Université Abou berkBelkaid Tlemcen (2019/2020)
Faculté des sciences
Département de mathématiques (MI)
TD N°5
W.BENYELLES

1 Exercice N°1

Un épicier reçoit un lot de pommes dont 25 % sont avariés. Il charge un employé de préparer des emballages de 5 pommes chacun. Celui-ci, négligent, ne se donne pas la peine de jeter les fruits avariés. Chaque client qui trouve, dans l'emballage qu'il achète, 2 fruits ou plus qui sont avariés, revient au magasin se plaindre.

1. Soit X le « nombre de pommes avariées dans un emballage ». Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Quelle est la probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier?
3. On pose Y la v.a.r qui représente "le nombre de client insatisfait". Si l'épicier a 100 clients qui achètent des pommes ce jour-là, combien y aurait-il de plaintes en moyenne, émanant de ces clients ?

2 Exercice N°2

Un canal de transmission d'information ne peut traiter que des 0 et des 1. A cause de perturbations dues à l'électricité statique chaque chiffre transmis l'est avec une probabilité d'erreur de 0,2. Admettons que l'on veuille transmettre un message important limité à un signal binaire. Pour éviter une erreur on transmettra 00000 au lieu de 0 et 11111 au lieu de 1. Si le récepteur décode suivant la règle de la majorité (ie 00011 sera 0), quelle est la probabilité que le message soit mal interprété?

On pose X la vraible qui représente "le nombre de chiffres transmis de façon érroné"

3 Exercice N°3

La longueur des pièces produites par une machine de type A varie selon une loi normale avec espérance 8 mm et variance 4 mm, et la longueur de celles produites par une machine de type B varie selon une loi normale avec espérance 7,5 mm et variance 1 mm.

1. Si vous voulez produire des pièces de longueurs $8 \pm 1mm$, quel type de machine choisiriez vous?
2. Si la moyenne des longueurs produites par la machine A reste 8 mm, quelle doit être sa variance pour qu'elle ait la même performance que la machine B?

4 Exercice N°4

Sur une route principale où la vitesse est limitée à 80 km/h, un radar a mesuré la vitesse de toutes les automobiles pendant une journée. En supposant que les vitesses recueillies soient distribuées selon une loi normale avec une moyenne de 72km/h et un écart-type de 8 km/h,.

1. Quelle est la proportion de conducteurs qui devront payer une amende pour excès de vitesse?
2. Sachant qu'en plus de l'amende, un excès de plus de 30 km/h implique un retrait de permis, quelle est la proportion des conducteurs qui vont se faire retirer le permis parmi ceux qui vont avoir une amende?

5 Exercice N°5

Soit X $\hookrightarrow$N (0,1) .Définissons $Y = X^2$. Trouver la fonction de répartition de Y et sa densité cette loi est dite (chi deux à un degré de liberté)

6 Exercice N°6

Soit X $\hookrightarrow$U[0,1] .Définissons Y= $-\frac{1}{\lambda}$ ln(X).Trouver la fonction de répartition de Y et sa densité

7 Exercice N°7

Soient n parts budgétaires indépendantes X1, ...,Xn suivant une loi uniforme dans l'intervalle [0, 1]. Calculer la fonction de répartition et la densité de Y = min(X1, ...,Xn)

8 Solutions

8.1 Exercice N1

1. Si X est la variable qui représente le « nombre de pommes avariées dans un emballage » alors $X \hookrightarrow B\,(5,\ 0.25)$

   donc X est une binomiale car :

   - on a une expérience a deux résulats possibles (où la pomme est avariée ou pas)
   - chaque pomme est indépendante (donc chaque expérience l'est)
   - on répète l'expérience n fois (ici 5 fois)
   - la probabilité que la pomme soit avariée est de 0.25

   Pour tous ceci X est une binomiale de paramètres (n,p) = (5, 0.25)

   sa loi est:

$$P(X = k) = \ C_5^k\ (0.25)^k (0.75)^{5-k} \quad k \in \{0, 1, ..., 5\}$$

2. La probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier est $P(X \geq 2)$ car un client se plaint s'il trouve au moins 2 pommes avariées.

$$\begin{aligned} P(X &\geq 2) = 1 - P(X \prec 2) \\ &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - \left[(0.75)^5 + 5 \times 0.25 \times (0.75)^4\right] \\ &= \frac{47}{128} \end{aligned}$$

3. Soit Y la variable aléatoire « nombre de clients non satisfaits ». Elle suit une loi binomiale de paramétres $(n, p) = (100, \frac{47}{128})$ en effet car:

   - on a une expérience a deux résulats possibles (où le client est satisfait ou pas)
   - chaque client étant indépendant de l'autre (alors chaque expérience l'est)
   - on répète l'expérience n fois (ici 100 fois)
   - la probabilité que le client ne soit pas satisfait est de $\dfrac{47}{128}$

   $Y \hookrightarrow B(100,\ \frac{47}{128})$ sa loi est:

$$P(Y = k) = C_{100}^k \left(\frac{47}{128}\right)^k \left(\frac{81}{128}\right)^{100-k} \qquad k \in \{0, 1, ..., 100\}$$

   on cherche la moyenne des clients qui vont venir se plaindre donc

$$E(Y) = np = 100 \times \frac{47}{128} \simeq 36.7$$

   conclusion environ 36 ou 37 clients viendront se plaindre.

8.2 Exercice N°2

1. On pose X la variable aléatoire qui représente « le nombre de chiffres transmis de façon érroné », Xsuit une loi binomiale de paramétres (5, 0,2) en effet:

   - on a une expérience a deux résulats possibles (où le chiffre est mal transmis ou pas)
   - chaque chiffres étant indépendant de l'autre (alors chaque expérience l'est)
   - on répète l'expérience n fois (ici 5 fois)
   - la probabilité que le chiffre soit mal transmis est de 0.2

   saloi est: σ

   $$P(X = k) = C_5^k \, (0.2)^k \, (0.8)^{5-k} \quad k \in \{0, 1, ..., 5\}$$

2. La probabilité que le message soit mal interprété est égale à la probabilité de recevoir au moins 3 chiffres incorrects.

   $$\begin{aligned} P(X &\geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= C_5^3 \, (0.2)^3 \, (0.8)^2 + C_5^4 \, (0.2)^4 \, (0.8) + (0.2)^5 \\ &= 0.058 \end{aligned}$$

8.3 Exercice N°3

Soient X (respectivement Y) la longueur des piéces produites par la machine A (respectivement B). Les variables aléatoires X et Y suivent une loi normale de paramétres (8,2) et (1.5,1).ie $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8, 2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(7.5, 1)$

1. On cherche la machine qui a la plus grande probabilité de fabriquer des piéces dont la longueur appartient à l'intervalle $[7, 9]$

   Pour la machine A

   $$\begin{aligned} P(7 &\leq X \leq 9) = P(\frac{7-8}{2} \leq \frac{X-8}{2} \leq \frac{9-8}{2}) \\ &= P(-0.5 \leq Z \leq 0.5) \ avec \ Z = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ &= 2F_X(0.5) - 1 \\ &\simeq 0.38 \end{aligned}$$

   Pour la machine B

   $$\begin{aligned} P(7 &\leq Y \leq 9) = P(\frac{7-7.5}{1} \leq \frac{X-7.5}{1} \leq \frac{9-7.5}{1}) \\ &= P(-0.5 \leq Z \leq 1.5) \ avec \ Z = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ &= F\,(1.5) - F\,(-0.5) \\ &\simeq 0.62 \end{aligned}$$

   selon les résultats on choisira la machine B car elle est meilleure

2. Soit V une nouvelle variable aléatoire qui décrit la taille des piéces produites par la machine A. Cette variable a la meme espérance que X et on cherche sa variance σ^2.de telle sorte que les machines soient de qualité égale. On veut donc

$$P(7 \leq V \leq 9) = 0.62 \quad avec\ V \hookrightarrow \mathcal{N}(8, \sigma)$$

$$\begin{aligned} Or\ P(7 &\leq V \leq 9) = P(\frac{7-8}{\sigma} \leq \frac{V-8}{\sigma} \leq \frac{9-8}{\sigma}) \\ &= P(\frac{-1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{1}{\sigma})\ avec\ Z = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \\ &= 2F_X(\frac{1}{\sigma}) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} donc\ P(7 &\leq V \leq 9) = 0.62 \iff 2F_X(\frac{1}{\sigma}) - 1 = 0.62 \\ &\implies F_X(\frac{1}{\sigma}) = 0.81\ on\ utilisera\ la\ table\ \mathcal{N}(0,1) \\ &\implies \frac{1}{\sigma} = 0.88 \\ &\implies \sigma = 1.136 \end{aligned}$$

Donc pour que la machine A ait la meme probabilité que la machine B, la variabe V devrait avoir un écart type $\sigma = 1.136$

8.4 Exercice N°4

Soit X la variable aléatoire représentant la vitesse mesurée. Cette variable aléatoire suit une loi normale.$X \hookrightarrow \mathcal{N}(72, 8)$

1. La proportion de conducteurs qui recevront une amende est égale à la probabilité que X soit plus grand que 80 donc:

$$\begin{aligned} P(X &\geq 80) = P(\frac{X-72}{8} \geq \frac{80-72}{8}) \\ &= P(Z \geq 1)\ avec\ Z = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \\ &= 1 - P(Z \leq 1) \\ &= 1 - F(1) \\ &\simeq 0.16 = 16\% \end{aligned}$$

2. On cherche la probabilité conditionnelle de mesurer une vitesse supérieure à 110 en sachant que le conducteur est déjà passible d'une amende. On

calcule donc

$$\begin{aligned}
P(X \geq 110 \ / \ X \geq 80) &= \frac{P(X \geq 110 \cap \ X \geq 80)}{P(X \geq 80)} \\
&= \frac{P(X \geq 110)}{P(X \geq 80)} \\
&= \frac{1 - F(4.75)}{1 - F(1)} \simeq 0
\end{aligned}$$

La probabilité est presque nulle, donc l'evenement est très rare.

8.5 Exercice N°5

On a X $\hookrightarrow$N (0,1) .On pose Y = X^2 et on doit définir la loi de Y

méthode 1 (a faire appliquer théorme vu en cours chapitre transformation de variable aléatoire)

méthode 2 on utilise la fonction de répartion de la v.a.r Y

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(X^2 \leq y) \\
&= P(|X| \leq \sqrt{y}) \\
&= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\
&= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})
\end{aligned}$$

Pour obtenir la fonction de densité , il suffit de dérivée par rapport a y

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left[F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) \ car \ la \ fonction \ est \ paire
\end{aligned}$$

f_X étant la densité d'une loi normale centrée réduite on aura:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp(-\frac{y}{2})$$

8.6 Exercice N°6

On a X $\hookrightarrow$U[0,1] .On pose Y= - $\frac{1}{\lambda}$ ln(X) et on doit définir la loi de Y

méthode 1 (a faire appliquer théorme vu en cours chapitre transformation de variable aléatoire) méthode 2 on utilise la fonction de répartion de la v.a.r Y

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

Si $y \leq 0$ alors

$$F_Y(y) = 0$$

Si $y \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(\frac{-1}{\lambda}\ln(x) \leq y) \\ &= P(\ln(x) \geq -\lambda y) \\ &= P(X \geq \exp(-\lambda y)) \\ &= 1 - F_X(\exp(-\lambda y)) \\ &= 1 - \exp(-\lambda y) \end{aligned}$$

on utilisera la définition de la fonction de répartition de la loi uniforme (vu en cours). La fonction de densité etant la dérivée de la fonction de répartition, on aura:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda y} & si \quad y \geq 0 \\ 0 & si \quad y \leq 0 \end{cases}$$

ainsi $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ est une loi exponentielle de paramètre λ

8.7 Exercice N°7

Soient X1, ...,Xn des variables indépendantes de loi uniforme sur [0, 1]. On pose Y = min(X1, ...,Xn)

utilisons la fonction de répartition de Y (pour $0 \leq y \leq 1$)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(\min(X_1, ...X_n) \leq y) \\ &= 1 - P(\min(X_1, ...X_n) \geq y) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq y) \quad (*) \\ &= 1 - (1-y)^n \quad (**) \end{aligned}$$

$(*)$ Si min(Xi) est supérieur à y, cela signifie que le plus petit des Xi est supérieur à y, ou encore que tous les Xi sont plus grands que y, de plus les variables sont indépendantes ainsi

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

$(**)$ les Xi étant des lois uniformes on utilisera la définition de la fonction de répartition (vu en cours)

En dérivant la fonction de répartition on aura:

$$f_Y(y) = n \cdot (1-y)^{n-1} \quad si\ 0 \prec y \prec 1$$