raie satellite de recombinaison diélectronique qui est formée par des électrons d'énergie bien déterminée relativement basse.

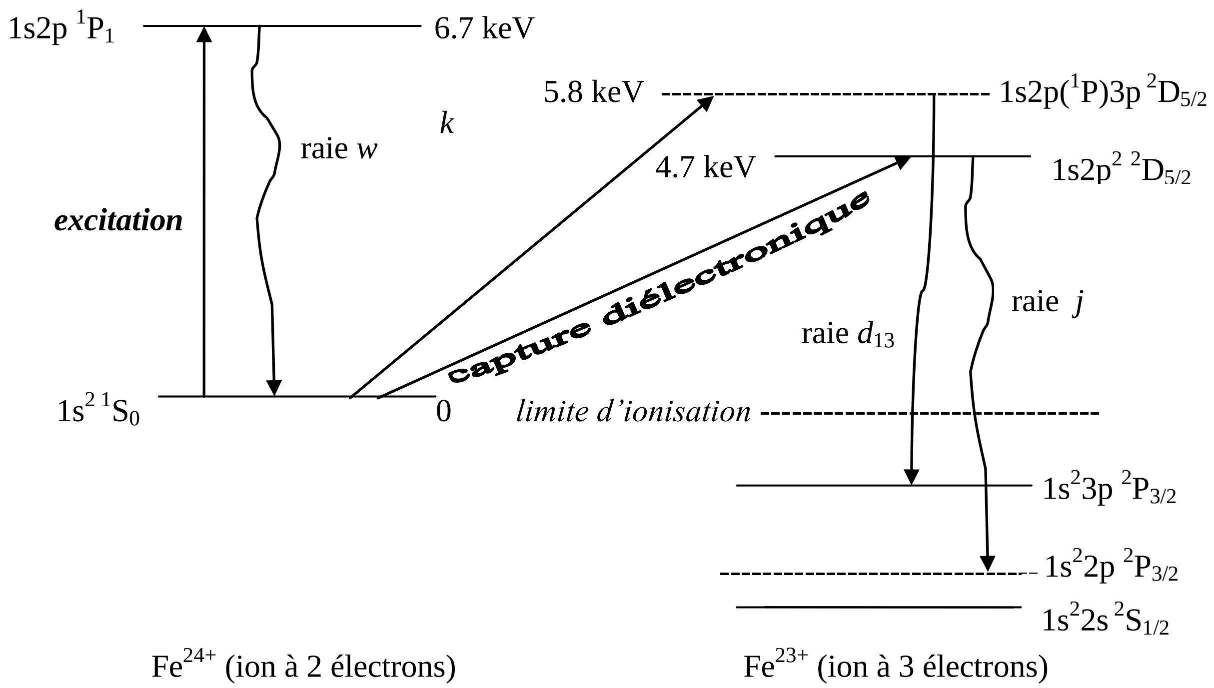
Par exemple :
Raie dénommée *j* ($n = 2$) vue au chapitre précédent : $1s2p^2\,{}^2D_{5/2} \rightarrow 1s^2 2p\,{}^2P_{3/2}$
Raie dénommée *k* ($n = 2$) : $1s2p^2\,{}^2D_{3/2} \rightarrow 1s^2 2p\,{}^2P_{1/2}$
Raie dénommée $d_{13}$ ($n = 3$) : $1s2p({}^1P)3p\,{}^2D_{5/2} \rightarrow 1s^2 3p\,{}^2P_{3/2}$
Pour l'élément fer, la raie satellite *j* implique des électrons d'énergie autour de 4.7 keV, alors que la raie $d_{13}$ est produite par des électrons d'énergie autour de 5.8 keV. Pour l'élément calcium, la raie *k* est due aux électrons d'énergie autour de 2.7 keV.

• Comme raie *b*, on peut choisir la raie de résonance parente qui est produite par collisions d'électrons de hautes énergies car la force de collision associée à cette transition est une fonction croissante de l'énergie de l'électron.

Par exemple :
Raie dénommée *w* vue au chapitre précédent : $1s2p\,{}^1P_1 \rightarrow 1s^2\,{}^1S_0$
Pour le fer, la raie *w* est produite par des électrons d'énergie supérieure à 6.7 keV ou 493 Ry.
On donne dans le tableau ci-dessous les valeurs de la force de collision $\Omega$ pour l'excitation $1s^2\,{}^1S_0 \rightarrow 1s2p\,{}^1P_1$ de l'ion de fer $Fe^{24+}$ pour différentes énergies *E* de l'électron de collision exprimées en Ry (1 Ry = 13.605 eV) :

| *E* (Ry) | 495 | 550 | 700 | 900 | 1200 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Omega$ | $2.10\times10^{-3}$ | $2.52\times10^{-3}$ | $3.58\times10^{-3}$ | $4.82\times10^{-3}$ | $6.40\times10^{-3}$ |

| *E* (Ry) | 2000 | 5000 | 7000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|
| $\Omega$ | $9.55\times10^{-3}$ | $1.67\times10^{-2}$ | $1.84\times10^{-2}$ | $2.02\times10^{-2}$ |




La présence d'électrons suprathermiques dans un plasma conduit à une augmentation de l'émissivité de la raie $w$, mais n'a presque aucun effet sur les raies satellites diélectroniques $j$ ou $d_{13}$.

$\Rightarrow$ le rapport des émissivités $j/w$ ou $d_{13}/w$ est sensible à la queue haute énergie de la distribution d'électrons.

## 2°) Emissivité d'une raie satellite diélectronique

Rappel du processus de recombinaison diélectronique :

$$X^{z+}(i) + e^- \rightarrow X^{(z-1)+}(j) \qquad \text{: capture diélectronique}$$

$$X^{(z-1)+}(j) \rightarrow X^{(z-1)+}(f) + h\nu \qquad \text{: stabilisation radiative}$$

L'émissivité de la raie satellite $j \rightarrow f$ est donnée, dans le cas d'un plasma peu dense, par la relation :

$$\epsilon_{jf} = h\nu_{jf}\, n_e\, N_i\, C_{\mathrm{cd}}(i \rightarrow j)\, \frac{A^r_{jf}}{\sum_k A^a_{jk} + \sum_l A^r_{jl}}$$

où $\sum_k A^a_{jk} + \sum_l A^r_{jl}$ représente le taux total de déclin du niveau $j$ par autoionisation et émission radiative spontanée, $N_i$ est la densité des ions $X^{z+}$ dans le niveau fondamental $i$, $n_e$ la densité des électrons, $A^r_{jf}$ la probabilité de transition radiative de $j$ vers $f$, et $C_{\mathrm{cd}}(i \rightarrow j)$ le coefficient de taux de capture diélectronique du niveau $i$ vers le niveau autoionisant $j$. Pour une distribution d'énergie arbitraire $F(\varepsilon_i)$ des électrons, $C_{cd}(i \rightarrow j)$ est donné par (voir Chapitre I) :

$$C_{\mathrm{cd}}(i \rightarrow j) = \frac{g_j}{2\, g_i} \frac{\sqrt{2}\, \pi^2\, \hbar^3}{m^{3/2}} \frac{\mathrm{F}(\varepsilon_i)}{\sqrt{\varepsilon_i}} A_{ji}^a$$

avec $\varepsilon_i = E_j - E_i$ est l'énergie cinétique de l'électron capturé, $g_j$ et $g_i$ sont les poids statistiques des niveaux $j$ et $i$, et $A_{ji}^a$ est la probabilité d'autoionisation de $j$ vers $i$.

Compte tenu des énergies $\varepsilon_i$ relativement petites, on peut supposer avec une bonne approximation que seuls les électrons thermiques (Maxwelliens) contribuent à l'émission de la raie satellite $j \rightarrow f$, ce qui permet d'écrire :

$$C_{\mathrm{cd}}(i \rightarrow j) = 2.071 \times 10^{-16} \frac{g_j}{g_i}\, T^{-3/2} \exp(-\varepsilon_i/kT)\, A_{ji}^a$$

où $C_{\mathrm{cd}}(i \rightarrow j)$ est exprimé en $\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$, $A_{ji}^a$ en $\mathrm{s}^{-1}$ et $T$ en K.

L'émissivité de la raie satellite $j \rightarrow f$ devient :

$$\epsilon_{jf} = h\nu_{jf}\ n_e\, N_i\, F_1(T)\, F_2^{jf}$$

où $F_2^{jf}$ est le facteur atomique de la raie $j \rightarrow f$ exprimé en unité de $\mathrm{s}^{-1}$ et qui dépend de paramètres atomiques par :

$$F_2^{jf} = \frac{g_j}{g_i} \frac{A_{ji}^a\, A_{jf}^r}{\sum_k A_{jk}^a + \sum_l A_{jl}^r}$$

et $F_1(T)$ est un facteur dépendant de la température exprimé en unité de $\mathrm{cm}^3$, et il est donné par la relation suivante :

$$F_1(T) = 2.071 \times 10^{-16}\, T^{-3/2}\, \exp(-\varepsilon_i/kT)$$

## 3°) Emissivité de la raie de résonance parente

L'émissivité de la raie de résonance parente due à la transition du niveau $r$ vers le niveau $i$ est donnée par la relation suivante :

$$\epsilon_{ri} = h\nu_{ri}\, n_e\, N_i \frac{C(i \rightarrow r)}{A_{ri}^r + Q_r^d} A_{ri}^r$$

où $C(i \rightarrow r)$ est le coefficient de taux d'excitation collisionnelle du niveau $i$ vers $r$ et $Q_r^d$ représente le taux de désexcitation collisionnelle à partir du niveau $r$. En écrivant l'équation ci-dessus, on a supposé que le niveau supérieur $r$ de la raie est peuplé principalement par excitation collisionnelle directe à partir du niveau $i$.

Pour un plasma peu ou moyennement dense, $i$ correspond au niveau fondamental et on a $A_{ri}^{r} \gg Q_{r}^{d}$. Il en résulte que :

$$\epsilon_{ri} = h\nu_{ri}\, n_e\, N_i\, C(i \rightarrow r)$$

Le coefficient de taux d'excitation $i \rightarrow r$ peut s'écrire comme la combinaison de deux termes, l'un dû aux électrons thermiques Maxwelliens à la température $T$ et l'autre aux électrons suprathermiques :

$$C(i \rightarrow r) = (1-R)\, C(i \rightarrow r; T) + R\, \langle v\, \sigma(i \rightarrow r) \rangle$$

où $C(i \rightarrow r; T)$ est le coefficient de taux Maxwellien donné par :

$$C(i \rightarrow r; T) = \frac{8.63 \times 10^{-6}}{g_i\, T^{1/2}} \exp\left(-\frac{E_r - E_i}{kT}\right) \int_0^{\infty} \Omega_{ir} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \mathrm{d}\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)$$

où $\Omega_{ir}$ est la force de collision pour la transition $i \rightarrow r$, $\varepsilon$ est l'énergie de l'électron diffusé, $T$ est exprimé en K et $C(i \rightarrow r; T)$ en cm$^3$/s.

Dans le cas où l'on considère une distribution bi-Maxwellienne, on a :

$$C(i \rightarrow r) = (1-R)\, C(i \rightarrow r; T_1) + R\, C(i \rightarrow r; T_2) \quad \text{avec} \quad T_1 < T_2.$$

Pour une distribution monoénergétique d'énergie $E_0$ décrivant les électrons suprathermiques, on a :

$$C(i \rightarrow r) = (1-R)\, C(i \rightarrow r; T) + R\, v\, \sigma(i \rightarrow r; E_0)$$

## 4°) Rapport d'émissivité

Le rapport $\rho$ de l'émissivité de la raie satellite diélectronique $j \rightarrow f$ sur celle de la raie de résonance parente $r \rightarrow i$ est donné en utilisant les équations précédentes et en simplifiant par $n_e$ et $N_i$ :

$$\rho = \frac{\epsilon_{jf}}{\epsilon_{ri}} = \frac{h\nu_{jf}}{h\nu_{ri}} \frac{F_1(T)\, F_2^{jf}}{C(i \rightarrow r)}$$

On peut omettre de l'équation ci-dessus le rapport $\frac{h\nu_{jf}}{h\nu_{ri}}$ car il est pratiquement égal à 1, les deux raies $j \rightarrow f$ et $r \rightarrow i$ étant très proches en longueur d'onde dans le spectre. Il est intéressant de noter que le rapport $\rho$ est indépendant de la densité d'électrons $n_e$ et de l'équilibre d'ionisation entre les ions $X^{z+}$ et $X^{(z-1)+}$.

Considérons : $j \rightarrow f$ : raie satellite notée $j$ du fer

$r \rightarrow i$ : raie de résonance notée $w$ du fer

Le rapport d'émissivité s'écrit dans ce cas :

$$\rho = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_w} = \frac{F_1(T)\, F_2^j}{C_w}$$

avec $F_1(T) = 2.071 \cdot 10^{-16}\, T^{-3/2} \exp(-5.45 \cdot 10^7/T)$, $T$ étant en K, et $F_2^j = 5.06 \cdot 10^{14}$ s$^{-1}$

Notons que pour la raie $w$ : $E_r - E_i = 492.47$ Ry.

On reporte dans le tableau suivant les valeurs du coefficient de taux d'excitation $C_w$ pour diverses valeurs de la température $T$ :

| $T$ ($10^7$ K) | 0.63 | 1 | 1.6 | 2.5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_w$ (cm$^3$/s) | $3.92{\cdot}10^{-17}$ | $3.14{\cdot}10^{-15}$ | $4.80{\cdot}10^{-14}$ | $2.61{\cdot}10^{-13}$ | $7.51{\cdot}10^{-13}$ |

| $T$ ($10^7$ K) | 6.3 | 10 | 16 |
|---|---|---|---|
| $C_w$ (cm$^3$/s) | $1.46{\cdot}10^{-12}$ | $2.21{\cdot}10^{-12}$ | $2.89{\cdot}10^{-12}$ |

## 4°) Application

Prenons une distribution bi-Maxwellienne en choisissant comme paramètres :

$R = 3\%$ (fraction d'électrons suprathermiques)

$T_1 = 10^7$ et $1.6{\cdot}10^7$ K $\qquad T_2 = 6.3{\cdot}10^7$, $10^8$ et $1.6{\cdot}10^8$ K

Pour cette distribution, on a : $C_w = 0.97\, C_w(T_1) + 0.03\, C_w(T_2)$

Les résultats des calculs de $C_w$, $F_1(T_1)$ et du rapport d'émissivité $\rho$ sont donnés dans le tableau suivant :

| $(T_1\,;\,T_2)$ ($10^7$ K) | (1 ; 6.3) | (1 ; 10) | (1.6 ; 10) | (1.6 ; 16) |
|---|---|---|---|---|
| $C_w$ (cm$^3$/s) | $4.68{\cdot}10^{-14}$ | $6.93{\cdot}10^{-14}$ | $1.13{\cdot}10^{-13}$ | $1.33{\cdot}10^{-13}$ |
| $F_1(T_1)$ | $2.81{\cdot}10^{-29}$ | $2.81{\cdot}10^{-29}$ | $1.07{\cdot}10^{-28}$ | $1.07{\cdot}10^{-28}$ |
| $\rho$ | 0.29 | 0.20 | 0.46 | 0.39 |

Il est intéressant de comparer ces valeurs de $\rho$ à celles obtenues avec une distribution Maxwellienne pure (c-à-d $R = 0\%$) :

$$\rho = \frac{2.81{\cdot}10^{-29} \times 5.06{\cdot}10^{14}}{3.14{\cdot}10^{-15}} = 4.53 \text{ pour } T = 10^7 \text{ K} \qquad \text{et} \qquad \rho = 1.13 \text{ pour } T = 1.6{\cdot}10^7 \text{ K}$$

On note une diminution considérable du rapport $\rho$, de 4.53 à 0.29, quand on inclut seulement 3% d'électrons suprathermiques à la température $T_2 = 6.3 \cdot 10^7$ K. Donc, le rapport $\rho$ est fortement sensible à la présence d'électrons suprathermiques dans un plasma.

Considérons maintenant la raie satellite diélectronique $d_{13}$ du fer, dont la longueur d'onde est : $\lambda = 1.853$ Å. Pour cette raie, on a :

$F_1(T) = 2.071 \cdot 10^{-16}\, T^{-3/2} \exp(-6.73 \cdot 10^7/T)$, $T$ étant en K, et $F_2^{d_{13}} = 1.68 \cdot 10^{14}$ s$^{-1}$

Calculons le rapport d'émissivité des 2 raies satellites $d_{13}$ et $j$ :

$$\rho' = \frac{\epsilon_{d_{13}}}{\epsilon_j} = \frac{1.68}{5.06}\, \frac{\exp(-6.73 \cdot 10^7/T)}{\exp(-5.45 \cdot 10^7/T)} = 0.332\, \exp(-1.28 \cdot 10^7/T)$$

pour quelques valeurs de la température $T$ :

| $T$ ($10^7$ K) | 1 | 1.6 | 2.5 |
|---|---|---|---|
| $\rho'$ | 0.09 | 0.15 | 0.20 |

**Exemple d'interprétation :**

- on a mesuré $\rho' = 0.18$ et $\rho = 0.47$
- on sait qu'il existe ≈2% d'électrons suprathermiques dans le plasma considéré

On cherche à déduire la température $T_2$ associée aux électrons suprathermiques dans le cadre du modèle de distribution bi-Maxwellienne. Pour cela, commençons par déterminer la température $T_1$ associée aux électrons thermiques en utilisant le rapport $\rho'$. Sachant que les deux raies satellites $d_{13}$ et $j$ sont produites essentiellement par les électrons thermiques, on a :

$$\rho' = \frac{\epsilon_{d_{13}}}{\epsilon_j} = 0.332\, \exp(-1.28 \cdot 10^7/T_1) = 0.18$$

$$\Rightarrow \qquad T_1 = \frac{1.28 \cdot 10^7}{ln\,(0.332/0.18)} \approx 2.1 \cdot 10^7 \text{ K}$$

On sait qu'à cette température $T_1$, le coefficient de taux d'excitation est :

$$C_w(T_1 = 2.1 \cdot 10^7 \text{ K}) = 1.24 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^3/\text{s}$$

Développons maintenant le rapport d'émissivité $\rho$ :

$$\rho = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_w} = \frac{0.98 \times 2.071 \cdot 10^{-16}\, (2.1 \cdot 10^7)^{-\frac{3}{2}} \exp(-5.45/2.1) \times 5.06 \cdot 10^{14}}{0.98 \times 1.24 \cdot 10^{-13} + 0.02 \times C_w(T_2)}$$

$$= 0.47$$

On trouve après calcul : $C_w(T_2) = 2.40 \cdot 10^{-12}$ cm$^3$/s, ce qui correspond approximativement à :

$$T_2 \approx 1.2 \cdot 10^8 \text{ K}$$

Remarque : Dans le cas où il n'y a pas d'électrons suprathermiques (i.e. $R$ = 0%), la valeur du rapport d'émissivité $\rho$ est :

$$\rho = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_w} = \frac{2.071 \cdot 10^{-16} \ (2.1 \cdot 10^7)^{-\frac{3}{2}} \exp(-5.45/2.1) \times 5.06 \cdot 10^{14}}{1.24 \cdot 10^{-13}} = 0.66$$