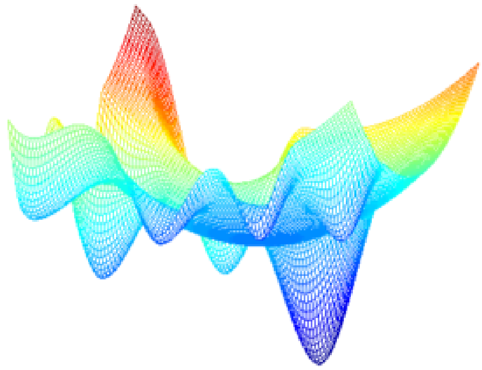
Chapitre II : Problèmes d'optimisation sous contraintes

Optimisation avancée



Master 1 Génie industriel

Université de Tlemcen

Février 2021

2.0

Table des matières

Objectifs

A l'issue de ce chapitre, l'apprenant sera capable de :

- Connaître les deux types de problèmes d'optimisation sous contraintes.
- Démontrer la régularité d'un ensemble de contraintes d'égalité.
- Déterminer la nature d'un ensemble (fermé, borné, convexe).
- Démontrer l'existence et l'unicité d'une solution.
- Appliquer la méthode du Lagrange pour la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.
- Utiliser la méthode de la matrice hessienne bordée pour la définition du type d'un point critique (maximum, minimum).
- Appliquer la méthode de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pour la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes mixtes (d'égalités et d'inégalités).

Problème d'optimisation sous contraintes

I

Définition

On appelle problème d'optimisation (PO) sous contraintes, le problème suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in C} f(x), \\ C \; est\; une\; contrainte \end{cases}$$

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0 \, , h_j(x) = 0, avec\, i \in \{1, \ldots, p\}, j \in \{1, \ldots, q\}\},$$

g_i, h_j sont des fonctions de R^n dans R.

Définition : Minimum global

On dit que la fonction f sous la contrainte C admet un minimum global (ou solution globale du PO*) en un point α de D_f si :

$$\begin{cases} f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in C \\ \quad a \in C \end{cases}$$

Si on se restreint à un voisinage V (une partie de C) de α, alors le minimum (la solution) est dit *local(e)*.

Si l'inégalité précédente est stricte, on parlera d'un(e) minimum (solution) strict(e). Pour un maximum, il suffit de changer le sens des inégalités.

Contraintes

II

Définition : 2.2.1 - Image réciproque d'un ensemble

Soit f est une fonction de E dans G et l'ensemble $Y \subset G$, alors l'image réciproque de Y est l'ensemble notée $f^{-1}(Y)$ tel que :

$f^{-1}(Y) := \{x \in E : f(x) \in Y\}$

Exemple : Image réciproque d'un ensemble

Soit $f(x) = x^2$. Déterminer les ensembles $f^{-1}([0,1])$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(]1,+\infty[)$.

$$\begin{aligned} f^{-1}([0,1]) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [0,1]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x^2 \leqslant 1\} \\ &= [-1,1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(1) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} \\ &= \{-1,1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(]1,+\infty[) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in]1,+\infty[\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2\} \\ &=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{aligned}$$

Définition : 2.2.2 - Ensemble fermé

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, ($a < b$). Les ensembles $\{a\}$, $[a,b]$, $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$ sont dits des fermés de $\mathbb{R}$.

Remarque

- $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
- La réunion et l'intersection des fermés est un fermé.

Définition : 2.2.3 - Image réciproque d'un ensemble fermé

Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et V un ensemble de $\mathbb{R}^n$. V est dit fermé de $\mathbb{R}^n$ s'il existe un fermé F de $\mathbb{R}$ tel que $V = f^{-1}(F)$.

Définition : 2.2.4 - Types des contraintes

Soit $(p,q) \in (N^*)^2$ tels que $max\{p,q\} \leq n$ et soient $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ des fonctions continues.

- Une (des ou un ensemble des) contrainte(s) d'égalité(s) est le sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui peut s'écrire sous l forme : $\{x \in \mathbb{R}^n \ : h(x) = 0\}$.
- Une (des ou un ensemble des) contrainte(s) d'inégalité(s) est le sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui peut s'écrire sous la forme : $\{x \in \mathbb{R}^n \ : g(x) \leq 0\}$.
- Une (des ou un ensemble des) contrainte(s) mixte(s) est le sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui peut s'écrire sous la forme : $\{x \in \mathbb{R}^n \ : h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$.

Définition : 2.2.5 - Ensemble borné

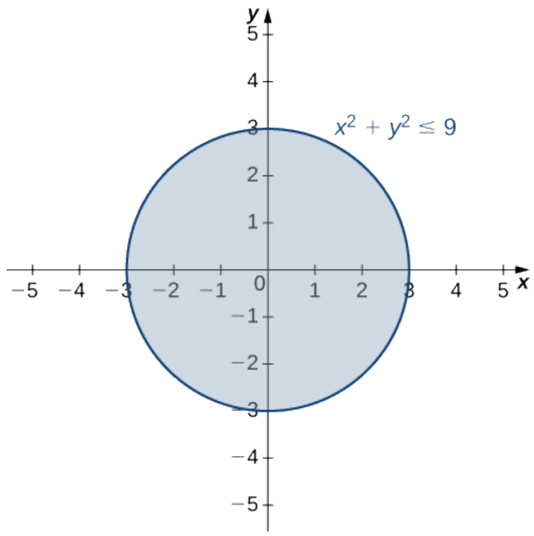
Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ une contrainte. On dit que C est bornée ssi :

$$\exists M > 0, \forall x \in C, ||x|| \leq M$$

Exemple : Ensemble borné

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

La contrainte C défini par l'inéquation $x^2 + y^2 \leq 9$ est représentée par le disque défini par un centre (0,0) et un rayon égal à 3.



L'ensemble des points (x,y) donné par la contrainte C

Exercice : Fermé

III

[solution n°1 p.18]

Classifier les ensembles suivants entre : Fermé et Ouvert

$C_2 = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 \geqslant 2\}$ $C_3 = \{x \in \mathbb{R} : -x + 1 < 0\}$ $C_1 = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 = 0\}$

Fermé	Ouvert

Exercice : Fermé, borné

IV

[*solution* n°2 p.18]

Classifier les ensembles suivants entre : Fermé, borné, compact, ni fermé ni borné

$C_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\geqslant 1\}$

$C_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$

$C_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$

Borné	Fermé	Borné et fermé (compact)	Ni fermé, ni borné

Fonctions vectorielles de plusieurs variables réelles

V

Définition : 2.3.1 - Fonction vectorielle

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*\backslash\{1\})^2$. Une fonction g est dite vectorielle de plusieurs variables réelles s'il existe p fonctions $g_i, (i = 1 \ldots p)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$g \; : \; \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \\ x \to g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_p(x)) \end{array}$$

Remarque

1. La fonction g est :
   - continue si les fonctions g_i sont continues pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.
   - différentiable si les fonctions g_i sont différentiables pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.
   - de classe C^k, $(k \in \mathbb{N})$ si les fonctions g_i sont de classe C^k pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.
2. La continuité et la différentiabilité des fonctions vectorielles sont stables par opérations algébriques, lois de décomposition et multiplications par un scalaire.
3. On dit que $g \leq 0$ si et seulement si $g_i \leq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Définition : 2.3.2 - La matrice jacobienne

Soit $x \to g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_p(x))$ différentiable avec $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in \{1, \ldots, p\}$. La matrice jacobienne (où la jacobienne) de la fonction g en un point $x \in D_g$ est donnée par :

$$J_g(x) := \begin{pmatrix} \nabla^t g_1(x) \\ \vdots \\ \nabla^t g_p(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x) & \cdots & \partial_n g_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_p(x) & \cdots & \partial_n g_p(x) \end{pmatrix}$$

Exemple

Calculer la jacobienne de la fonction : $f(x, y) = (x + y, x^2 y, y^3 e^x)$

Résultat d'existence et d'unicité

VI

Fondamental : Existence d'un optimum

Soient C une contrainte fermée et f une fonction continue de C dans R.

$$f \ \ coércive \Rightarrow \exists \alpha \in C : f(\alpha) = \min_{x \in C} f(x)$$
$$C \ \ bornée \Rightarrow \exists \alpha \in C : f(\alpha) = \min_{x \in C} f(x)$$

Exemple : 1 - Existence d'un optimum

Soit le PO* suivant :

$$\begin{cases} Min\ f(x) = x^2 + y^2 - 3x + 5y + 2, \\ \qquad s.c.\ x + y \leqslant 4(C) \end{cases}$$

Montrer que ce PO* admet au moins une solution (admet un minimum global en au moins un point).

f est une fonction polynomiale de 2ème dégrée, donc elle est continue sur R^2.

La contrainte C est un fermé. Elle forme un demi-plan limité par la droite x+y=4 (incluse). On peut montrer ça aussi en disant que : puisque l'ensemble {4} est un fermé et la fonction x+y est continue sur R^2. alors l'image réciproque de {4} qui est l'ensemble C par la fonction x+y est un ensemble fermé.

Maintenant, il faut montrer que la fonction f est coércive (voir le chapitre 1).

Posons x=rcos(θ) et y=rsin(θ) avec θ appartient à [0,2π] donc ||(x,y)||=r

$$\begin{aligned}
\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) &= \lim_{r \to +\infty} f(r,\theta) \\
&= \lim_{r \to +\infty} r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) - 3\,rcos(\theta) + 5\,rsin(\theta) + 2 \\
&= \lim_{r \to +\infty} r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) - r(3\cos(\theta) + 5\sin(\theta)) + 2 \\
&= \lim_{r \to +\infty} r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

donc f est coércive, par conséquent *ce problème* admet au moins une solution*

Exemple : 2 - Existence d'un optimum

Soit le PO* suivant :

$$\begin{cases} Min\ f(x) = x + y, \\ s.c.\ x^2 + y^2 \leqslant 4(C) \end{cases}$$

Montrer que ce PO* admet au moins une solution (admet un minimum global en au moins un point).

f est une fonction polynomiale de 1ème dégrée, donc elle est continue sur R^2.

La contrainte C est un fermé. Elle forme un disque de centre (0,0) et rayon=2 dont le cercle est inclus dans C. On peut montrer ça aussi en disant que : puisque l'ensemble]-∞,4] est un fermé et la fonction x^2+y^2 est continue sur R^2. alors l'image réciproque de]-∞,4] qui est l'ensemble C par la fonction x^2+y^2 est un ensemble fermé.

C est borné, par conséquent *ce problème* admet au moins une solution*

Fondamental : Unicité d'un optimum

Sous les mêmes hypothèses du théorème d'existence, si f est strictement convexe et C est convexe, alors :

$$\exists ! \alpha \in C : f(\alpha) = \min_{x \in C} f(x)$$

Exemple : Unicité d'un optimum

Monter que le PO* suivant admet une seule solution (admet un minimum global en un seul point).:

$$\begin{cases} Min\ f(x) = x^2 + y^2 - 3x + 5y + 2, \\ \quad s.c.\ x + y \leqslant 4 (C) \end{cases}$$

Nous avons montré dans le premier exemple que f est continue et coércive et que l'ensemble C est un fermé. Maintenant, il faut montrer que f est strictement convexe et C est convexe.

1 - Montrer que f est strictement convexe :

$$\nabla f(x,y) := \begin{pmatrix} 2x-3 \\ 2y+5 \end{pmatrix}, \nabla^2 f(x,y) := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0, \\ \Delta_2 = 4 > 0. \end{cases}$$

Les déterminants mineurs principaux Δ_1 et Δ_2 sont strictement positives, par conséquent la matrice hessienne est définie positive, alors la fonction f est *strictement convexe*.

2 - Maintenant, il faut montrer que la contrainte C est convexe.

- On peut dire que l'ensemble C forme un demi-plan limité par la droite x+y=4, donc C est convexe.
  On peut dire aussi que la fonction x+y est linéaire, donc C est convexe.
  Une troisième méthode consiste à montrer ça à travers la définition de base de la convexité d'un ensemble.

Soient $A(x_1,y_1)$ et $B(x_2,y_2)$ deux points de C :

- A appartient à C implique que $x_1+y_1<=4$ --- (1).
- B appartient à C implique que $x_2+y_2<=4$ --- (2).

Il faut monter que :

$$\forall\, 0 < \lambda < 1, \lambda A + (1-\lambda) B \in C$$

sachant que :

$$\lambda A+(1-\lambda)B\in C \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+(1-\lambda)\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in C$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\\ \lambda y_1+(1-\lambda)y_2\end{pmatrix}\in C$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda x_1+(1-\lambda)x_2+\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\leqslant 4$$

Donc, il faut montrer que :

$$\lambda x_1+\lambda y_1+(1-\lambda)x_2+(1-\lambda)y_2\leq 4$$

- On multiplie (1) par λ, on obtient : $\lambda x_1+\lambda y_1<=\lambda 4$ --- (3).
- On multiplie (2) par (1-λ), on obtient :$(1-\lambda)x_2+(1-\lambda)y_2<=(1-\lambda)4$ --- (4).

(3)+(4) donne : $\lambda x_1+\lambda y_1+(1-\lambda)x_2+(1-\lambda)y_2<=4$,

Ainsi :

$$\forall\, 0<\lambda<1,\ \lambda A+(1-\lambda)B\in C$$

Par conséquent :

$$\exists!\,\alpha\in C : f(\alpha)=\min_{x\in C} f(x)$$

Optimisation sous contraintes d'égalité

VII

Définition : 2.5.1 - Problème d'optimisation sous contraintes d'égalité

On appelle PO* sous contraintes d'égalités (CE), le problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ G \; est \; une \; contrainte \; d'égalité \end{cases}$$

G inclut une ou plusieurs CE* de R^n dans R i.e. :

$$G = \{x \in R^n : g_i(x) = 0, i \in \{1, \dots, p\}\}$$

Définition : 2.5.2 - Point/Ensemble régulier

Un point X de G est dit régulier si :

- Cas d'une seule CE*, Si :

$$\nabla g(X) \neq 0$$

- Cas de plusieurs CE* : si :

$$\forall X \in G : \nabla g_1(X), \nabla g_2(X), \dots, \nabla g_n(X)$$

sont linéairement indépendants (c.à.d rang(J_G)=P)

Fondamental : Théorème du Lagrange

Soient f et g_i des fonctions de R^n dans R différentiables. Si $X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est un point critique du PO* et les vecteurs $\nabla g_1(X^*), \nabla g_2(X^*), \dots, \nabla g_n(X^*)$ sont linéairement indépendants, alors ils existent des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ tel que :

$$\nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(X^*) = 0$$

Définition : 2.5.3 - Le Lagrangien

Soient f et g_i des fonctions continues de R^n dans R. On appelle *Lagrangien L* du PO* sous CE*, la fonction :

$$L \; : \; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$L(X, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = f(X) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(X)$$

Les $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont appelés : *les multiplicateurs du Lagrange*.

Remarque

- Le but du lagrangien est de ramener un PO* avec contraintes à un PO* sans contraintes.
- Le lagrangien fait intervenir autant de multiplicateurs que des contraintes.

Exemple : Le Lagrangien

Former le lagrangien du problème suivant :

$$\begin{cases} Min\, f(x,y)=x^2+3y^2, \\ s.c. \quad 3x+2y-3=0 \\ \qquad\quad x+5y=4 \end{cases}$$

Le lagrangien s'écrit comme suit :

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+3y^2+\lambda_1(3x+2y-3)+\lambda_2(x+5y-4)$$

Fondamental : Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre

D'après le théorème du Lagrange, on peut dire qu'un point (X^*,λ^*) est un point critique du lagrangien s'il vérifie la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre suivante :

$$\nabla L(X^*,\lambda^*)=0$$

Avec : $X^*=(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)$ *et* $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\dots,\lambda_p^*)$

Si (X^*,λ^*) est *un point critique* du lagrangien et X* est *un point régulier de G*, alors X* est une solution du PO*.

Méthode : Vérification de la régularité des contraintes

La vérification de régularité permet de s'assurer que chaque point critique du lagrangien X est une solution du PO**.

- Si toutes les fonctions contraintes g_i sont affines, la régularité des contraintes est vérifiée.
- Sinon, on distingue deux cas :
    - *Cas d'une seule contrainte* : Cette vérification peut être effectuée avant de rechercher les points critiques du Lagrangien en résolvant le système d'équations $\nabla g(X)=0$.
        - Si $\forall X\in G$, $\nabla g(X)\neq 0$ ($\nabla g(X)=0$ n'a pas de solutions dans G), on dit que tous les points du G sont réguliers (l'ensemble G est régulier) et donc *la condition de la régularité de la contrainte est vérifiée* $\forall X\in G$,
        - Sinon (si ce système d'équations $\nabla g(X)=0$ admet une (ou plusieurs) solution dans G (une solution qui respecte la contrainte), on dit que ce point (solution) *n'est pas régulier* et par conséquent, l'ensemble G n'est pas régulier). Dans ce cas, on commence d'abord par la recherche des points critiques du Lagrangien. Si on trouve qu'un point critique du Lagrangien n'est pas régulier, ce point ne peut pas être une solution du PO*.

- *Cas de plusieurs contraintes* : Cette vérification peut être effectuée avant de rechercher les points critiques du Lagrangien, en montrant que les gradients des contraintes sont linéairement indépendant $\forall X \in G$.
  - Si les gradients des contraintes sont linéairement indépendant à tout point X de G ($\forall X \in G$), on dit que tous les points du G sont réguliers (l'ensemble G est régulier) et donc *la condition de la régularité de la contrainte est vérifiée* $\forall X \in G$,
  - Sinon, on commence d'abord par la recherche des points critiques du Lagrangien. Si on trouve qu'un point critique du Lagrangien n'est pas régulier, ce point ne peut pas être une solution du PO*.

Complément

Soient G une CE* et X un point de G. Notons :

$$\nabla_x L := \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\nabla_x^2 L := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Définition : Matrice hessienne bordée

Soit un PO* sous CE* $g_i(i \in \{1,2,\dots,p\})$. On suppose que le lagrangien associé à ce PO* est deux fois différentiable (de classe C^2) et les fonctions $g_i(i \in \{1,2,\dots,p\})$ sont différentiables (de classe C^1).

Soit $X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ un point critique avec p<=n.

La matrice hessienne bordée associée au PO* par les contraintes $g_i(i \in \{1,2,\dots,p\})$ est définie comme suit :

$$H := \begin{pmatrix} 0 & J_G \\ J_G^t & \nabla_x^2 L \end{pmatrix}$$

Exemple : 1

Écrire la matrice hessienne bordée associée au PO suivant :

$$\begin{cases} Min\ f(x,y)=x^2+3xy-y^2, \\ s.c. \quad 3x+7y-5=0 \end{cases}$$

$$L(x,y,\lambda):=x^2+3xy-y^2+\lambda(3x+7y-5)$$

$$\nabla_x L:=\begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3x-2y \end{pmatrix}, \nabla_x^2 L:=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, J_G:=\begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$H:=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemple : 2

Écrire la matrice hessienne bordée associée au PO suivant :

$$\begin{cases} Min\ f(x,y)=3x^2-8xy^2+y^2-1, \\ s.c. \quad x+3y=7 \\ \qquad 2x-5y=0 \\ \qquad 4x=3-y \end{cases}$$

$$L(x,y,\lambda):=3x^2-8xy^2+y^2-1+\lambda_1(x+3y-7)+\lambda_2(2x-5y)+\lambda_3(4x+y-3)$$

$$\nabla_x L:=\begin{pmatrix} 6x-8y^2+\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3 \\ -16xy+2y+3\lambda_1-5\lambda_2+\lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_x^2 L:=\begin{pmatrix} 6 & -16y \\ -16y & 2 \end{pmatrix}, J_G:=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H:=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & -16y \\ 3 & -5 & -1 & -16y & 2 \end{pmatrix}$$

On note par H_i le déterminant mineur principal de la *sous-matrice* de H ayant $\frac{\partial^2 L}{\partial^2 x_i}$ comme dernier élément.

Fondamental : Condition suffisante d'optimalité du second ordre

Parfois, on nous demande de déterminer la nature d'un point critique (maximum local, minimum local) dans les cas ou plusieurs points critiques sont trouvés.

n est le nombre des variables.

p est le nombre des CE*.

- Si p est pair, le PO* admet :
  - *Un minimum local* : si tous les mineurs H_{p+1}, H_{p+2}, ..., H_n sont positifs.
  - *Un maximum local* : si H_{p+1} est négatif et H_{p+1}, H_{p+2}, ..., H_n sont de signes alternés.

- Si p est impair, le PO* admet :
  - *Un minimum local* : si tous les mineurs H_{p+1}, H_{p+2}, ..., H_n sont négatifs.
  - *Un maximum local* : si H_{p+1} est positif et H_{p+1}, H_{p+2}, ..., H_n sont de signes alternés.

	P pair	**P impair**
Minimum local	**Si tous les mineurs H_{p+1}, H_{p+2}, ..., H_n sont positifs.**	**Si tous les mineurs H_{p+1}, H_{p+2}, ..., H_n sont négatifs.**
Maximum local	**Si H_{p+1} est négatif et H_{p+1}, H_{p+2}, ..., H_n sont de signes alternés.**	**Si H_{p+1} est positif et H_{p+1}, H_{p+2}, ..., H_n sont de signes alternés.**

Si de plus des hypothèses du théorème précédent :

- la fonction f est convexe et les fonctions g_i sont affines (i=1,...,p), alors tout minimum local est un *minimum global*.
- la fonction f est concave et les fonctions g_i sont affines (i=1,...,p), alors tout maximum local est un *maximum global*.

Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 7

Classifier les ensembles suivants entre : Fermé et Ouvert

Fermé	**Ouvert**
$C_1=\{x\in\mathbb{R}: x+1=0\}$	$C_3=\{x\in\mathbb{R}: -x+1<0\}$
$C_2=\{x\in\mathbb{R}: 2x-1\geqslant 2\}$	

> **Solution** n°2

Exercice p. 8

Classifier les ensembles suivants entre : Fermé, borné, compact, ni fermé ni borné

Borné	**Fermé**	**Borné et fermé (compact)**	**Ni ferm ni born**
$C_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<1\}$	$C_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x+y\geqslant 1\}$	$C_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 1\}$	

Abréviations

CE : Contraintes d'égalitées

PO : Problème d'optimisation