Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2019-2020
Module : Contrôle optimal

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

T. D. Contrôle optimal non linéaire : Cas d'Etat final libre.

Exercice 1 : Résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \\ x(1) = 2, \\ \min \int_1^5 \left(x^2(t) + u^2(t) - x(t)u(t)\right) dt. \end{cases}$$

Exercice 2 : Résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \\ x(0) = 5, \\ \min\limits_{0 \le u(t) \le 2} \int_0^2 \left(u^2(t) + 3u(t) - 2x(t)\right) dt. \end{cases}$$

Exercice3 : Contrôle d'insectes nuisibles par des prédateurs

Pour traiter une population x d'insectes nuisibles, on introduit dans l'écosystème une population y d'insectes prédateurs (non nuisibles), se nourrissant des nuisibles. Après normalisation, le système s'écrit

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(1 - y(t)),\ t \in [0,T], \\ y'(t) = -y(t) + u(t),\ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 > 0, \\ y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

Le contrôle u est le taux d'introduction de nouveaux prédateurs, il vérifie la contrainte

$$0 \le u(t) \le M.$$

On cherche à minimiser, au bout d'un temps $T > 0$ **fixé**, le nombre de nuisibles, tout en cherchant à minimiser la quantité globale de prédateurs introduits ; autrement dit, on veut minimiser

$$C(u) = \int_0^T u(t)dt + x(T).$$

1)

1.1) Démontrer que, pour tout contrôle, on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ sur $[0,T]$.

1.2) Déterminer les points d'équilibre du système, c'est-à-dire les triplets (x_c, y_c, u_c) qui sont des solutions constantes du système.

2)

2.1) Ecrire les équations de l'état adjoint $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ ainsi que le Hamiltonien associé.

2.2) Vérifer enfin que $\lambda_1(t)x(t) = x(T)$ pour tout $t \in [0,T]$ et en déduire une expression de $\lambda_2(t)$ pour tout $t \in [0,T]$.

3)

3.1) Démontrer que les contrôles optimaux sont bang-bang, c'est-à-dire qu'ils ne prennent que les valeurs 0 et M.

3.2) Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u(t) = 0$ pour tout $t \in [T-\varepsilon, T]$.

4) Démontrer que u a au plus une commutation. Lorsqu'il en a une, déterminer à quel temps elle a lieu.

Exercice4 : Dosage du niveau de glucose dans le sang.

On considère un modèle trés simplifié du mécanisme régissant le niveau de glucose dans le sang. On désigne par $x(t)$ la quantité de glucose au temps t à partir de l'instant initial $t_0 = 0$ ($x(t)$ sera l'état du système). On suppose que si on ne fait rien, elle diminuera à un taux proportionnel à la quantité ($\dot{x} = -\alpha x$). Dans le but de maintenir le niveau de glucose à un niveau acceptable, du glucose est transfusé dans le sang avec une vitesse de transfusion $u(t)$ (cette vitesse $u(t)$ sera le contrôle du problème).

L'évolution de l'état x se fait donc suivant l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t); t \geq 0 \tag{1}$$

avec $\alpha > 0$ une constante donnée. On considère aussi la donnée initiale

$$x(0) = a, \tag{2}$$

avec $a > 0$ donnée représentant la quantité de glucose au moment initial. On se propose d'amener, à un moment $T > 0$ **donné**, la quantité de glucose proche d'un point b donné avec $b > 0$, mais avec un coût minimal. Nous considérons alors comme modèle trés simple, le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} \min \left(\int\limits_0^T u^2(t)\,dt + \beta\,(x(T) - b)^2 \right), \\ \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t), \\ x(0) = a, \end{cases} \tag{3}$$

avec $\beta > 0$.

Nous admettons qu'on a l'existence et l'unicité d'une solution optimale $(x^*; u^*)$ de (3).

1) En utilisant le prinicipe de minimum de pontriaguine

i) Ecrire l'équation de l'état adjoint $\lambda^*(t)$.

ii) Vérifier que $\lambda^*(T) = 2\beta\,(x^*(T) - b)$.

iii) Ecrire les autres conditions d'optimalité.

2) Résoudre ce système d'optimalité et trouver le contrôle optimal $u^*(t)$.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen. A. U. : 2019-2020

Faculté des Sciences. Module : Contrôle optimal.

Département de Mathématiques.

Niveau : Première Année Master Biomathématiques et Modélisation.

T.D. Contrôle optimal non linéaire : Cas D'Etat final libre.

<u>Exercice 1</u> : Il s'agit de résoudre le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P1)\quad \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)+u(t), \quad t\in[1,5], \\ x(1) = 2, \\ \min\limits_{u\in\mathbb{R}} \displaystyle\int_1^5 \left(x^2(t)+u^2(t)-x(t)u(t)\right)dt. \end{cases}$$

Le Hamiltonian associé au problème (P1) noté H est :

$$H(t,x,\lambda,u) = \lambda.(x+u)+x^2+u^2-xu.$$

D'après le PMP (Théorème 3.2) u^* est un contrôle optimal avec x^* la trajectoire optimale associée si

$$\boxed{3.1.1°}$$

a) $$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) + u^*(t), \ t \in [1,5], \\ x^*(1) = 2, \\ \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*, \lambda, u^*) = -\lambda(t) - 2x^*(t) + u^*(t), \ t \in [1,5], \\ \lambda(5) = 0, \end{cases}$$

b) $\frac{\partial H}{\partial u}(t, x^*, \lambda, u^*) = 0$ (Car il n'ya pas de contraintes sur le contrôle).

C'est-à-dire,

$$\lambda(t) + 2u^*(t) - x^*(t) = 0, \quad t \in [1,5]$$

C'est-à-dire,

D $\boxed{u^*(t) = \frac{x^*(t) - \lambda(t)}{2}}, \quad t \in [1,5].$

En remplace cette égalité dans l'équation de $\dot{\lambda}$, on obtient:

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda(t) - 2x^*(t) + \frac{x^*(t) - \lambda(t)}{2}$$

$$= \boxed{-\frac{3}{2}x^*(t) - \frac{3}{2}\lambda(t)}$$

$\boxed{3.1.2°}$

De même l'égalité $u^*(t) = \frac{x^*(t) - \lambda(t)}{2}$ dans l'équation de $\dot{x}^*$, on obtient:

$$\dot{x}^*(t) = x^*(t) + \frac{x^*(t) - \lambda(t)}{2}$$

$$= \frac{3}{2} x^*(t) - \frac{\lambda(t)}{2}.$$

Comme première conclusion on a le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \frac{3}{2} x^*(t) - \frac{1}{2} \lambda(t), \; t \in [1,5], \\ \dot{\lambda}(t) = -\frac{3}{2} x^*(t) - \frac{3}{2} \lambda(t), \; t \in [1,5], \\ x^*(1) = 2, \; \lambda(5) = 0. \end{cases}$$

Les solutions du système d'équations différentielle suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \frac{3}{2} x^*(t) - \frac{1}{2} \lambda(t), \; t \in [1,5], \\ \dot{\lambda}(t) = -\frac{3}{2} x^*(t) - \frac{3}{2} \lambda(t), \; t \in [1,5], \end{cases}$$

$\boxed{3.1.3°}$

sont

$$\begin{cases} x^*(t) = c_1 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) e^{-\sqrt{3}t} + c_2 \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) e^{\sqrt{3}t} \\ \lambda(t) = c_1 e^{-\sqrt{3}t} + c_2 e^{\sqrt{3}t}, \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles.

Maintenant comme $x^*(1) = 2$ et $\lambda(5) = 0$, on obtient

$$c_1 = \frac{2e^{5\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) e^{4\sqrt{3}} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) e^{-4\sqrt{3}}},$$

et

$$c_2 = \frac{-2e^{-5\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) e^{4\sqrt{3}} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) e^{-4\sqrt{3}}}.$$

Le contrôle optimal u^* est donné par

$$u^*(t) = \frac{x^*(t) - \lambda(t)}{2}, \quad t \in [1, 5] \quad \text{(voir la formule (D))}.$$

$\boxed{3.1.4^\circ}$

Exercice 2 : Il s'agit de résoudre le problème de contrôle optimal suivant:

$$(P2) \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad t \in [0,2], \\ x(0) = 5, \\ \min\limits_{u \in [0,2]} \int_0^2 \left(u^2(t) + 3u(t) - 2x(t)\right) dt. \end{cases}$$

Le Hamiltonian H associé au problème de contrôle optimal est:

$$H(t, x, \lambda, u) = \lambda \cdot (x + u) + u^2 + 3u - 2x$$

D'après le principe du maximum de Pontryaguine (Théorème 3.2) si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors on a :

a)
$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) + u^*(t), \quad t \in [0,2], \\ x^*(0) = 5, \\ \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda(t) + 2, \quad t \in [0,2], \\ \lambda(2) = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{3.1.50}$$

b)

$$H(t, x^*, \lambda, u^*) = \min_{v \in [0,2]} H(t, x^*, \lambda, v).$$

C'est-à-dire,

$$\lambda.(x^* + u^*) + (u^*)^2 + 3u^* - 2x^*$$

$$= \min_{v \in [0,2]} \left\{ \lambda.(x^* + v) + v^2 + 3v - 2x^* \right\}$$

C'est-à-dire,

$$(\lambda + 3)u^* + (u^*)^2 = \min_{v \in [0,2]} \left\{ (\lambda+3)v + v^2 \right\}.$$

On pose,

$$h(v) = (\lambda + 3)v + v^2, \quad v \in [0,2].$$

Alors,

$$h'(v) = (\lambda + 3) + 2v, \quad v \in [0,2].$$

Maintenant d'après a), on a :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\lambda(t) + 2, \ t \in [0,2], \\ \lambda(2) = 0, \end{cases}$$

ce qui donne (aprés calcul) :

$$\lambda(t) = 2\left(1 - e^{2-t}\right), \ t \in [0,2].$$

Pour étudier le signe de $h'(v)$ pour $v \in [0,2]$.

on va étudier d'abord les deux fonctions

$$t \longmapsto \varphi(t) = \lambda(t) + 3, \ t \in [0,2],$$

et $$t \longmapsto \psi(t) = \lambda(t) + 7, \ t \in [0,2].$$

Pour la fonction φ, on a

t	0		$2 - \ln(5/2)$		2
$\varphi'(t)$		$+$		$+$	
$\varphi(t)$	$\underbrace{-2e^{2}+3}_{<0}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\varphi(2) > 0.$

$\boxed{3.1.7°}$

Pour la fonction ψ, on a

t	0		$2-\ln(\frac{9}{2})$		2
$\psi'(t)$		$+$	$+$	$+$	
$\psi(t)$	$\underbrace{-2e^2+7}_{<0}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\psi(2)>0.$

On distingue les cas suivants:

i) Si $t \in [0, 2-\ln(\frac{9}{2})[$, on a $\varphi(t)<0$ et $\psi(t)<0$,

ce qui entraine que,

$$h'(v) = (1+3) + 2v < 0, \quad \text{pour tout } v \in [0,2].$$

Par suite, $\quad u^*(t) = 2.$

ii) Si $t \in [2-\ln(\frac{9}{2}), 2-\ln(\frac{5}{2})[$, on a

$\varphi(t)<0$ et $\psi(t)>0$,

ce qui entraîne que,

$$h'(v) < 0, \text{ pour } v \in \left[0, -\left(\frac{\lambda(t)+3}{2}\right)\right[,$$

et $$h'(v) \geq 0, \text{ pour } v \in \left[-\left(\frac{\lambda(t)+3}{2}\right), 2\right].$$

Par suite,

$$u^*(t) = -\frac{\lambda(t)+3}{2}, \quad t \in \left[2-\ln\left(\frac{9}{2}\right), 2-\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right[$$

$$= e^{2-t} + \frac{5}{2}, \quad t \in \left[2-\ln\left(\frac{9}{2}\right), 2-\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right[$$

iii) Si $t \in \left[2-\ln\left(\frac{5}{2}\right), 2\right]$, on a $\varphi(t) \geq 0$ et $\psi(t) > 0$,

ce qui entraîne que,

$$h'(v) = (\lambda+3) + 2v \geq 0, \text{ pour tout } v \in [0, 2].$$

Par suite, $$u^*(t) = 0.$$

En conclusion, on a :

$$\boxed{3.1.9°}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} 2 \text{ si } t \in [0, 2-\ln(\frac{9}{2})[, \\ e^{2-t} + \frac{5}{2} \text{ si } t \in [2-\ln(\frac{9}{2}), 2-\ln(\frac{5}{2})[, \\ 0 \quad \text{si } t \in [2-\ln(\frac{5}{2}), 2]. \end{cases}$$

Maintenant comme

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) + u^*(t), \; t \in [0,2], \\ x^*(0) = 5, \end{cases}$$

il n'est pas difficile de déterminer x^*.

Exercice 3 : Contrôle d'insectes nuisibles par des prédateurs.

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(1-y(t)), \ t \in [0,T], \\ y'(t) = -y(t) + u(t), \ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 > 0, \ \ y(0) = y_0 > 0. \end{cases}$$

Le contrôle u est le taux d'introduction de nouveaux prédateurs, il vérifie la contrainte

$$0 \leq u(t) \leq M.$$

On cherche à minimiser, au bout d'un temps $T>0$ fixé, la quantité suivante

$$C(u) = \int_0^T u(t)\, dt + x(T).$$

1°)

1.1°) Montrons que, pour tout contrôle, on a $x(t)>0$ et $y(t)>0$, pour tout $t \in [0,T]$.

$\boxed{3.1.11°}$

Soit $t \in [0, T]$, on a :

$$y'(t) = -y(t) + u(t),$$

c'est-à-dire,

$$y'(t) + y(t) = u(t).$$

C'est-à-dire,

$$\left(e^{t} y(t)\right)' = e^{t} u(t).$$

Ce qui donne,

$$e^{t} y(t) - y(0) = \int_0^t e^{s} u(s)\, ds,$$

Comme $\int_0^t e^{s} u(s)\, ds \geq 0$ car $u(t) \geq 0$, on obtient

$$e^{t} y(t) - y(0) \geq 0.$$

C'est-à-dire,

$$y(t) \geq e^{-t} y(0)$$

$$> 0 \text{ car } e^{-t} > 0 \text{ et } y(0) > 0 \text{ (par hypothèse).}$$

$\boxed{3.1.12°}$

Comme première conclusion, on a :

$\forall t \in [0, T], \quad y(t) > 0.$

Montrons maintenant que $\forall t \in [0, T], \; x(t) > 0.$

Supposons par absurde qu'il existe un point $t^* \in]0, T]$

tq $\quad x(t^*) = 0.$

On ~~consi~~ considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\,(1 - y(t)), \\ x(t^*) = 0. \end{cases}$$

Par unicité, on a $\; x \equiv 0$, ce qui est en contradiction

avec l'hypothèse voir que $x(t) > 0$, pour tout $t \in [0, \varepsilon)$,

avec $\varepsilon > 0$ suffisament petit

En conclusion, on a : $\forall t \in [0, T], \; x(t) > 0.$

1.2°) Déterminons les points d'équilibre du système.

Les points d'équilibre (x_c, y_c, u_c) vérifient

$$\begin{cases} x_c(1-y_c) = 0 \\ -y_c + u_c = 0. \end{cases}$$

Comme $x_c > 0$, on obtient $1 - y_c = 0$ et $u_c = y_c$.

C'st-à-dire $y_c = u_c = 1$.

Alors les ~~poin~~ points d'équilibre sont
$(x_c, y_c, u_c) = (x_c, 1, 1)$ et ceci n'st possible

que si $M \geq 1$; sinon, il n'y a pas de point

d'équilibre.

2°)

2.1°) L'équation du Hamiltonian associé

est:

$\boxed{3.1.14°}$

$H(t, x, y, \lambda_1, \lambda_2, u)$

$= \lambda_1 \cdot x \cdot (1-y) + \lambda_2 \cdot (-y+u) + u.$

Les équations de l'état adjoint sont :

$$(A) \begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = -\lambda_1(t)(1-y(t)), \\ \dot{\lambda}_2(t) = \lambda_1(t)\, x(t) + \lambda_2(t) \\ \lambda_1(T) = 1, \quad \lambda_2(T) = 0. \end{cases}$$

(Rappel : $\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}$, $\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}$).

2.2°) Vérifions que, $\forall t \in [0,T]$, on a $\lambda_1(t)x(t) = x(T)$ et en déduire une expression de $\lambda_2(t)$ pour tout $t \in [0,T]$.

Soit $t \in [0,T]$, on a

$$\dot{\lambda}_1(t)\, x(t) + \lambda_1(t)\, \dot{x}(t)$$

$$= -\lambda_1(t)(1-y(t))\, x(t) + \lambda_1(t)\, x(t)(1-y(t))$$

$$= 0.$$

Alors,

$$\forall t \in [0,T], \ \lambda_1(t)\, x(t) = C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Pour $t = T$, on a :

$$\underline{\lambda_1(T)}\ \underline{x(T)} = C.$$

C'est-à-dire

$$1 \cdot x(T) = C.$$

C'est-à-dire, $\cancel{\forall t \in [0,T],}$ $x(T) = C$.

Alors,

$$\boxed{\forall t \in [0,T], \ \lambda_1(t)\, x(t) = x(T)}$$

$\boxed{3.1.16°}$

En déduire une expression de $\lambda_2(t)$.

D'après (A), on a :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_2(t) = \lambda_1(t)\, x(t) + \lambda_2(t), \ t \in [0,T] \\ \lambda_2(T) = 0. \end{cases}$$

Comme, $\lambda_1(t)\, x(t) = x(T)$, pour tout $t \in [0,T]$,

on obtient

$$\dot{\lambda}_2(t) = x(T) + \lambda_2(t), \text{ pour tout } t \in [0,T]$$

C'est-à-dire,

$$\dot{\lambda}_2(t) - \lambda_2(t) = x(T), \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

C'est-à-dire,

$$\left(e^{-t} \lambda_2(t)\right)' = e^{-t} x(T).$$

Ce qui donne,

$\boxed{3.1.17°}$

$$e^{-T}\lambda_2(T) - e^{-t}\lambda_2(t) = -e^{-T}x(T) + e^{-t}x(T)$$

Comme, $\lambda_2(T) = 0$, on obtient

$$\boxed{\lambda_2(t) = \left(e^{t-T} - 1\right) x(T)}$$

3°)

3.1°) Montrons que les contrôles optimaux sont bang-bang, c'est-à-dire qu'ils ne prennent que les valeurs 0 et M.

On note par u^* le contrôle optimal et (x^*, y^*) la trajectoire optimale associée.

~~On a~~

$$\cancel{H(t, x^*, y^*, \lambda_1, \lambda_2, u^*)}$$

$$\cancel{=}$$

$\boxed{3.1.18°}$

D'aprés le principe du maximum de Pontryaguine Théorème 3.2., on a

$$H(t, x^*, y^*, \lambda_1, \lambda_2, u^*) = \min_{v \in [0,M]} H(t, x^*, y^*, \lambda_1, \lambda_2, v).$$

C'st-à-dire,

$$\lambda_1 \cdot x^* \cdot (1-y^*) + \lambda_2 \cdot (-y^* + u^*) + u^*$$
$$= \min_{v \in [0,M]} \left\{ \lambda_1 \cdot x^* \cdot (1-y^*) + \lambda_2 \cdot (-y^* + v) + v \right\}.$$

C'st-à-dire

$$(\lambda_2 + 1) u^* = \min_{v \in [0,M]} \left\{ (\lambda_2 + 1) v \right\}.$$

Ce qui donne,

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda_2(t) + 1 > 0, \\ M \text{ si } \lambda_2(t) + 1 < 0. \end{cases}$$

$\boxed{3.1.19°}$

De plus comme la fonction $t \longmapsto \lambda_2(t)+1 = (e^{t-T}-1)x(T)+1$

est strictement croissante (voir que $x(T)$ est strictement positive), alors

il résulte que la fonction $t \longmapsto \lambda_2(t)+1$ change au

plus une fois son signe.

3.2°) Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u^*(t) = 0$,

pour tout $t \in [T-\varepsilon, T]$.

Comme,

$$\lambda_2(T)+1 = 1 > 0, \text{ alors il } \varepsilon > 0$$

tel que $t \longmapsto \lambda_2(t)+1$ est strictement positive pour

tout $t \in [T-\varepsilon, T]$ (voir que la fonction $t \mapsto \lambda_2(t)+1$ est continue).

Par suite,

$$u^*(t) = 0, \text{ pour tout } t \in [T-\varepsilon, T].$$

$\boxed{3.1.20°}$

4°) 4.1) Comme la fonction $t \mapsto \lambda_2(t)+1=(e^{t-T}-1)x(T)+1$ est strictement croissante, alors l'équation $\lambda_2(t)+1=0$ admet au plus une solution et par suite u^* a au plus une commutation.

4.2°) On suppose qu'il existe t^* tq $\lambda_2(t^*)+1=0$.

Déterminons t^*.

On a,

$$\lambda_2(t^*)+1=0 \Leftrightarrow (e^{t^*-T}-1)\,x(T)+1=0$$

$$\cancel{\Leftrightarrow (1-e^{T-t^*})\,x(T)=}$$

$$\Leftrightarrow e^{t^*-T}=1-\frac{1}{x(T)}$$

$$\Leftrightarrow e^{t^*}=\left(1-\frac{1}{x(T)}\right)e^{T}$$

$$\Leftrightarrow t^*=\ln\left(\left(1-\frac{1}{x(T)}\right)e^{T}\right)$$

$$=\boxed{T+\ln\left(1-\frac{1}{x(T)}\right)}$$

$\boxed{3.1.21°}$

Exercice 4 : Dosage du niveau de glucose dans le sang.

On considère le Hamiltonian H définie par

$$H(x,u,\lambda) = \lambda(-\alpha x + u) + u^2$$

i) L'équation de l'état adjoint λ^*.

D'après le principe du maximum de Pontryaguine, on a

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, u^*, \lambda^*)$$
$$= \boxed{\alpha \lambda^*(t).}$$

ii) On a,

$$\lambda^*(T) = \Psi'(x^*(T)) \text{ avec } \Psi(x) = \beta\cdot(x-b)^2$$
$$= \boxed{2\beta(x^*(T) - b).}$$

$\boxed{3.1.22^\circ}$

iii) Les autres conditions d'optimalité sont

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u}(x^*, u^*, \lambda^*) = 0 \\ \dot{x}^*(t) = -\alpha x^*(t) + u^*(t) \\ x^*(0) = a. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \lambda^*(t) + 2u^*(t) = 0 \\ \dot{x}^*(t) = -\alpha x^*(t) + u^*(t) \\ x^*(0) = a. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} u^*(t) = -\frac{\lambda^*(t)}{2} \\ \dot{x}^*(t) = -\alpha x^*(t) + u^*(t) \\ x^*(0) = a. \end{cases} \qquad (1.1)$$

2°) La résolution du système d'optimalité et la détermination du contrôle optimal.

D'après les questions i) et ii), on a :

$$\lambda^*(t) = 2\beta(x^*(T) - b)e^{\alpha(t-T)} \qquad (1.2)$$

Par suite d'aprés (1.1) et (1.2), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = -\alpha\, x^*(t) - \beta\left(x^*(T)-b\right) e^{\alpha(t-T)} \\ x^*(0) = a. \end{cases}$$

Ce qui donne,

$$x^*(t) = a\, e^{-\alpha t} - \beta\left(x^*(T)-b\right)\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\, e^{\alpha(s-T)}\, ds$$

$$= a\, e^{-\alpha t} - \beta\left(x^*(T)-b\right) e^{-\alpha(t+T)} \int_0^t e^{2\alpha s}\, ds$$

$$= a\, e^{-\alpha t} - \beta\left(x^*(T)-b\right) e^{-\alpha(t+T)} \left(\frac{e^{2\alpha t}-1}{2\alpha}\right)$$

$$= a\, e^{-\alpha t} - \frac{\beta\left(x^*(T)-b\right) e^{-\alpha T}}{\alpha}\, Sh(\alpha t). \quad (1.3)$$

Maintenant si on pose $t = T$, on obtient

$$x^*(T) - b = a\, e^{-\alpha T} - \frac{\beta\left(x^*(T)-b\right) e^{-\alpha T}}{\alpha}\, Sh(\alpha T) - b$$

C'st-ā-dire,

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\cdot e^{-\alpha T}\right)\cdot\left(x^*(T)-b\right) = a\, e^{-\alpha T} - b$$

$Sh(\alpha T)$

Ce qui donne,

$$x^*(T) - b = \frac{\alpha\,(a e^{-\alpha T} - b)}{\alpha + \beta e^{-\alpha T}\,\mathrm{Sh}(\alpha T)}$$

Par suite d'après (1.3), on a :

$$\boxed{x^*(t) = a e^{-\alpha t} - \frac{\beta (a e^{-\alpha T} - b) e^{-\alpha T}}{\alpha + \beta e^{-\alpha T}\,\mathrm{Sh}(\alpha T)}\,\mathrm{Sh}(\alpha t)}$$

Comme

$$\lambda^*(t) = 2\beta\,(x^*(T) - b)\, e^{\alpha(t-T)},$$

et

$$u^*(t) = -\frac{\lambda^*(t)}{2} = -\beta\,(x^*(T) - b)\, e^{\alpha(t-T)},$$

on obtient

$$\boxed{\lambda^*(t) = 2\beta\alpha \left(\frac{a e^{-\alpha T} - b}{\alpha + \beta e^{-\alpha T}\,\mathrm{Sh}(\alpha T)} \right) e^{\alpha(t-T)},}$$

et

$$\boxed{u^*(t) = -\beta\alpha \left(\frac{a e^{-\alpha T} - b}{\alpha + \beta e^{-\alpha T}\,\mathrm{Sh}(\alpha T)} \right) e^{\alpha(t-T)}.}$$

$\boxed{3 - 1 - 25^\circ}$