INTERPOLATIONS DE FONCTIONS

Exercice 1

En utilisant la méthode de Lagrange :

1- Calculer le polynôme d'interpolation de la fonction *f(x)* donnée par :

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	2	6	12

2- En déduire une valeur approchée de $f(1.5)$ et $f'(1.5)$

Solution

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 6)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x^2 - 4x + 3)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$$

$$P(x) = 2 \times L_0(x) + 6 \times L_1(x) + 12 \times L_2(x) = x^2 + x$$

$$f(1.5) = P(1.5) = 1.5^2 + 1.5 = 3.75$$

$$f'(1.5) = P'(1.5) = 2 * 1.5 + 1 = 4$$

Exercice 2

Soit $y(x)$ une fonction donnée par le tableau suivant :

x	0	-1	-2	-3
$y(x)$	1	2	5	10

Déterminer le polynôme d'interpolation de la fonction $y(x)$ à l'aide de la méthode Lagrange.

En déduire $y(-0.4)$, $y(-1.5)$

Solution

$$L_0(x) = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(0+1)(0+2)(0+3)}, \quad L_1(x) = \frac{(x+0)(x+2)(x+3)}{(-1+0)(-1+2)(-1+3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+0)(x+1)(x+3)}{(-2+0)(-2+1)(-2+3)}, \quad L_3(x) = \frac{(x+0)(x+1)(x+2)}{(-3+0)(-3+1)(-3+2)}$$

$$P(x) = 1 \times L_0(x) + 2 \times L_1(x) + 5 \times L_2(x) + 10 \times L_3(x) = x^2 + 1$$

$$y(-0.4) = P(-0.4) = (-0.4)^2 + 1 = 1.16$$

$$y(-1.5) = P(-1.5) = (-1.5)^2 + 1 = 3.25$$

Exercice 3

Soit le tableau suivant :

x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos(x_i)$	0	0.866	0.5

En utilisant l'interpolation polynomiale, donner une valeur approchée de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Solution

On peut choisir l'une des deux méthodes (Lagrange ou Newton) pour calculer le polynôme d'interpolation.

$$L_0(x) = \frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(0-\frac{\pi}{6}\right)\left(0-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{6}-0\right)\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} =$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\frac{\pi}{3}-0\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$P(x) = 0 \times L_0(x) + 0.866 \times L_1(x) + 0.5 \times L_2(x)$$! Développer le calcul de P(x)

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = P\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = -P'\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

La méthode de Newton donne :

$$f(x) \approx P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}x(x-\pi/6)$$

x_i	$\boldsymbol{y_i}$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	**0**	**0.866**	**1.232**
$\pi/6$	0.866	-0.366	
$\pi/3$	0.5		

$$P(x) = 0 + \frac{0.866}{1!\pi/6}x + \frac{1.232}{2!(\pi/6)^2}x(x-\pi/6)$$! Développer le calcul de P(x)

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = P\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = -P'\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Remarque : Les deux méthodes doivent aboutir au même polynôme P(x)