Faculté des Sciences
Dept. Maths
Prof. Mohammed Benalili
m_benalili@yahoo.fr

Chapitre4: Champs de vecteurs sur les sous-variétés de R^n

Définition: Soit $M \subset R^n$ une sous-variété de R^n de dimension k et de classe C^p $(p \geq 2)$. Un champ de vecteurs de classe C^r $(r \leq p-1)$ sur M est une application X de classe C^r qui à chaque point $x \in M$ associe un vecteur $X(x) \in T_xM$. Cela revient à dire que pour toute carte $\varphi : U \to R^k$, le champ de vecteurs $(\varphi_* X)(y) = D\varphi(\varphi^{-1}(y)).X\varphi^{-1}(y) : \varphi(U) \to R^k$ est de classe $C^{r.}$.

Exemple: Soit $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M \subset R^n$ une courbe de classe C^2 sur M, la dériveé $c'(t)$ vue comme élément de R^n est un vecteur de $T_{c(t)}M$ obtenu comme $c'(t) = dc_t.1$.

Soit X un champ de vecteurs sur M et $\psi : M \to N$ un difféomorphisme on note par $\psi_* X$ le champ de vecteurs sur N tel défini par

$$\psi_* X(y) = D\psi(\psi^{-1}(y)).X(\psi^{-1}(y)).$$

La relation

$$Y = \psi_* X$$

signifie que

$$Y(\psi(x)) = D\psi(x)X(x).$$

Proposition: *Si $Y = \psi_* X$ et si $c'(t) = X(c(t))$ alors $\gamma'(t) = Y(\gamma(t))$ avec $\gamma(t) = \psi o c(t)$.*

En effet: $\gamma'(t) = (\psi o c)'(t) = D\psi(c(t)c'(t) = D\psi(c(t)X(c(t)) = Y(\psi(c(t)) = Y(\gamma(t)$.

Espace tangent et crochet de Lie

Deux courbes γ_1,$\gamma_2 : I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon) \to M$ telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ sont dites tangentes en 0 si et seulement si $(\varphi o \gamma_1)'(0) = (\varphi o \gamma_2)'(0)$ pour toute carte φ de M en x.

Exercice.

Montrer que la relation tangentielle $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $C^1_x(I_\epsilon, M)$

des courbes de classe C^1 sur M qui satisfont à $\gamma(0) = x$.

Définissons l'espace tangent comme l'ensemble des classes d' equivalences

$$T_xM = C^1_x(I_\epsilon, M).$$

Pour toute carte φ en x l'application $\gamma \to (\varphi o \gamma)'(0)$ est une bijection entre T_xM et R^k ($k = \dim(M)$). Alors $\gamma \to (\varphi o \gamma)'(0)$ induit sur T_xM une structure d'espace vectoriel.

Toute application $f : M \to N$ différentiable définie au voisinage de x définit une application dérivée $d_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$, qui à $v \in T_xM$ associe le vecteur défini par la courbe foc où c est une courbe sur M telle que $c(0) = x$ et $c'(0) = v$.

Exercice

Montrer que le vecteur défini par foc ne dépend que de la classe de la courbe c.

Dérivation

Notons par $C^\infty(M, R)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ de M dans R. On appelle dérivation en x l'application linéaire

$$L : C^\infty(M, R) \to R$$

vérifiant la règle de Leibnitz (règle des dérivations)

$$L(fg) = g(x)L(f) + f(x)L(g).$$

Proposition

Si L est une dérivation en x sur M et $f : M \to N$ est une application de classe C^∞ définie au voisinage de x , alors l'application

$$\psi_* L : f \to L(\psi o f)$$

est une dérivation ponctuelle en $f(x)$.

A tout vecteur $v \in T_xM$ on associe la dérivation ponctuelle

$$L_v(f) = d_xf.v = (fo\gamma)'(0)$$

où γ x une courbe représentant le vecteur v

Notons l'ensemble des dérivations ponctuelles en x par D_x.

Proposition *D_x est un espace vectoriel de dimension $k = \dim(M)$ et l'application $v \to L_v$ est un isomorphisme de T_xM dans D_x.*

Crochet de Lie

Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M. On note par ϕ_X et ϕ_Y les solutions des équations $\phi'_X(t) = X(\phi_X(t))$ et $\phi'_Y(t) = Y(\phi_Y(t))$ et $\phi_X(0) = \phi_y(0) = 0$.

Pour chaque $x \in M$, on pose $\varphi_x(s,t) = \phi_Y^s o \phi_X^t o \phi_Y^{-s} o \phi_X^{-t}(x)$.

Nous avons $\varphi_x(0,t) = \varphi_x(s,0) = x$ et donc $\frac{\partial \varphi_x}{\partial t}(0) = \frac{\partial \varphi_x}{\partial s}(0) = 0$ dans T_xM. La dérivée seconde $\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial s \partial t}(0)$ est bien définie de $R^2 \to T_xM$ comme application bilinéaire telle que $\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial s \partial t}(0).(h,k) = hk \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial s \partial t}(0)$ avec $\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial s \partial t}(0) \in T_xM$.

On pose par définition

$$[X,Y](x) = \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial s \partial t}(0).$$

$[X,Y]$ est un champ de vecteurs de même classe que les champs X et Y appelé le crochet de Lie de X et Y.

Si on considère la courbe $c_x(t) = \varphi_x(t,t)$ on obtient

$$[X,Y](x) = \frac{1}{2} c''_x(0).$$

Proposition

$\psi : M \to N$ est une application différentiable. Si $\psi_* X$ et $\psi_* Y$ existent et sont différentiables alors

$$\psi_* [X,Y] = [\psi_* X, \psi_* Y].$$

Expression du crochet de Lie

On obtient une autre expression du crochet de Lie en écrivant

$$\phi_Y^s o \phi_X^t o \phi_Y^{-s} = \phi^t_{\left(\phi_Y^s\right)_* X}$$

et alors

$$\varphi_x(s,t) = \phi^t_{\left(\phi_Y^s\right)_* X} o \phi_X^{-t}$$

et

$$\frac{\partial \varphi_x(s,0)}{\partial t} = \left(\phi_Y^s\right)_* X(x) - X(x)$$

ce qui donne

Proposition

$$[X,Y](x) = \frac{d}{ds}|_{s=0} \left(\phi_Y^s\right)_* X(x)$$

Soient X et Y deux champs de vecteurs sur R^n alors

$$\left(\phi_Y^s\right)_* X(x) = \left(d_x\phi_Y^s.X\right) o\phi_Y^{-s}(x)$$

et en dérivant par rapport à s en 0, on obtient

$$\begin{aligned}
[X,Y](x) &= d_xY.X(x) - d_xX.Y(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x_i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{x_j}.
\end{aligned}$$

Proposition. L'application qui aux champs de vecteurs X et Y associe leur crochet de Lie $[X,Y]$

est bilinéaire et antisymétrique :

$$[X,Y] = -[Y,X]$$

Elle vérifie de plus l'identité de Jacobi:

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

L'antisymétrie implique notamment que

$$[X,Y](x) = -\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\left(\phi_X^s\right)_* Y = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\left(\phi_X^{-s}\right)_* Y = L_XY.$$

L_XY est appelé dérivée de Lie de Y par rapport à X. L'identité de Jacobi est

équivalente à

$$[[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]$$

elle s'interpréte comme la relation

$$L_{[X,Y]} = L_X o L_Y - L_Y o L_X.$$