TD du chapitre 5

Exercice 1

Soit l'équation différentielle : $y'(t) - e^{t\,y(t)} = 0 \;\; avec \;\; y(0) = 1$

1- Donner l'algorithme d'Euler modifié permettant de résoudre cette équation.

2- Calculer $y(1)$ en prenant $h = 0.5$

Solution

$$\begin{cases} y'(t) = e^{t\,y(t)} = f(t,y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Algorithme d'Euler modifié:} \begin{cases} y_0 = 1 \quad t_0 = 0 \quad h = 0.5 \\ t_{n+1} = t_n + h \\ y^*_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n) = y_n + e^{t_n y_n} \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y^*_{n+1})] \end{cases}$$

Calcul de $y(1)$:

$$\begin{cases} y_0 = 1 \quad t_0 = 0 \quad h = 0.5 \\ t_1 = t_0 + h = 0.5 \\ f(t_0, y_0) = e^{t_0 y_0} = 1 \\ y^*_1 = y_0 + f(t_0, y_0) = 2 \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(e^{t_0 y_0} + e^{t_1 y^*_1}\right) = 1.7793 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1.7793 \quad t_1 = 0.5 \quad h = 0.5 \\ t_2 = t_1 + h = 1 \\ f(t_1, y_1) = e^{t_1 y_1} = 2.4343 \\ y^*_2 = y_1 + f(t_1, y_1) = 4.2136 \\ y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left(e^{t_1 y_1} + e^{t_2 y^*_2}\right) = 7.3915 \end{cases}$$

$$y(1) = y_2 = 7.3915$$

Exercice 2

Soit l'équation différentielle : $t^2 y'(t) - t y(t) = 1 \;\; avec \;\; y(1) = 0$

Calculer par la méthode d'Euler explicite $y(2)$ en prenant h=0.25.

Solution

L'équation différentielle s'écrit :

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1 + t\,y}{t^2} = f(t,y) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Algorithme d'Euler explicite: $\begin{cases} y_0 = 0 \quad t_0 = 1 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n\,, y_n) = y_n + h\ \frac{1+t_n y_n}{t_n{}^2} \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$

t_i	1	1.25	1.5	1.75	2
y_i	0	0.25	0.4600	0.6478	0.8220

$$\boldsymbol{y(2) = y_4 = 0.8220}$$

Exercice 3

Soit l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) - 1 = 0 \text{ avec } y(1) = 0 \quad et \ \ y'(1) = 0$$

En utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.2$, calculer $y'(1.6)$ puis $y(1.6)$.

Indication : poser $y'(x) = z(x)$

Solution

En posant $y'(x) = z(x)$ l'équation différentielle se met sous la forme d'un système de deux problèmes de Cauchy:

$$\begin{cases} z'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} z = f(x,z) \\ z(1) = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y'(x) = z(x) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Algorithme d'Euler explicite:

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + hf(x_n, y_n) = z_n + h\left(\frac{1}{x_n^2} - \frac{2}{x_n} z_n\right) \\ x_{n+1} = x_n + h \\ z_0 = 0, \ \ x_0 = 1, \ \ h = 0.2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + hz_n \\ x_{n+1} = x_n + h \\ y_0 = 0, x_0 = 1, h = 0.2 \end{cases}$$

Calcul :

x_n $(n = 0,1,2,3)$	1	1.2	1.4	1.6
z_n $(n = 0,1,2,3)$	0	0.2	0.2722	0.2965

x_n $(n = 0,1,2,3)$	1	1.2	1.4	1.6
y_n $(n = 0,1,2,3)$	0	0	0.0544	0.1137

D'où $y'(1.6) = z(1.6) = 0.2965$ et $y(1.6) = 0.1137$