Master edp et applications
Module : Méthodes de résolution des pbs elliptiques
Mme Merzagui.

Corrigé des exercices 2 et 3

Rappel

Le lemme de Lax-Milgram

Soient H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire noté (;), de norme associée notée $\|.\|$, et $a(;)$ une application bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ qui est:
- continue, ce qui équivalent à dire qu'il existe$c > 0$ t.q., pour tout $(u;v) \in H \times H$, on a

$$|a(u;v)| \leq c \|u\| \|v\|,$$

- coercive sur H (ou $H-$elliptique), c'est-à-dire

$$\exists \alpha > 0; \forall u \in H, a(u;u) \geq \alpha \|u\|^2$$

et soit T une forme linéaire continue sur H.

Alors il existe un unique u de H tel que l'équation $a(u;v) = T(v)$ soit vérifiée pour tout v de H :

$$\exists u \in H; \forall v \in H; a(u;v) = T(v)$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle
$J : H \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v;v) - T(v)$$

pour tout v de H

Notons que dans le cas où la forme bilinéaire a est symétrique, elle définit un produit scalaire sur H équivalent au produit scalaire initial. Dans ce cas, le lemme de Lax-Milgram est une conséquence directe du théorème de représentation de Riesz dans un espace de Hilbert.

____

Exercice2

1. Soit $\Omega =]0,1[$ pour $f \in L^2(\Omega)$; en considérant

$$\begin{aligned} H &= H_0^1(]0;1[); a(u;v) := \int_0^1 Du(t)Dv(t)dt \\ T(v) &= \int_0^1 f(t)v(t)dt; \end{aligned}$$

a est symétrique $a(u;v) = a(v;u)$ et a est continue,

$$\begin{aligned} |a(u;v)| &:= \left| \int_0^1 Du(t)Dv(t)dt \right| \overset{\text{ineg. de Schwartz}}{\leq} \|Du\|_{L^2} \|Dv\|_{L^2} \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

et, de l'inégalité de Poincaré, $\exists \alpha > 0$ tel que

$$a(u;u) = \int_0^1 |Du(t)|^2 \, dt \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2$$

Par application du th . de Lax-Milgram, on obtient

$$\begin{aligned} \exists! u &\in H_0^1(]0;1[) \\ \int_0^1 Du(t)Dv(t)dt &= \int_0^1 f(t)v(t)dt \end{aligned} \tag{1}$$

2. Soit $\varphi \in C\left(\bar{\Omega}\right)$. Pour $x \in \bar{\Omega}$ on pose

$$\psi(x) := \int_0^x \varphi(t)dt - x \int_0^1 \varphi(t)dt.$$

Donc, $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$ et la dérivée faible de ψ est égale p.p. à sa dérivée classique, c.à.d.

$$D\psi(x) = \psi'(x) = \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(t)dt; \text{ pour presque tout } x \in]0;1[$$

On a donc $\psi \in L^2(\Omega)$ et $D\psi \in L^2(\Omega)$, et $\psi(0) = \psi(1) = 0$ ce qui prouve que$\psi \in H_0^1(\Omega)$. On peut donc prendre $v = \psi$ dans (1), on obtient

$$\int_0^1 Du(t)\varphi(t)\,dt - \int_0^1 \varphi(t)\,dt \int_0^1 Du(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,\psi(t)\,dt$$

Comme F est de classe C^1 et $F\prime = f$, en utilisant $\psi(0) = \psi(1) = 0$, et en opérant une intégration par parties on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)\,\psi(t)\,dt &= \int_0^1 F'(t)\,\psi(t)\,dt = -\int_0^1 F(t)\,\psi'(t)\,dt \\ &= -\int_0^1 F(t)\,\varphi(t)\,dt + \left(\int_0^1 F(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 \varphi(t)\,dt\right) \end{aligned}$$

En posant $c = \int_0^1 Du(t)dt + \int_0^1 F(t)\,dt$, on a donc,

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\,\varphi(t)\,dt = c\int_0^1 \varphi(t)\,dt, \text{ pour tout } \varphi \in C\left(\bar{\Omega}\right)$$

Comme $Du + F - c \in L^2(\Omega)$ et que $C\left(\bar{\Omega}\right)$ est dense dans $L^2(\Omega)$; , on en déduit

$$Du = -F + c \quad \text{p.p.dans } \Omega$$

On pose maintenant

$$w(x) = \int_0^x (-F(t) + c)\,dt \text{ pour } x \in \bar{\Omega}$$

Comme w est de classe C^1(la fonction w est même de classe C^2) la dérivée de w est une dérivée faible et est égale p.p. à la dérivée classique de w. On a donc

$$Dw = w\prime = -F + c; \quad \text{ p.p}$$

On a donc

$$Dw = Du\ ; \quad \text{ p.p}$$

et on endéduit que $w - u$ est une fonction presque partout égale à une constante. En identifiant la (classe de) fonction(s) u a son représentant continu, on a donc u de classe C^2,

$$u\prime = -F + c \text{ et } -u" = F\prime$$

On a aussi $u(0) = u(1)$ (car $u \in H_0^1(]0;1[)$) et par suite le représentant continu de u vérifie $u(0) = u(1) = 0$).

<u>Exercice 3</u>

(cet exercice est en fait un cas particulier du théorème de Nirenberg.)
Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2), x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > 0\}$ et $f \in L^2(\Omega)$, et soit $u \in H_0^1(\Omega)$solution du problème suivant :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2}$$

u vérifie alors

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega u.v dx = \int_\Omega g v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ où } g = u + f \in L^2(\Omega) \tag{3}$$

On a donc

$$\langle u,v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega gvdx \leq \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

puisque, par définition,

$$\|g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\left\{\int_\Omega gvdx, v \in H_0^1(\Omega), \|v\| \leq 1\right\},$$

où, on confond l'application T_g qui à $v \in H_0^1(\Omega)$ associe $\int_\Omega gvdx$, qui est donc un élement de $H^{-1}(\Omega)$, avec la (classe de) fonction(s) $g \in L^2(\Omega)$.
On prend $v = u$ dans (3). On obtient

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

Pour montrer que $u \in H^2(\Omega)$, on doit montrer que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega) .i = 1,2$
On commence par la régularité de $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, et pour cela on utilise les idées dévelopées dans le cours notions de régularité elliptique (régularité H$^2 page2$).on introduit alors la fonction

$$\Psi_h u = \frac{1}{h}(u_h - u)$$

où $u_h \in H_0^1(\Omega)$ est défini par

$$u_h(x) = u(x_1, x_2 + h).$$

Comme u vérifie (2), u_h vérifie

$$\int_\Omega \nabla u_h.\nabla v dx = \int_\Omega f_h v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

où $f_h(x) = f(x_1, x_2+h)$, et donc$\Psi_h u = \frac{1}{h}(u_h - u)$ appartient à $H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\int_\Omega \nabla \Psi_h u.\nabla v dx = \int_\Omega \Psi_h f v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

On en déduit que $\langle \Psi_h u, v\rangle = \int_\Omega \Psi_h g v dx$ et donc

$$\|\Psi_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \tag{4}$$

D'autre part on a

$$\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \tag{5}$$

Prouvons tout d'abord (5)

$$\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \overset{def}{=} \sup\left\{\int_\Omega \Psi_h g v dx, v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\right\}$$

et donc par densité de $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$,

$$\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\left\{\int_\Omega \Psi_h g v dx, v \in \mathcal{D}(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\right\}$$

Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Psi_h g v dx &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2 + h) - g(x_1, x_2)\, v(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1, t)\, v(x_1, t - h)\, dx_1 dt - \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2)\, v(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \\
&= -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2)\, \frac{v(x_1, x_2 - h) - v(x_1, x_2)}{-h} dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

Donc par l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \Psi_h g v dx\right| &\leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{v(.,. - h) - v(.,.)}{-h}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}$.
Maintenant de (4) et (5) ,on obtient

$$\|\Psi_h u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \tag{6}$$

Prenons maintenant $h = \frac{1}{n}$ et considérons $n \to +\infty$. D'après (6) $\left(\Psi_{\frac{1}{n}} u\right)_{n\geq 1}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$;il existe donc une sous-suite encore notée $\left(\Psi_{\frac{1}{n}} u\right)_{n\geq 1}$, et $w \in H_0^1(\Omega)$telle que

$$\Psi_{\frac{1}{n}} u \rightharpoonup w \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

(c'est-à-dire $S(\Psi_{\frac{1}{n}} u) \to S(w)$ pour tout $S \in H^{-1}(\Omega)$).
Donc $\Psi_{\frac{1}{n}} u \to w$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Mais par définition de ψ_h, on a $\Psi_{\frac{1}{n}} u \to \frac{\partial u}{\partial x_2}$dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Donc $\frac{\partial u}{\partial x_2} = w \in H_0^1(\Omega)$, et par conséquent, $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \in L^2(\Omega)$ et

$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \in L^2\left(\Omega\right).$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer que $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \in L^2\left(\Omega\right)$. Pour cela, on utilisele fait que u est solution de (2), c'est donc une solution de

$$-\Delta u = f \text{ dans } \mathcal{D}'\left(\Omega\right),$$

et donc,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = -f - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$$

ce qui prouve que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \in L^2\left(\Omega\right)$.