Chapitre 3 : Théorie du contrôle optimal non linéaire (3ème partie).

3.2.3°) Problèmes de contrôle optimal de type C

Les problèmes de contrôle optimal de type C sont de la forme

$$
\text{C.O.C}\quad
\begin{cases}
\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, T] \\
x(t_0) = x_0 \\
x_i(T) \text{ libre pour } 1 \leq i \leq n_1, \\
x_j(T) \geq B_j \text{ , avec } B_j \text{ fixé et } n_1+1 \leq j \leq n_1+n_2, \\
x_\ell(T) = B_\ell \text{ avec } B_\ell \text{ fixé et } n_1+n_2+1 \leq \ell \leq n, \\
\inf\limits_{u \in \mathcal{U}_{adm}} C(u),
\end{cases}
$$

avec $C(u) = \Psi(T, x(T)) + \displaystyle\int_{t_0}^{T} g(t, x(t), u(t))\,dt,$

et T est libre ou fixé.

Définition (Hamiltonien) : Le Hamiltonien associé au système de contrôle optimal (C.O.C) est l'application

$$H : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \{0, 1\} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$ telle que

$$H(t, x, \lambda, \lambda_0, u) = \langle \lambda, f(t, x, u) \rangle + \lambda_0 \, g(t, x, u).$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3.6. : Principe du maximum de Pontryaguine

On considère le problème de contrôle optimal (C.O.C) et on suppose que les hypothèses $H_i)$ pour $i = 1, \ldots, 7$ sont satisfaites.

Si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée. Alors il existe une application $\lambda : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, et un réel $\lambda_0 \geq 0$, tels que

i) $(\lambda, \lambda_0) \neq (0_{\mathbb{R}^n}, 0)$ (C'est-à-dire le couple (λ, λ_0) est non trivial).

ii) $$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x^*(t), \lambda(t), \lambda_0, u^*(t)) \text{ p.p. } t \in [t_0, T]$$

$$= f(t, x^*(t), u^*(t)) \text{ p.p. } t \in [t_0, T].$$

$$x^*(t_0) = x_0$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), \lambda(t), \lambda_0, u^*(t)) \text{ p.p. } t \in [t_0, T]$$

$$= -{}^t\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t))\right] \cdot \lambda(t) - \lambda_0 \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t)),$$

p.p. $t \in [t_0, T]$.

iii) La condition de transversalité est donnée par

1°) Pour $1 \leq i \leq n_1$, $\lambda_i(T) = \lambda_0 \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_i}(T, x^*(T))$

2°) Pour $n_1 + 1 \leq j \leq n_1 + n_2$, on a

$$\lambda_j(T) \geq \lambda_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}(T, x^*(T)),$$

$$x_j^*(T) \geq \beta_j,$$

$\boxed{3.74°}$

et

$$\left(\lambda_j(T) - \lambda_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}(T, x^*(T))\right) \cdot \left(x_j^*(T) - \beta_j\right) = 0$$

iv) $u^*(t) \in \underset{v \in U}{\arg\min}\ H(t, x^*(t), \lambda(t), \lambda_0, v)$ p.p. $t \in [t_0, T]$.

c'est-à-dire

$$H(t, x^*(t), \lambda(t), \lambda_0, u^*(t)) = \min_{v \in U} H(t, x^*(t), \lambda(t), \lambda_0, v) \quad \text{p.p. } t \in [t_0, T].$$

v) Si de plus le temps final T est libre, on a

$$H(T, x^*(T), \lambda(T), \lambda_0, u^*(T)) = -\lambda_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t}(T, x^*(T)).$$

Un quadruplet $(x^*, u^*, \lambda, \lambda_0)$ satisfait les conditions ci- ~~dessus~~ dessus est appelé une extrémale.

Remarque : Extrémales normales et anormales.

Comme $(\lambda, \lambda_0) \neq (0_{\mathbb{R}^n}, 0)$, deux cas peuvent se produire

i) $\lambda_0 \neq 0$, alors on a $\lambda_0 = 1$.
Dans ce cas, on dit que l'extrémale est normale.

$\boxed{3.75°}$

ii) Si $\lambda_0 = 0$, on a necessairement $\lambda \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, on dit que l'extrémale est anormale.

<u>Remarque</u> : Dans le cas où $U = \mathbb{R}^k$, c'est-à-dire, lorsqu'il n'ya pas de contrainte sur le contrôle, la condition iv) du théorème précédent devient $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

Le résultat suivant donne des conditions suffisantes d'existence d'un contrôle optimal.

Théorème 3.7. : (Théorème de Mangasarian)

Supposons que les hypothèses du Théorème 3.6 sont satisfaites et supposons que u^* est un contrôle optimal avec $\lambda_0 = 1$, c'est-à-dire que l'extrémale est normale. Alors le principe du maximum de Pontryaguine (PMP) fournit une condition suffisante d'optimalité sous les hypothèses suivantes:

i) $U_{adm} = L^2([t_0, T]; U)$, avec T fixé et U un sous ensemble convexe fermé non vide;

ii) La fonction $(x, u) \longmapsto H(t, x, \lambda, 1, u)$ est convexe pour presque tout $t \in [t_0, T]$.

Exemples

Exemple 1 : Résoudre le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x + u, \\ x(0) = 0, \quad x(1) \geq 1, \\ \min\limits_{u \in [-1,1]} \int_0^1 -x(t)\, dt. \end{cases}$$

Solution : On définit le Hamiltonien H par

$$H(t, x, \lambda, \lambda_0, u) = \lambda.(x + u) - \lambda_0 x$$

D'après le principe du maximum de Pontryaguine Théorème 3.6 si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors il existe une application

$\lambda : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et un réel $\lambda_0 \in \{0,1\}$ tels que

i) $(\lambda, \lambda_0) \neq (0,0)$,

ii) $$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) + u^*(t), \ t \in [0,1] \\ x^*(0) = 0 \\ \dot{\lambda}(t) = -\lambda(t) + \lambda_0, \ t \in [0,1]. \end{cases}$$

iii) $\lambda(1) \geq 0$, $x^*(1) \geq 1$,

et $$\lambda(1) \cdot (x^*(1) - 1) = 0.$$

iv) $$H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, u^*) = \min_{v \in [-1,1]} H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, v).$$

C'st-à-dire,
$$\lambda(t).(x^*(t) + u^*(t)) - \lambda_0 x^*(t) = \min_{v \in [-1,1]} [\lambda(t).(x^*(t)+v) - \lambda_0 x^*(t)].$$

C'st-à-dire,
$$\lambda(t) u^*(t) = \min_{v \in [-1,1]} [\lambda(t). v].$$

Ce qui donne,
$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & \text{Si } \lambda(t) > 0, \\ +1 & \text{Si } \lambda(t) < 0, \\ \in [-1,1] & \text{Si } \lambda(t) = 0. \end{cases}$$

$\boxed{3.78°}$

Montrons d'abord que l'extrémale est normale.

Si $\lambda_0 = 0$, alors d'après ii), on a

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda(t),$$

ce qui donne,

$$\lambda(t) = k\, e^{-t}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Maintenant d'après la condition iii) $\lambda(1) \geq 0$, on obtient

$$u^*(t) = -1, \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Par suite d'après ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) - 1, & t \in [0,1], \\ x^*(0) = 0, \end{cases}$$

ce qui donne,

$$x^*(t) = -e^t + 1, \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Alors,

$$x^*(1) = -e + 1 < 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse $x^*(1) \geq 0$.

En conclusion toute extrémale est normale et par conséquent $\lambda_0 = 1$.

$\boxed{3.79°}$

Maintenant d'aprés ii), on a

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda(t) + 1, \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Ce qui donne,

$$\lambda(t) = Ae^{-t} + 1, \text{ pour tout } t \in [0,1],$$

et comme d'aprés la condition iii) $\lambda(1) \geq 0$, on obtient

$$A \geq -e.$$

Par suite on a le tableau de variations suivant selon le signe de A.

<u>Cas 1</u> : $A > 0$

t	0		1
$\dot{\lambda}(t)$		$-$	
$\lambda(t)$	$A+1$	$\searrow$	$Ae^{-1}+1$.

Pour ce cas, on a $\lambda(t) > 0$, pour tout $t \in [0,1]$.

Alors,

$$u^*(t) = -1, \text{ pour tout } t \in [0,1],$$

ce qui entraîne que $x^*(t) = -e^{t} + 1$, pour tout $t \in [0,1]$.

Alors $x^*(1) = -e + 1 < 0$, ce qui contredit l'hypothèse $x^*(1) \geq 0$.

$\boxed{3.80°}$

Cas 2 : $A < 0$.

t	0		1
$\dot{\lambda}(t)$		$+$	
$\lambda(t)$	$A+1$	$\nearrow$	$Ae^{-1}+1$

D'aprés ce cas, on distingue deux sous cas.

Premier sous cas : $A+1 \geq 0$

Pour ce cas, on a $\lambda(t) > 0$, pour tout $t \in]0,1]$.
Alors $u^*(t) = -1$, pour tout $t \in [0,1]$, ce qui entraîne que $x^*(t) = -e^t + 1$, pour tout $t \in [0,1]$. Alors $x^*(1) = -e + 1 < 0$, ce qui contredit l'hypothèse $x^*(1) \geq 0$.

Deuxième sous cas : $A+1 < 0$.

Pour ce cas, on a $\lambda(t) < 0$, pour tout $t \in [0,c[$ et $\lambda(t) \geq 0$, pour tout $t \in]c,1]$, avec $c \in]0,1[$.

$\boxed{3.81°}$

Alors,

$$u^*(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } t \in [0, c[, \\ -1 & \text{si } t \in [c, 1]. \end{cases}$$

Maintenant comme

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) + u^*(t) \\ x^*(0) = 0, \end{cases}$$

on obtient

$$x^*(t) = \begin{cases} e^t - 1 & \text{si } t \in [0, c[, \\ k e^t + 1 & \text{si } t \in [c, 1]. \end{cases}$$

D'après la condition iii), on a

$$\lambda(1) \geq 0, \quad x^*(1) \geq 0,$$

et $\quad \lambda(1).\left(x^*(1) - 1\right) = 0.$

Mais $\lambda(1) = A e^{-1} + 1 > 0$ d'après le tableau de variations, ce qui donne

$$x^*(1) = 1.$$

$\boxed{3.82°}$

Alors
$$ke + 1 = 1.$$
C'est-à-dire,
$$k = 0,$$
Ce qui entraine que,
$$x^*(t) = \begin{cases} e^t - 1 & \text{si } t \in [0, c[, \\ 1 & \text{si } t \in [c, 1]. \end{cases}$$
Comme x^* est une fonction continue, on a
$$e^c - 1 = 1.$$
C'est-à-dire, $\quad c = \ln 2.$

En conclusion : La trajectoire optimale est :
$$x^*(t) = \begin{cases} e^t - 1 & \text{si } t \in [0, \ln 2[, \\ 1 & \text{si } t \in [\ln 2, 1], \end{cases}$$
et le contrôle optimal u^* est :
$$u^*(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } t \in [0, \ln 2[\\ -1 & \text{si } t \in [\ln 2, 1]. \end{cases}$$

$\boxed{3.83°}$

Exemple 2 : Résoudre le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \ t \in [0,2], \\ x(0) = 1, \quad x(2) \geq 0, \\ \min\limits_{u \in [-1,1]} \int_0^2 -x(t)\,dt. \end{cases}$$

Solution : On définit le Hamiltonien H par

$$H(t, x, \lambda, \lambda_0, u) = \lambda \cdot u - \lambda_0 x.$$

D'aprés le principe du maximum de Pontryaguine Théorème 3.6 si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors il existe une application $\lambda : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ et un réel $\lambda_0 \in \{0,1\}$ tels que

i) $(\lambda, \lambda_0) \neq (0,0)$,

ii) $\begin{cases} \dot{x}^*(t) = u^*(t), \ t \in [0,2], \\ x^*(0) = 1, \\ \dot{\lambda}(t) = \lambda_0, \ t \in [0,2], \end{cases}$

iii) $\lambda(2) \geq 0$, $x^*(2) \geq 0$,

et $\lambda(2)\, x^*(2) = 0$,

iv) $$H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, u^*) = \min_{v \in [-1,1]} H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, v).$$

C'est-à-dire,

$$\lambda(t)\, u^*(t) - \lambda_0 x^*(t) = \min_{v \in [-1,1]} \left(\lambda(t) v - \lambda_0 x^*(t)\right).$$

C'est-à-dire,

$$\lambda(t)\, u^*(t) = \min_{v \in [-1,1]} \lambda(t)\, v.$$

Ce qui donne,

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } \lambda(t) > 0, \\ +1 \text{ si } \lambda(t) < 0, \\ \in [-1,1] \text{ si } \lambda(t) = 0. \end{cases}$$

Montrons d'abord que l'extrémale est normale.

Si $\lambda_0 = 0$, alors d'après ii), on a

$$\dot{\lambda}(t) = 0, \text{ pour tout } t \in [0, 2].$$

ce qui donne,

$$\lambda(t) = k, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Mais comme dans la condition iii) $\lambda(2) \geq 0$, on obtient

$$\lambda(t) = k \text{ avec } k \in \mathbb{R}^+.$$

Par suite, $u^*(t) = -1$, pour tout $t \in [0, 2]$.

Alors d'aprés ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = -1, & t \in [0,2] \\ x^*(0) = 1, \end{cases}$$

ce qui donne, $x^*(t) = -t+1$, $t \in [0, 2]$.

Alors, $x^*(2) = -1 < 0$,

ce qui contredit l'hypothèse $x^*(2) \geq 0$.

En conclusion toute extrémale est normale

et par conséquent $\lambda_0 = 1$.

$\boxed{3.86°}$

Maintenant d'aprés ii), on a

$$\dot{\lambda}(t) = 1, \text{ pour tout } t \in [0, 2].$$

Ce qui donne,

$$\lambda(t) = t + \alpha, \text{ pour tout } t \in [0, 2],$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$,

et comme d'aprés la condition iii) $\lambda(2) \geq 0$, on obtient

$$\alpha \geq -2.$$

Comme on ne peut pas avoir $\lambda(t) > 0$, pour tout $t \in [0, 2[$ (car si $\lambda(t) > 0$, pour tout $t \in [0, 2[$, alors $u^*(t) = -1$, pour tout $t \in [0, 2]$ et par suite on obtient une contradiction voir la preuve du cas de l'existence d'une extrémale normale).

Par suite, on a :

$$\lambda(t) < 0, \text{ pour tout } t \in [0, t_c[, \ \lambda(t_c) = 0$$

$$\text{et } \lambda(t) > 0, \text{ pour tout } t \in]t_c, 2],$$

ou

$$\lambda(t) < 0, \text{ pour tout } t \in [0, 2[\text{ et } \lambda(2) = 0.$$

Si $\lambda(t) < 0$, pour tout $t \in [0, t_c[$, $\lambda(t_c) = 0$

et $\lambda(t) > 0$, pour tout $t \in]t_c, 2]$,

on a

$$u^*(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } t \in [0, t_c[, \\ -1 & \text{si } t \in [t_c, 2]. \end{cases}$$

Si $\lambda(t) < 0$, pour tout $t \in [0, 2[$ et $\lambda(2) = 0$,

on a

$$u^*(t) = 1, \text{ pour tout } t \in [0, 2].$$

Maintenant comme, on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = u^*(t), \; t \in [0, 2], \\ x^*(0) = 1, \; x^*(2) \geq 0, \end{cases}$$

et il faut déterminer u^* qui minimise le coût $\int_0^2 -x(t)\,dt$.

$\boxed{3.88^\circ}$

Alors il faut choisir

$$u^*(t) = 1, \text{ pour tout } t \in [0,2],$$

et la trajectoire optimale est donnée par

$$x^*(t) = t + 1, \text{ pour tout } t \in [0,2].$$

<u>Remarque</u> : Le contrôle optimal

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [0, \frac{3}{2}[, \\ +1 & \text{si } t \in [\frac{3}{2}, 2], \end{cases}$$

avec la trajectoire optimale

$$x^*(t) = \begin{cases} -t + 1 & \text{si } t \in [0, \frac{3}{2}[, \\ t - 2 & \text{si } t \in [\frac{3}{2}, 2], \end{cases}$$

sont solutions du problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \ t \in [0,2], \\ x(0) = 1, \quad x(2) \geq 0, \\ \max\limits_{u \in [-1,1]} \displaystyle\int_0^2 -x(t)\,dt. \end{cases}$$

$\boxed{3.89°}$

<u>Remarque</u> : Si on remplace dans le problème (C.O.C) la condition $x_j(T) \geq \beta_j$, avec β_j fixé et $n_1+1 \leq j \leq n_1+n_2$ par $x_j(T) \leq \beta_j$, avec β_j fixé et $n_1+1 \leq j \leq n_1+n_2$, alors la condition de transversalité iii) 2°) est donnée par

Pour $n_1+1 \leq j \leq n_1+n_2$, on a

$$\lambda_j(T) \leq \lambda_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}(T, x^*(T)),$$

$$x_j^*(T) \leq \beta_j,$$

et

$$\left(\lambda_j(T) - \lambda_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}(T, x^*(T))\right) \cdot \left(\beta_j - x_j^*(T)\right) = 0.$$

<u>Exercice</u> : Résoudre le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \ t \in [0,4], \\ x(0) = 1, \ x(4) \leq 1 \\ \min\limits_{u \in [-1,1]} \int_0^4 -x(t)\,dt. \end{cases}$$