Mme BENYELLES WAFAA
(suite du cours MI)

Part I
GENERALITE SUR LES LOIS DE PROBABILITE

1 LOIS DE PROBABILITE DISCRETE

1.1 La variable aléatoire certaine

X est dite une loi certaine si son support est $X(\Omega) = D_X = \{a\}$ ainsi X$\equiv a$, a étant un réel fixé et sa fonction de masse est définie telle que:

$$P_X(a) = 1$$

On aura:

$$E(X) = a, \qquad V(X) = 0$$

1.2 La loi uniforme

X est dite une loi uniforme (notée: $X \hookrightarrow U_n$), si son support est $X(\Omega) = D_X = \{1, 2, 3, ..., n\}$ et sa fonction de masse est définie telle que:

$$P_X(\{k\}) = \frac{1}{n}, \quad \forall k \in D_X$$

On aura:

$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad V'X) = \frac{n^2-1}{12}$$

<u>Preuve</u>

On sait que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n\,(n+1)$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n\,(n+1)\,(2n+1)$ (résultats d'analyse)

De plus

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot P_X(k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} n\,(n+1) \\ &= \frac{n+1}{2} \quad cqfd \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot P_X(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} n\,(n+1)\,(2n+1) \\
&= \frac{(n+1)\,(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

conclusion

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \frac{(n+1)\,(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n^2-1}{12}
\end{aligned}
$$

Exemple

On jette un dé non truqué, soit X la v.a.r qui correspond au chiffre obtenu ainsi $X(\Omega) = D_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et sa fonction de masse est:

$$P_X(k) = \frac{1}{6} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorable}{nombre\ de\ cas\ possible}, \forall k \in D_X$$

on constate bien que X ainsi définie suit bien une loi uniforme donc son espérance est: $E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{7}{2}$ et sa variance est : $V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{35}{12}$

1.3 La loi de Bernoulli

Soit une expérience (ou une épreuve) qui a deux résultats possibles.L'un sera le succès (S) l'autre l'échec (E) ainsi notre espace échantillon(univers) est: $\Omega = \{S, E\}$, on pose $P(S) = p$ et $P(E) = 1 - p = q$

Soit X la variable aléatoire associée a l'expérience précédente:

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega_i \longmapsto X(\omega_i)$$

avec $X(S) = 1$ et $X(E) = 0$ ainsi notre variable a pour support $D_X = \{0, 1\}$ et sa fonction de masse sera définie par:

x_i	0	1	somme
$P_X(x_i)$	q	p	1

Cette variable ainsi définie est dite une loi de Bernouilli et on note $X \hookrightarrow B(p)$, de plus on a:

$$E(X) = p \qquad et \qquad V(X) = pq$$

Preuve

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{2} x_i \cdot P(X = x_i) \\
&= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) = p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \cdot P(X = x_i) \\
&= 0^2 \cdot P(X = 0) + 1^2 \cdot P(X = 1) = p
\end{aligned}
$$

conclusion

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= p - p^2 = p\,(1 - p) \\
&= pq \quad cqfd
\end{aligned}
$$

Exemples

Déterminer pour chaque cas le paramètre de la Loi de Bernoulli ainsi que son espérance et sa variance.

1. Un joueur lance une piéce de monnaie truquée, telle que la probabilité d'avoir le coté "face" est de 4/5. Notons que le succés est d'obtenir le coté "face" donner la Loi.

   Solution: $X \hookrightarrow B(\frac{4}{5})$ ainsi $E(X) = \frac{4}{5} \quad et \quad V(X) = \frac{4}{25}$

2. Un joueur lance une piéce de monnaie truquée, telle que la probabilité d'avoir le coté "face" est de 4/5. Notons que le succés est d'obtenir le coté "pile" donner la Loi

   Solution: $X \hookrightarrow B(\frac{1}{5})$ ainsi $E(X) = \frac{1}{5} \quad et \quad V(X) = \frac{4}{25}$

1.4 La loi binomiale

La loi binomiale est l'une des lois les plus fréquentes en statistique appliquée. Elle est utilisée pour modéliser un “sondage avec remise“. La variable X décrira une loi binomiale de parmètres (n, p), avec $n \in \mathbb{N}^*, p \in]0, 1[$ notée:$X \hookrightarrow B(n, p)$ si X représentera le **nombre de succès** lorsqu'on renouvelle "n" fois, de manière **identique et indépendante** une épreuve de Bernoulli de paramètre "p".

On considére que :

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \longmapsto X(\omega_1, ..., \omega_n) = x_i = k$$

avec $k = x_i \in D_X = \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$, k représente le nombre de succès parmi les "n" épreuves.

$\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_n$ les Ω_i étant les éspaces échantillons de la loi de bernoulli $X_i\,(\Omega_i = \{S, E\})$ ainsi X la loi binomiale est la somme de "n" épreuves d'une loi de Bernoulli:

$$X = X_1 + ... + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

sa fonction de masse sera définie comme suit:

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad , \; k \in D_X = \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$$

Il est facile de démontrer que c'est bien une fonction de masse (une loi de probabilité), en effet:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(X &= k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \\
&= (p+q)^n \quad formule\ du\ binome\ de\ Newton \\
&= 1 \;\; car\ q = 1 - p
\end{aligned}$$

et

$$\left.\begin{array}{cc}
p \in]0, 1[& \Longrightarrow p \succ 0 \\
q = 1 - p & \Longrightarrow 0 \prec q \prec 1 \\
\forall n, k & C_n^k \geq 0
\end{array}\right\} \Longrightarrow P(X = k) \geq 0$$

De plus

$$E(X) = np \qquad et \qquad V(X) = npq$$

Preuve

En utilisant les propriètés de l'espérance

$$\begin{aligned}
E(X) &= E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = E(X_1 + ... + X_n) \\
&= E(X_1) + ... + E(X_n) \\
&= p \; + .. + p \quad (n fois) \\
&= np
\end{aligned}$$

car $E(X_i) = p, \; \forall i$ c'est l'espérance d'une Berboulli

En utilisant la propriété d'indépendance entre les variables on obtient:

$$\begin{aligned}
V(X) &= V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = V(X_1 + ... + X_n) \\
&= V(X_1) + ... + V(X_n) \\
&= pq + .. + pq \quad (n fois) \\
&= npq
\end{aligned}$$

car $V(X_i) = pq, \; \forall i$ c'est la variance d'une Berboulli

Remarques

- On peut démontrer ces résultats avec une autre méthode, en utilisant la définition de l'espérance et de la variance (qu'on verra en TD)
- si n=1 alors la binomiale au paramétre (1,p) est une Bernoulli, "n" étant le nombre de répétitions ou du renouvellement de l'expérience d'une Bernoulli pour avoir une binomiale.
- Stabilité de la loi binomiale, en effet Soient deux v.a.r X et Y **indépendantes** *si* $X \hookrightarrow B(n,p)$ *et* $Y \hookrightarrow B(m,p)$ *alors*

$$X + Y \hookrightarrow B(n+m,p)$$

Exemples

Déterminer pour chaque cas les paramètres de la loi Binomiale ainsi que sa fonction de masse, son espérance et sa variance.

1. Un joueur lance une pièce de monnaie truquée, 3 fois, telle que la probabilité d'avoir le coté "face" est de 4/5. Notons que la v.a.r X représente le nombre de fois ou on obtient le coté "face" (ie nombre des succès sur les 3 lancés). Donner la Loi de X

   Solution: $X \hookrightarrow B(3, \frac{4}{5})$ ainsi sa loi est:

$$P(X=k) = C_3^k \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{3-k}, \quad k \in D_X = \{0,1,2,3\}$$

   ou bien

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\left(\frac{1}{5}\right)^3$	$3\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^2$	$3\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$

   $E(X) = np = \frac{12}{5}$ *et* $V(X) = npq = \frac{12}{25}$

2. Un joueur lance une piéce de monnaie truquée, 2 fois, telle que la probabilité d'avoir le coté "face" est de 4/5. Notons que la v.a.r X représente le nombre de fois ou on obtient le coté "face" (ie nombre des succès sur les 2 lancés). Donner la Loi de X

   Solution: $X \hookrightarrow B(2, \frac{1}{5})$ ainsi sa loi est:

$$P(X=k) = C_2^k \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{2-k}, \quad k \in D_X = \{0,1,2\}$$

   ou bien

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\left(\frac{4}{5}\right)^2$	$2\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{5}\right)^2$

   $E(X) = \frac{2}{5}$ *et* $V(X) = \frac{8}{25}$

1.5 La Loi géométrique ou loi de Pascal

La loi géométrique de paramètre $p, p \in [0,1]$ est la loi du premier succès, notée $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, sa fonction de masse est

$$P(X=k) = p\,(1-p)^{k-1} = p \cdot q^{k-1},\ avec\ k \in \mathbb{N}^*$$

De plus:

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad et \quad V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{(1-p)}{p^2}$$

(preuve faite chapitre précédent sur les v.a.r)

Exemple

On lance une pièce truquée jusqu'à ce qu'on obtienne une fois "Pile". On note p la probabilité de tomber sur “Pile”. On veut connaitre la probabilité d'avoir “Pile” au premier lancer, au deuxième, . . ., au kième lancer, ... On note X le nombre de lancers nécessaires pour avoir un succès.

1.6 La Loi de Poisson

Soit λ un réel strictement positif (ie $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$) et X une v.a.r telle que son support $D_X = \mathbb{N}$, On dit que X suit une loi de Poisson de paramétre λ, notée $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si sa fonction de masse est définie par:

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \text{ avec } k \in D_X = \mathbb{N}$$

Il est facile de démontrer que c'est bien une fonction de masse (une loi de probabilité), en effet (on utilisera pour cela un résultat d'analyse sur le développement limité de la fonction exponentielle)

$$P(X=k) \geq 0 \ \ évident$$

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} P(X &= k) = \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} \\ &= 1 \quad car \quad e^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

De plus

$$E(X) = \lambda \ \ et \quad V(X) = \lambda$$

Preuve

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k\geq 0} k\cdot P(X=k) \\
&= \sum_{k\geq 0} k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k\geq 1} k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \quad \textit{car } k! = (k-1)!k \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{K\geq 0}\frac{\lambda^{K}}{K!} \quad \textit{on a posé } K = k-1 \\
&= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda \quad cqfd
\end{aligned}$$

Calculons d'abord E(X(X-1))

$$\begin{aligned}
E(X\,(X-1)) &= \sum_{k\geq 0} k\cdot(k-1)\cdot P(X=k) \\
&= \sum_{k\geq 2} k\cdot(k-1)\cdot P(X=k) \\
&= \sum_{k\geq 2} k\cdot(k-1)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k\geq 2}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \ \textit{car } k! = (k-2)!\,(k-1)\,k \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{K\geq 0}\frac{\lambda^{K}}{K!} \quad \textit{on a posé } K = k-2 \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E(X\,(X-1)) &= E(X^2-X) = E(X^2)-E(X) \\
&\Longrightarrow E(X^2) = E(X\,(X-1)) + E(X) \\
&\Longrightarrow E(X^2) = \lambda^2+\lambda
\end{aligned}$$

conclusion

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \lambda^2+\lambda-[\lambda]^2 \\
&= \lambda \quad cqfd
\end{aligned}$$

Exemple

Un réservoir d'eau de 2000 litres contient en moyenne 2 bactéries par litre. On admet dangereux d'avaler au moins 8 bactéries. Un voyageur assoiffé boit 1 litre d'eau, si on pose X la v.a.r qui représente le nombre de bactéries par litre, calculer la probabilité que son geste lui soit fatal (dangereux)?

Solution

Soit X la v.a.r qui représente le nombre de bactéries par litre donc son support est: $D_X = \{0, 1, 2, ...\} = \mathbb{N}$, X ainsi défini suit une loi de poisson de paramètre $\lambda = 2$ car $E(X) = 2$ et $E(X) = \lambda$ dans le cas d'une loi de poisson d'où le résultat : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$

la probabilité que son geste lui soit fatal (dangereux) est: $P(X \geq 8)$

$$\begin{aligned} P(X &\geq 8) = 1 - P(X \prec 8) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{7} P(X = k) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{7} e^{-2} \frac{2^k}{k!} \\ &= 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + .. + \frac{2^7}{7!}\right) \\ &= 0.002 \end{aligned}$$

Remarques

- Stabilité de la loi de Poisson, en effet Soient deux v.a.r X et Y **indépendantes** *si* $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ *et* $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ *alors*

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

- Souvent, la loi de Poisson est utilisée pour modéliser le comptage des événements rares, c'est à dire des événements ayant une faible probabilité de réalisation : maladies rares, accidents mortels rares, mutations génétiques, pannes, radioactivité...

- **Approximation:** Si X est une binomiale de paramètres (n, p) $[X \hookrightarrow B(n, p)]$, pour un "n" assez grand (en pratique $n \geq 30$) et un "p" assez petit (en pratique $p \leq 0.1$) (ie une probabilité rare) on pourra approximer X par une loi de poisson de paramétre $\lambda = np$

  exemple

  $X \hookrightarrow B(n = 120, p = 0.05)$ on a $n \geq 30$ et $p \leq 0.1$,

  alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(6)$ *car* $\lambda = np = 120 \times 0.05 = 6$

2 LOIS DE PROBABILITE CONTINUE

2.1 La loi uniforme

On dit que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, $a \prec b$ (avec a,b des réelles), notée $X \hookrightarrow U_{[a,b]}$ si sa fonction de densité est définie par:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si \quad x \in [a, b] \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases} \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot 1_{[a,b]} \end{aligned}$$

De plus

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad et \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

et sa fonction de répartition est:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \prec a \\ \frac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad x \succ b \end{cases}$$

2.2 La loi exponentielle

On dit que X suit une loi exponentielle de paramétre λ,un réel strictement positif (ie $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$) , si sa fonction de densité est définie par:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases} \\ &= \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot 1_{[0,+\infty[} \end{aligned}$$

De plus

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad et \quad V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

et sa fonction de répartition est:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \prec 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Remarque

Cette densité de probabilité permet en général de modéliser des durées de vie d'êtres non soumis au vieillissement (par exemple, la durée de vie d'une bactérie ou des composants électroniques) ou des temps d'attente (par exemple, le temps d'attente entre deux signaux)

2.3 La loi normale ou la loi de Gauss

On dit que X suit une loi normale de paramétre (m, σ) avec $m \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma \succ 0$, notée: $X \hookrightarrow N(m, \sigma)$ si sa fonction de densité est définie par:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] \end{aligned}$$

avec $m = E(X), \quad V(X) = \sigma^2$

Preuve

Vérifions que $f(x)$ définie bien une fonction de densité (on utilisera pour cela un résultat d'analyse connu sous le nom de

l'intégrale de Gauss $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt = \sqrt{2\pi}$) ainsi:

$$f(x) \geq 0 \quad \textit{évident}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] \cdot dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt \quad \textit{on pose } t = \frac{x-m}{\sigma} \ \textit{ainsi } dt = \frac{1}{\sigma} dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

Remarques

- Si on pose $Z = \frac{X-m}{\sigma}$, alors Z est dite variable aléatoire centrée-réduite (car $E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$)
- Si X est une loi normale alors Z sera une loi normale centrée-réduite ou simplement Loi de Gauss avec une densité définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

- La loi Normale est une loi centrale dans la théorie des probabilités. Elle est notamment très utilisée en statistique. Une grandeur influencée par un grand nombre de paramètres indépendants est souvent modélisée par une loi normale.

- **Approximation d'une loi binomiale par une loi normale:**

  Si X est une binomiale de paramètres (n,p), pour un "n" assez grand (en pratique $n \geq 30$) et pour

$$\left\{\begin{array}{c} np \geq 5 \\ et \\ nq \geq 5 \end{array}\right. \quad ou \quad \left\{\begin{array}{c} p \prec 0.1 \\ et \\ npq \succ 5 \end{array}\right.$$

  alors X peut etre approximé par une loi normale aux paramètres: $X \hookrightarrow N(np, \sqrt{npq})$

  exemple: Si $X \hookrightarrow B(400, 0.8)$ on a: $n = 400 \geq 30$ de plus

$$\left\{\begin{array}{c} np \geq 5 \\ et \\ nq \geq 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} 320 \geq 5 \\ et \\ 80 \geq 5 \end{array}\right.$$

  alors $X \hookrightarrow N(320, 8)$ ie $m = E(X) = 320$ et $\sigma = \sqrt{V(X)} = 8$

- **Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale**

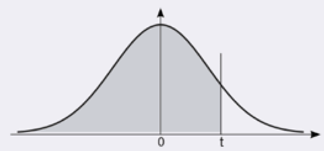
  Si X est une loi de Poisson de paramétre λ, pour un "n" assez grand (en pratique $n \geq 15$) alors X peut etre approximé par une loi normale de paramètres : $X \hookrightarrow N(\lambda, \sqrt{\lambda})$

2.4 Lecture de la table de la loi normale centrée réduite

$$Z \hookrightarrow N(0,1)$$

Dans tous les livres de probabilités, On aura la table de la loi normale centrée réduite

Table donnant P(Z<t) pour une variable aléatoire suivant N(0,1)



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs

t	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4	4,5
ϕ(t)	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,999928	0,999968	0,999997

qui représente les probabilités de la loi normale centrée réduite pour les $P(Z \prec z)$ en d'autre termes c'est la table de la fonction de répartition de la loi de Gauss.

En effet:

$$P(Z \prec z) = P(Z \leq z) = F_X(z)$$

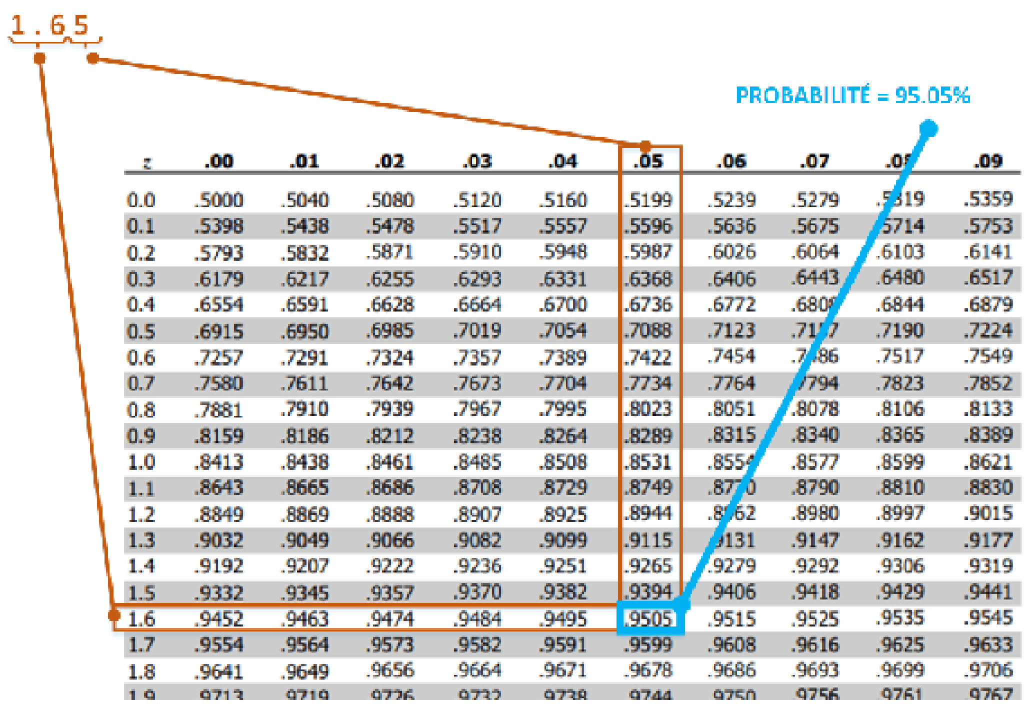
Rappel

$$Si \quad z \leq 0 \quad alors \quad F(z) = 1 - F(-z)$$

$$\begin{aligned} P(z &\in [a,b]) = P(z \in [a,b[) \\ &= P(z \in]a,b]) \\ &= P(z \in]a,b[) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Exemples
calculer les probabiltés suivantes:

1. $P(Z \leq 1.65) = F(1.65) = 0.9505$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

2. $P(Z \geq 1.65)$

$$P(Z \geq z) = P(Z \succ z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - F_X(z)$$

donc

$$\begin{aligned} P(Z &\geq 1.65) = 1 - P(Z \leq 1.65) \\ &= 1 - F_X(1.65) \\ &= 1 - 0.9505 \\ &= 0.0495 \end{aligned}$$

3. $P(Z \succ 1.07)$

$$\begin{aligned} P(Z &\succ 1.07) = 1 - P(Z \leq 1.07) \\ &= 1 - F_X(1.07) \\ &= 1 - 0.8577 \\ &= 0.1423 \end{aligned}$$

4. $P(z \leq -0.55)$

$$\begin{aligned} P(z &\leq -0.55) = F(-0.55) \\ &= 1 - F(0.55) \\ &= 1 - 0.7088 \\ &= 0.2912 \end{aligned}$$

5. $P(-2 \leq z \leq 1)$

$$\begin{aligned} P(-2 &\leq z \leq 1) = F(1) - F(-2) \\ &= F(1) - [1 - F(2)] \\ &= F(1) + F(2) - 1 \\ &= 0.8413 + 0.9772 - 1 \\ &= 0.8185 \end{aligned}$$

6. Soit T une loi normale de paramètres $(m = 3, \sigma = 3)$, $T \hookrightarrow N(5,3)$ calculer les probabilités suivantes:

   $P(T \succ 6)$, $P(4 \leq T \leq 6)$, $P(-1 \leq T \leq 11)$

   T n'étant pas une loi de Gauss et n'ayant pas la table de T, on est obligé de faire un changement de variable en posant

$$Z = \frac{T - m}{\sigma} = \frac{T - 5}{3}$$

   dans ce cas $Z \hookrightarrow N(0,1)$ ainsi on aura:

$$\begin{aligned} P(T &\succ 6) = P(\frac{T-5}{3} \succ \frac{6-5}{3}) \\ &= P(Z \succ \frac{1}{3}) \;\; avec \; Z = \frac{T-5}{3} \\ &= 1 - P(Z \leq \frac{1}{3}) = 1 - F(0.33) \\ &= 1 - 0.6293 \\ &= 0.3707 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(4 \leq T \leq 6) &= P(\frac{4-5}{3} \leq \frac{T-5}{3} \leq \frac{6-5}{3}) \\
&= P(-\frac{1}{3} \leq Z \leq \frac{1}{3}) \\
&= F(\frac{1}{3}) - F(-\frac{1}{3}) \\
&= F(\frac{1}{3}) - \left[1 - F(\frac{1}{3})\right] \\
&= 2F(\frac{1}{3}) - 1 = 2 \times 0.6293 - 1 \\
&= 0.2586
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(-1 \leq T \leq 11) &= P(\frac{-1-5}{3} \leq \frac{T-5}{3} \leq \frac{11-5}{3}) \\
&= P(-2 \leq Z \leq 2) \\
&= P(|Z| \leq 2) \\
&= 2F(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 \\
&= 0.9544
\end{aligned}
$$

Remarque

Il existe plusieurs autres lois de probabilité, on ne peut pas les cités toutes, on les verra au fur et a mesure en TD (exemples : Loi de Weibull, Loi de Khi-deux, Loi de student, loi de Raygleigh,.......)