Méthode de sous et sur solutions pour la résolution des problèmes elliptiques

Mme Merzagui

June 4, 2020

1 Introduction

Après la Méthode du point fixe,la Méthode de monotonie, nous achevons la partie Techniques non variationnelles pour la résolution des problèmes elliptiques, par l'introduction de :

- Méthode de sous et sur solutions.

-Non existence de solutions

La méthode de sous et sursolution est présentée dans ce cours pour la résolution de l'edp elliptique

$$Lu = f(u) \text{ dans } \Omega \tag{1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,un ouvert borné. Nous considérons deux cas : le cas de solution classique et le cas de solution faible.

La notion de non existence de solution sera traité pour un problème de Dirrichlet associé au Laplacien.

2 Méthode des sur- et sous-solutions

2.1 Méthode des sur- et sous-solutions fortes

Le problème est le suivant. Soit

$$L = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(.) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(.) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(.) \tag{2}$$

un opérateur elliptique à coefficients $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, où Ω est un ouvert de classe $C^{2,\alpha}$. On se donne une fonction f telle que

$$f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est localement lipschitzienne} \tag{3}$$

et l'on cherche à résoudre le problème aux limites, $u \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$,

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x, u(x)) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

Definition 1 *On dit que $\overline{u}$ (resp. $\underline{u}$) est une sur-solution (resp. sous-solution) si $\overline{u}$ (resp. $\underline{u}$) appartient à $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^{2}\left(\Omega\right)$ et vérifie $Lu\geq f(x,u)$ (resp. $Lu\leq f(x,u)$) dans Ω et $\overline{u}\geq 0$(resp. $\underline{u}\leq 0$) sur $\partial\Omega$.*

Theorem 2 *S'il existe une sur-solution $\overline{u}$ et une sous-solution $\underline{u}$ telles que $\overline{u}\geq\underline{u}$. Alors le problème (4) admet une solution maximale $\bar{u}^{*}$ et une solution minimale $\underline{u}^{*}$ telles que $\overline{u}\geq\bar{u}^{*}\geq\underline{u}^{*}\geq\underline{u}$ et il n'existe pas de solution u comprise entre $\overline{u}$ et $\underline{u}$ telle que $u(x)>\bar{u}^{*}(x)$ ou $u(x)<\underline{u}^{*}(x)$ en un point x de Ω.*

Pour démontrer ce théorème on établit des résultats auxiliaires énoncés sous forme de lemmes.

Lemme1:

Il existe une constante $M>0$ telle que les deux suites $\overline{u}_n$ et $\underline{u}_n$ définies par

$$\left\{\begin{array}{c}\overline{u}_0=\overline{u}\\ L\overline{u}_{n+1}+M\overline{u}_{n+1}=f\left(x,\overline{u}_n\right)+M\overline{u}_n\quad\text{dans }\Omega\\ \overline{u}_{n+1}=0\qquad\quad\text{sur }\partial\Omega\end{array}\right.,$$

et

$$\left\{\begin{array}{c}\underline{u}_0=\underline{u}\\ L\underline{u}_{n+1}+M\underline{u}_{n+1}=f\left(x,\underline{u}_n\right)+M\underline{u}_n\quad\text{dans }\Omega\\ \underline{u}_{n+1}=0\qquad\quad\text{sur }\partial\Omega\end{array}\right.,$$

convergent simplement dans $\overline{\Omega}$.

Preuve du lemme 1.

Soit $m=\max\left\{\|\overline{u}\|_{C^0(\overline{\Omega})},\|\underline{u}\|_{C^0(\overline{\Omega})}\right\}$. On considère le compact $K=\overline{\Omega}\times[-m,m]$.Par (3),il existe donc une constante λ telle quepour tous (y,t) et $(y\prime,t\prime)$ dans K,

$$|f(y,t)-f(y',t\prime)|\leq\lambda(|y-y\prime|+|t-t\prime|).$$

Considérons $M=\lambda+1$.Montrons alors que la fonction

$$\widetilde{f}(x,s):=f(x,s)+Ms$$

est croissante par rapport à sa deuxième variable s pour (x,s) dans K. Soit $s,s\prime\in[-m,m]$ avec $s\geq s\prime$. Comme

$$|f(x,s)-f(x,s')|\leq\lambda|s-s\prime|,$$

on alors,

$$\widetilde{f}(x,s)-\widetilde{f}(x,s')\geq(M-\lambda)(s-s\prime)=s-s'\geq 0.$$

Notons que si $v\in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, alors $x\rightsquigarrow\widetilde{f}(x,v\left(x\right))$ appartient aussi à $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. En effet, on a

$$\begin{aligned}|\widetilde{f}(x,v\left(x\right))-\widetilde{f}(y,v\left(y\right))| &\leq \lambda\left(|x-y|+|v(x)-v(y)|\right)+M|v(x)-v(y)|\\ &\leq C(|x-y|+|x-y|^{\alpha})\end{aligned}$$

où C dépend de λ, M et $\|v\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$.
Par conséquent, pour $x \neq y$, on déduit que

$$\frac{|\widetilde{f}(x,v\left(x\right))-\widetilde{f}(y,v\left(y\right))|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C(|x-y|^{1-\alpha}+1),$$

et le membre de droite est borné sur $\overline{\Omega}$.
Posons $\widetilde{L}u = Lu + Mu$, on voit que la suite $\overline{u}_n$ est définie par

$$\begin{cases} \overline{u}_0 = \overline{u} \\ \overline{u}_{n+1} = T\left(\overline{u}_n\right) \end{cases}$$

où l'application $T : C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ est bien définie pour tout $0 < \alpha < 1$ par

$$\begin{cases} \widetilde{L}\left(T\left(v\right)\right) = \widetilde{f}(x,v\left(x\right)) & \text{dans } \Omega \\ T\left(v\right) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

par (3) et donc la croissance de$\widetilde{f}$ et la théorie d'existence et d'unicité dans les espaces de Hölder.
Remarque : si $\underline{u} \leq v \leq \overline{u}$, alors $\underline{u} \leq u = T\left(v\right) \leq \overline{u}$. En effet,puisque $\widetilde{f}$ est croissante par rapport à son deuxième argument sur le compact K, on a

$$\begin{cases} \widetilde{L}\left(u-\overline{u}\right) = \widetilde{f}\left(x,v\right) - \widetilde{L}\left(\overline{u}\right) \leq \widetilde{f}\left(x,v\right) - \widetilde{f}\left(x,\overline{u}\right) \leq 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \qquad u-\overline{u} = -\overline{u} < 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Par le principe du maximum fort, il vient $u \leq \overline{u}$. De même, on montre que $\underline{u} \leq u$.
Appliquant la **remarque** précédente à la suite $\left(\overline{u}_n\right)_n$ et raisonnant par récurrence, on voit immédiatement que cette suite est bien définie et telle que $\underline{u} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}$ pour tout n. Montrons par récurrence qu'elle est décroissante.
On a bien $\overline{u}_1 \leq \overline{u}_0$
Supposons que $\overline{u}_n \leq \overline{u}_{n-1}$. Reprenant le raisonnement précédent, il vient

$$\begin{cases} \widetilde{L}\left(\overline{u}_{n+1}-\overline{u}_n\right) = \widetilde{f}\left(x,\overline{u}_n\right) - \widetilde{f}\left(x,\overline{u}_{n-1}\right) \leq 0 & \text{dans } \Omega \\ \overline{u}_{n+1}-\overline{u}_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

d'où,par principe du maximum fort, $\overline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_n$
Pour chaque $x \in \Omega$, la suite $\left(\overline{u}_n(x)\right)_n$ est donc décroissante et minorée. Elle est par conséquent convergente.
On montre de même que la suite $\left(\underline{u}_n(x)\right)_n$ est croissante et majorée donc convergente pour tout $x \in \Omega$.
On note $\underline{u}^*$ et $\overline{u}^*$ les limites ponctuelles des suites $\left(\underline{u}_n\right)_n$ et $\left(\overline{u}_n\right)_n$ ∎

Lemme 2: $\underline{u}^* \leq \overline{u}^*$

Preuve du lemme 2. On montre comme précédemment par récurrence sur k et par le principe du maximum que pour tout couple d'entiers (k,n), $\underline{u}_k \leq \overline{u}_n$.
∎

Lemme3

Les limites $\underline{u}^*$ *et* $\overline{u}^*$ appartiennent à $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

Lemma 3 ***Preuve du lemme3.***
On procède par estimations. Comme $\underline{u} \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}$ *et que* $\widetilde{f}$ *est croissante par rapport à sa deuxième variable, on voit que* $\widetilde{f}(x,\underline{u}) \leq \widetilde{f}(x,\overline{u}_n) \leq \widetilde{f}(x,\overline{u})$. *Par conséquent,* $\left\|\widetilde{f}(x,\overline{u}_n)\right\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq Cste = \max\left\{\left\|\widetilde{f}(x,\overline{u})\right\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \left\|\widetilde{f}(x,\underline{u})\right\|_{C^0(\overline{\Omega})}\right\}$.
Comme Ω *est borné, on en déduit que le second membre est borné dans* $L^p(\Omega)$*pour tout p. D'après le théorème d'estimation* L^p *(th.33 page 25 cours1 mis sur la plate forme) , il vient* $\|\overline{u}_n\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_p$ *pour tout* $p \in]1,+\infty[$. *Choisissons* $p > N$. *Par les injections de Sobolev, on a alors* $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, *et par conséquent,* $\|\overline{u}_n\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq Cste$. *Par le même calcul que dans la démonstration du lemme 1, mais en utilisant cette fois l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que* $\left\|\widetilde{f}\left(.,\overline{u}_n\right)\right\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} \leq cste$ *pour tout* $\beta \in [0,1]$.*Fixons une valeur de* $0 < \beta < 1$. *En utilisant les estimations du théorème 25 page 24,(cours1 mis sur la plateforme), on obtient finalement*

$$\|\overline{u}_n\|_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} \leq Cste$$

Comme $\beta > 0$*, l'injection* $C^{2,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$ *est compacte par le théorème d'Ascoli. La suite* $\left(\overline{u}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$*est donc relativement compacte dans* $C^2(\overline{\Omega})$. *Or, elle converge simplement vers* $\overline{u}^*$. *On en déduit donc que* $\overline{u}^* \in C^2(\overline{\Omega})$ *et que* $\overline{u}_n \to \overline{u}^*$*fortement dans* $C^2(\overline{\Omega})$.
On procède de même pour $\underline{u}^*$.
■

Lemme 4

Les limites $\overline{u}^*$ et $\underline{u}^*$ sont solution du problème (4).
Preuve du lemme4. . D'après ce qu'on vient de voir, $\widetilde{L}\overline{u}_{n+1} \to \widetilde{L}\left(\overline{u}^*\right)$ et $\widetilde{f}\left(.,\overline{u}_n\right) \to \widetilde{f}\left(.,\overline{u}^*\right)$ uniformément dans Ω. On a donc $\widetilde{L}\left(\overline{u}^*\right) = \widetilde{f}\left(.,\overline{u}^*\right)$, ce qui équivaut évidemment à $L\left(\overline{u}^*\right) = f\left(.,\overline{u}^*\right)$. De plus, comme $\overline{u}_n = 0$ sur $\partial\Omega$ et que la suite converge sur $\overline{\Omega}$, on a aussi $\overline{u}^* = 0$ sur $\partial\Omega$. On procède de même pour $\underline{u}^*$.
Pour conclure, nous devons montrer que ces deux solutions $\overline{u}^*$ et $\underline{u}^*$ sont respectivement maximale et minimale. ■

Lemme5

Si u une solution du problème (4) telle que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Alors $\underline{u}^* \leq u \leq \overline{u}^*$.

Lemma 4 ***Preuve du lemme 5.***
On montre comme précédemment par récurrence sur n et par le principe du maximum que $\underline{u}_n \leq u \leq \overline{u}_n$. ■

Example 5 *Considérons le problème* (4) *avec* f *vérifiant l' existance de deux constantes* $m<0$ *et* $M>0$ *telles que pour tout* $x\in\Omega$

$$f(x,m)\geq 0 \text{ et } f(x,M)\leq 0.$$

Alors (4) *admet une solution* u *telle que*

$$m\leq u(x)\leq M.$$

Exercice

Soit $f\in C^1(\mathbb{R})$ telle que $f\prime(0)>0$ et qu'il existe $w>0$ avec $f(0)=f(w)=0$. Soit $\lambda_1>0$ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ dans Ω et $\varphi_1>0$ fonction propre associée à λ_1, normalisée dans $C^0(\overline{\Omega})$.
Montrer que pour tout $\lambda>\frac{\lambda_1}{f'(0)}$, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda f(u) \text{ dans } \Omega \\ u=0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution non triviale $u>0$ dans Ω.

2.2 Méthode des sur- et sous-solutions faibles

On considère l'existence de solution faible de l'edp (1), où L est l'opérateur elliptique sous forme divergentielle

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\left(.\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+c\left(.\right)u \tag{5}$$

où $a\left(.\right)=\left(a_{ij}\left(.\right)\right)$ est une matrice symetrique uniformèment elliptique c.à.d

$$\exists\alpha>0;\forall\xi\in\mathbb{R}^N,p.p.sur\Omega,a(x)\xi.\xi\geq\alpha\left|\xi\right|^2. \tag{6}$$

$$a_{ij}\in C^1\left(\Omega\right);\ c\in L^\infty\left(\Omega\right)\quad\left(i,j=1,...N\right); \tag{7}$$

$f:\underset{(x,s)}{\Omega\times\mathbb{R}}\underset{\rightsquigarrow}{\rightarrow}\underset{f(x,s)}{\mathbb{R}}$, est continue en x et dérivable en s et vérifie

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|\leq C,(C=cste>0) \tag{8}$$

Tout d'abord rappelons que u est solution faible de (1)si

$$\forall v\in\mathcal{H}_0^1\left(\Omega\right),\mathcal{B}\left[u,v\right]=\int\limits_{\Omega}f\left(x,u\right)vdx$$

où

$$\mathcal{B}\left[u,v\right]:=\sum_{i,j=1}^{N}\int\limits_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(x\right)\ \frac{\partial v}{\partial x_j}\left(x\right)dx+\int\limits_{\Omega}c\left(x\right)u\left(x\right)v(x)dx \tag{9}$$

Definition 6 *(i) On dit que $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ est une sur solution faible du problème de Dirrichlet*

$$\left\{ \begin{array}{c} Lu = f(., u) \;\; dans\; \Omega \\ u = 0 \;\; sur\; \partial\Omega \end{array} \right. \tag{10}$$

si pour tout $v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0$,

$$\mathcal{B}[\bar{u}, v] \geq \int_\Omega f(x, \bar{u}(x))\, v(x)\, dx \tag{11}$$

(ii) On dit que $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ est une sous solution faible du problème de Dirrichlet si pour tout $v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0$,

$$\mathcal{B}[\underline{u}, v] \leq \int_\Omega f(x, \underline{u}(x))\, v(x)\, dx \tag{12}$$

Theorem 7 (Th. d'existence de solution entre sous et sur solutions) *Si* (10) *admet une sur solution faible $\overline{u}$ et une sous solution faible $\underline{u}$ vérifiant*

$$\underline{u} \leq 0,\; \overline{u} \geq 0 \;\; sur\; \partial\Omega \text{ (dans le sens de trace)}, \underline{u} \leq \;\overline{u} \;\; p.p\; dans\; \Omega \tag{13}$$

Alors (10) *admet une solution faible u telle que*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \;\; p.p\; dans\; \Omega$$

Démonstration.
La démonstration est faite en 5 étapes.
1). En conséquence de (**??**) il est possible de choisir $\lambda > C$ tel que la fonction

$$z \rightsquigarrow f(., z) + \lambda z, \text{ soit croissante} \tag{14}$$

On considère en fait, $\lambda > \max\left(C, \|c\|_{L^\infty}\right)$.
Définissons maintenant la suite de fonctions $(u_n)_n$ par récurence comme suit, $u_0 = \underline{u}$ et pour $k \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{c} Lu_{k+1} + \lambda u_{k+1} = f(., u_k) + \lambda u_k \;\; \text{dans } \Omega \\ u_{k+1} = 0 \;\; \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{15}$$

2).Montrons par recurence que

$$u_0 = \underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_k \leq ... \;\; \text{p.p dans } \Omega \tag{16}$$

- Remarquer tout d'abord que si $k = 0$, on a pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\mathcal{B}[u_1, v] + \int_\Omega \lambda u_1 v dx = \int_\Omega (f(x, u_0) + \lambda u_0)\, v dx \tag{17}$$

En opérant la difference $(12)-(17)$ et considérant

$$v:=(u_0-u_1)^+ ,\ v\geq 0 \text{ p.p dans } \Omega,$$

on obtient alors

$$\mathcal{B}\left[u_0-u_1,(u_0-u_1)^+\right]+\int_\Omega \lambda(u_0-u_1)(u_0-u_1)^+ dx\leq 0$$

Mais,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left((u_0-u_1)^+\right)=\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x_i}(u_0-u_1) & \text{p.p sur } \{u_0\geq u_1\}\\ 0 & \text{p.p sur } \{u_0\leq u_1\}\end{cases}$$

Par conséquent de (9) ,le choix de λ et la coercivité de la matrice (a_{ij})on a

$$\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\{u_0\geq u_1\}} a_{ij}(x)\frac{\partial(u_0-u_1)}{\partial x_i}(x)\ \frac{\partial(u_0-u_1)}{\partial x_j}(x)+\int_{\{u_0\geq u_1\}}(c(x)+\lambda)(u_0-u_1)^2 dx\leq 0,$$

de telle sorte que $u_0\leq u_1$ p.p dans Ω.
- Maintenant supposons que

$$u_{k-1}\leq u_k \text{ p.p dans } \Omega. \tag{18}$$

De (15) ,on trouve pour tout $v\in H_0^1(\Omega)$

$$\mathcal{B}[u_{k+1},v]+\int_\Omega \lambda u_{k+1}v dx=\int_\Omega (f(x,u_k)+\lambda u_k)v dx \tag{19}$$

et

$$\mathcal{B}[u_k,v]+\int_\Omega \lambda u_k v dx=\int_\Omega (f(x,u_{k-1})+\lambda u_{k-1})v dx \tag{20}$$

En opérant la difference entre (19) et (20) ,et en prenant

$$v:=(u_k-u_{k+1})^+ ,\ v\geq 0 \text{ p.p dans } \Omega,$$

on arrive à

$$\mathcal{B}\left[u_k-u_{k+1},(u_k-u_{k+1})^+\right]+\int_\Omega \lambda(u_k-u_{k+1})(u_k-u_{k+1})^+ dx$$

$$=\int_\Omega [f(x,u_{k-1})+\lambda u_{k-1}-f(x,u_k)+\lambda u_k](u_k-u_{k+1})^+\leq 0$$

la dernière inégalité étant due à (18) et (14) .Ce qui entraine que $u_k\leq u_{k+1}$ p.p dans Ω.
3). Montrons par recurence que pour tout $k=0,1,2,....,$

$$u_k\leq \overline{u} \quad \text{p.p dans } \Omega \tag{21}$$

- Pour $k=0$, (21) est vraie par l'hypothèse (13).
Supposons maintenant que

$$u_k \leq \overline{u} \text{ p.p dans } \Omega \tag{22}$$

en soustrayant (11) de (19) et en prenant $v=(u_{k+1}-\overline{u})^{+}$, alors on obtient de (22) et (14),

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}\left[u_{k+1}-\overline{u}-,(u_{k+1}-\overline{u})^{+}\right]+\int\limits_{\Omega}\lambda\left(u_{k+1}-\overline{u}\right)\left(u_{k+1}-\overline{u}\right)^{+}dx \\
\leq\ &\int\limits_{\Omega}\left[\left(f\left(x,u_k\right)+\lambda u_k\right)-\left(f\left(x,\overline{u}\right)+\lambda\overline{u}\right)\right]\left(u_{k+1}-\overline{u}\right)^{+}\leq 0
\end{aligned}$$

Par conséquent $u_{k+1}\leq\overline{u}$ p.p dans Ω.
4). De (16) et (21), on a

$$\underline{u}\leq u_1\leq u_2\leq ...\leq u_k\leq ...\ \leq\overline{u} \text{ p.p dans } \Omega \tag{23}$$

Par suite,

$$u(x)=\lim_{k\to\infty}u_k(x)$$

existe pour presque tout $x\in\Omega$.De plus, se basant sur (23) et le théorème de convergence dominée, on a

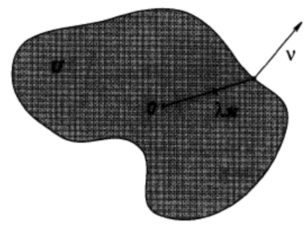
$$u_k\to u \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

Et, par (8) $\|f(.,u_k)\|_{L^2(\Omega)}\leq Cste\left(\|u_k\|_{L^2(\Omega)}+1\right)$, on déduit de (15) que $\sup\limits_{k}\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}<\infty$.Ainsi, il existe une sous suite $\left(u_{k_j}\right)_j$ qui converge faiblement vers $u\in H_0^1(\Omega)$.
5). Il reste à vérifier que u est bien une solution faible du problème (4).Pour cela, soit $v\in H_0^1(\Omega)$,alors de (15), on a,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{N}\int\limits_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_i}(x)\ \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,dx+\int\limits_{\Omega}\left(c(x)+\lambda\right)u_{k+1}(x)\,v(x)dx \\
=\ &\int\limits_{\Omega}\left[f\left(x,u_k(x)\right)+\lambda u_k(x)\right]v(x)dx
\end{aligned}$$

Si $k\to+\infty$, alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{N}\int\limits_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,dx+\int\limits_{\Omega}\left(c(x)+\lambda\right)u(x)\,v(x)dx \\
=\ &\int\limits_{\Omega}\left[f\left(x,u(x)\right)+\lambda u(x)\right]v(x)dx
\end{aligned}$$



A star-shaped domain

Et en simplifiant le terme en λ,on obtient alors

$$\forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \mathcal{B}[u,v] = \int_\Omega f(x,u)\, v dx.$$

■

3 Non existence de solution

Dans cette section nous considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{24}$$

ce problème a été étudié, on a démontré l'existence de solution non triviale ($u \neq 0$) par approche variationnelle dans le cas où

$$1 < p < \frac{N+2}{N-2} \tag{25}$$

Considérons maintenant le cas où

$$\frac{N+2}{N-2} < p < \infty \tag{26}$$

Nous allons montrer que sous des conditions géométriques sur Ω, si (26) est vérifié, alors le problème (24) admet pour seule solution la solution triviale $u \equiv 0$.

Definition 8 *un ouvert Ω est dit étoilé (star-shaped) par rapport à 0, si pour tout $x \in \overline{\Omega}$,le segment*

$$\{\lambda x, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

est contenu dans $\overline{\Omega}$.

Exemple
Un essemble convexe contenant 0 est étoilé par rapport à 0.

Lemma 9 *Si $\partial\Omega$ est C^1 et Ω est étoilé par rapport à 0, alors*

$$x.\mathfrak{n}(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \partial\Omega$$

où $\mathfrak{n}$ note la normale exterieure.

Preuve du lemme. Puisque $\partial\Omega$ est C^1, si $x \in \partial\Omega$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \overline{\Omega} \ \ |y-x| < \delta \implies \mathfrak{n}(x) \frac{(y-x)}{|y-x|} \leq \varepsilon$$

en particulier,

$$\limsup_{\substack{y \to x \\ y \in \overline{\Omega}}} \mathfrak{n}(x) \frac{(y-x)}{|y-x|} \leq 0 \tag{27}$$

Soit $y = \lambda x$,pour $0 < \lambda < 1$, alors $y \in \overline{\Omega}$ car Ω est étoilé. Par (27), on a,

$$\mathfrak{n}(x) \frac{x}{|x|} = -\lim_{\lambda \to 0^+} \mathfrak{n}(x) \frac{(\lambda x - x)}{|\lambda x - x|} \geq 0$$

■

Theorem 10 (Non existence de solution nontriviale) *Si Ω estr étoilé par rapport à 0 et $\partial\Omega$ est C^1, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ est une solution du problème (24), et p vérifiel'inégalité (26), alors*

$$u \equiv 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Démonstration.
1. On multiplie l' edp par x.Du et on intègre sur Ω, on obtient alors

$$\int_\Omega (-\Delta u)(x.Du)\,dx = \int_\Omega |u|^{p-1} u\,(x.Du)\,dx \tag{28}$$

On réécrit cette égalité sous la forme

$$A = B$$

2.

$$\begin{aligned} A &= -\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \qquad (29) \\ &= \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) dx - \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathfrak{n}_i x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} ds \\ &=: A_1 + A_2. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \delta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i} x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx \qquad (30) \\ &= \int_{\Omega} |Du|^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{|Du|^2}{2} \right) x_j dx \\ &= \left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_{\Omega} |Du|^2 + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{|Du|^2}{2} \right) (\mathfrak{n}.x)\, ds \end{aligned}$$

Et, puisque $u = 0$ sur $\partial\Omega$, $Du\,(x)$ est parallèle à la normale $\mathfrak{n}\,(x)$ en tout point $x \in \partial\Omega$.Par suite $Du\,(x) = \pm\,|Du\,(x)|\,\mathfrak{n}\,(x)$. utilisant cette égalité, on calcule A_2,

$$A_2 = -\int_{\partial\Omega} \left(|Du|^2 \right) (\mathfrak{n}.x)\, ds \qquad (31)$$

En combinant (29) et (31) , on déduit,

$$A = \frac{2-N}{2} \int_{\Omega} |Du|^2\, dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |Du|^2\, (\mathfrak{n}.x)\, ds.$$

4. calcul de B

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} |u|^{p-1}\, u x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \qquad (32) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{|u|^{p+1}}{p+1} \right) x_j dx \\ &= -\frac{N}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1}\, dx \end{aligned}$$

Maintenant (32) et (28) donnent

$$\frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |Du|^2\, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |Du|^2\, (\mathfrak{n}.x)\, ds = \frac{N}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1}\, dx. \qquad (33)$$

Utilisant le lemme précédant, on obtient l'inégalité suivante

$$\frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |Du|^2\, dx \leq \frac{N}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1}\, dx \qquad (34)$$

Mais, en multipliant l'edp $-\Delta u = u\,|u|^{p-1}$, par u intégrant par parties , on arrive à

$$\int_\Omega |Du|^2\, dx = \int_\Omega |u|^{p+1}\, dx \tag{35}$$

En portant (35) dans (34) , on obtient

$$\left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p+1}\right)\int_\Omega |u|^{p+1}\, dx \leq 0$$

Donc, si $u \neq 0$, alors $\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p+1} \leq 0$; c.à.d $p \leq \frac{N+2}{N-2}7$ ∎

Remark 11 *L'égalité* (33) *est appelée identité de Derrick-Pohozaen.*

References

[1] L. C. Evans,Partial differential equations, Graduate studies in Mathematics,volume 19, Providence, R.I.: American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-4974-3, MR 2597943 American Mathematical Society.

[2] M. Morton, Méthode des sur et sous solutions pour la résolution d'un problème de type Neuman faisant intervenir le p-Laplacien,C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 341–344.