Faculté des Sciences
Dept. Mathématiques
Prof. M. Benalili
m_benalili@yahoo.fr
Module de géométrie différentielle
3ième année de Mathématiques

Série d'exercices " Espaces tangents "

Exercice1

Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des surfaces de R^3 et déterminer leur espace tangent en chaque point:

$$\left\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2-3xyz=1\right\},$$
$$T^2=\left\{(x,y,z)\in R^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2=1,\right\}$$
$$H_c=\left\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2-z^2=c\right\}$$

Exercice2

Soit $f: M_n(R)\to R$ de classe C^∞ définie par $f(A)=det(A)$.

1) Montrer que

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\det\left(id_n+\lambda X\right)-1}{\lambda}=trace(X)$$

(penser au polynôme caractéristique). En déduire $D_{id_n}f(X)$.

2) En remarquant que $\frac{det(A+\lambda X)-det(A)}{\lambda}$ est égal à $det(A)\ \frac{det(id_n+\lambda A^{-1}X)-1}{\lambda}$ pour A inversible, calculer $D_Af(X)$ lorsque Aest inversible.

3) Montrer que $Sl_n(R)$=$\{M\in M_n(R):\det(M)=1\}$ est une sous-variété de $M_n(R)$, de dimension n^2-1, dont l'espace tangent en id_n est $\{X\in M_n(R): trace(X)=0\}$.

Exercice3

Montrer que $Sl_n\left(R\right)$=$\{M\in M_n(R):\det(M)=1\}$ est une hypesurface de classe C^∞ de $M_n\left(R\right)$. Montrer que l'espace tangent à $Sl_n\left(R\right)$ en A est

$T_ASl_n\left(R\right)$=$\{M\in M_n(R):\det(A^{-1}M)=0\}$.

Corrections

Exercice1

1) Posons

$$f(x,y,z)=\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2-1$$

alors pour $x^2+y^2 \neq 0$, on a

$$Df(x,y,z) = \left(2\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2z\right)$$

si $x^2+y^2 \neq 4$, $Df(x,y,z)$ est de rang 1 et si $x^2+y^2=4$ alors $z \neq 0$ puisque $(x,y,z) \in T^2$ et $Df(x,y,z)$ est encore de rang 1.

f est alors une submersion de classe C^∞ et T^2 est donc une surface lisse de R^3.

Maintenant si $x^2+y^2=0$ i.e. $x=y=0$, T^2 est réduit à $\{(0,0,+1),(0,0,-1)\}$.

Notons par $T_{(x_o,y_o,z_o)}T^2$ l'espace tangent à T^2 au point (x_o,y_o,z_o).

Nous savoons qu'il est donné par le noyau de $Df(x_o,y_o,z_o)$ i.e.

$$\begin{aligned} T_{(x_o,y_o,z_o)}T^2 &= KerDf(x_o,y_o,z_o) = \left\{(x,y,z) \in R^3 : Df(x_o,y_o,z_o)(x,y,z) = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in R^3 : \left(\sqrt{x_o^2+y_o^2}-2\right)\frac{x_o x}{\sqrt{x_o^2+y_o^2}} + \left(\sqrt{x_o^2+y_o^2}-2\right)\frac{y_0 y}{\sqrt{x_o^2+y_o^2}} + z_o z = \right. \end{aligned}$$

2)

Cas $c=0$

On obtient le cône d'équation cartésienne $x^2+y^2-z^2=0$, qui n'est pas une surface (n'est pas une sous-variété de R^3) à cause de son sommet $(0,0,0)$.

Cas $c \neq 0$

Posons $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-c$, f est de classe C^∞ et que pour $(x,y,z) \in H_c$, on a

$$Df(x,y,z) = 2(x,y,z) \neq (0,0,0)$$

ce qui montre que le rang de $Df(x,y,z)$ est maximal i.e. la restriction de f à H_c est une submersion et par conséquent H_c est une surface lisse de R^3.

Pour $(x_o,y_o,z_o) \in H_c$ avec $c \neq 0$, notons par $T_{(x_o,y_o,z_o)}H_c$ le plan tangent à H_c au point (x_o,y_o,z_o) encore une fois , il est donné par

$$T_{(x_o,y_o,z_o)}H_c = KerDf(x_o,y_o,z_o) = \left\{(x,y,z) \in R^3 : xx_o+yy_o+zz_o = 0\right\}.$$

Exercice2

1) Supposons d'abord que la matrice X est diagonale i.e. $X = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & 0 \\ . & . & . \\ 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} \det\left(id_n + \lambda X\right) &= \det \begin{pmatrix} 1+\lambda a_{11} & ... & 0 \\ . & . & . \\ 0 & ... & 1+\lambda a_{nn} \end{pmatrix} = (1+\lambda a_{11})\ldots(1+\lambda a_{nn}) \\ &= 1+\lambda(a_{11}+...+a_{nn})+o(\lambda). \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to 0} \frac{\det\left(id_n+\lambda X\right)-1}{\lambda} &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda(a_{11}+...+a_{nn})+o(\lambda)}{\lambda} \\ &= a_{11}+...+a_{nn} = trace(X). \end{aligned}$$

Maintenant si $X = (a_{ij})$ est une matrice inversible, on peut écrire

$$\begin{aligned} \det\left(id_n+\lambda X\right) &= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \left(\delta_{1\sigma(1)}+\lambda a_{1\sigma(1)}\right) \ldots \left(\delta_{n\sigma(n)}+\lambda a_{n\sigma(n)}\right) \\ &= 1+\lambda(a_{11}+...+a_{nn})+o\left(\lambda\right) = 1+trace(X)+o(\lambda) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to 0} \frac{\det\left(id_n+\lambda X\right)-1}{\lambda} &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda(a_{11}+...+a_{nn})+o(\lambda)}{\lambda} \\ &= a_{11}+...+a_{nn} = trace(X). \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$D_{id_n} f(X) = trace(X).$$

2) Calculons $D_A f(X)$ lorsque Aest inversible.
Nous avons

$$f(A+\lambda X) = \det(A+\lambda X) = \det(A)\det(id_n+\lambda A^{-1}X)$$

d'où

$$D_A f(X) = \det(A) trace(A^{-1}X).$$

3) Montrer que $Sl_n(R)$=$\{M \in M_n(R) : \det(M)=1\}$ est une sous-variété de $M_n(R)$.

Considérons l'application $f : M_n(R) \to R$, $f(A) = det(A)$ qui est de classe C^∞.

Alors pour $A \in Sl_n(R)$, $D_A f : M_n(R) \to R$ donnée par $D_A f(X) = trace(A^{-1}X)$. L'image de $D_A f$ est un sous-espace vectoriel de R donc il est soit R soit $\{0\}$ et puisque $D_A f(A) = trace(id_n) = n$, $\mathrm{Im}\,(D_A f) = R$. Il suit que $D_A f$ est de rang maximal et par suite $Sl_n(R)$ est une sous-variété de classe C^∞ et de dimension $n^2 - 1$.

L'espace tangent en id_n à $Sl_n(R)$ est alors donné par

$$T_{id_n} Sl_n(R) = Ker D_{id_n} f = \{X \in M(R) : trace(X) = 0\}.$$

Exercice3.

D'après la question 2 de l'exercice2 nous avons $D_A f(X) = \det(A) trace(A^{-1}X)$. Ce qui donne

$$T_A Sl_n(R) = Ker D_A f = \left\{X \in M(R) : trace(A^{-1}X) = 0\right\}.$$