Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2019-2020**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique Algèbre 2

Cours sur : Les Matrices (PARTIE II)

1 Changement de bases

1.1 Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel, et soient $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ deux bases de E, chaque vecteur de la base $\mathcal{B}_2$ peut s'ecrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$

$$w_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + ... + a_{nj}v_n \tag{1}$$

alors la matrice

$$P = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \end{array}$$

est appelée matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, on la note

$$P = P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$$

Remarque .1

1. *$\mathcal{B}_2$ est une base de E donc $rgP = n \Rightarrow P$ est inversible.*
2. *Si $A = P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ alors $P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = A^{-1}$.*

Exemple .1 *Dans $\mathbb{R}^2$, soient la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ et la base $\mathcal{E}' = \{e'_1 = (2, 1), e'_2 = (3, 2)\}$. Cherchons la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$.*
Il faut écrire les vecteurs de la base $\mathcal{E}'$ en fonction des vecteurs de la base canonique $\mathcal{E}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} e'_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 \\ e'_2 = \alpha' e_1 + \beta' e_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (2, 1) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) \\ (3, 2) = \alpha'(1, 0) + \beta'(0, 1) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2, \beta = 1 \\ \alpha' = 3, \beta' = 2 \end{array} \right.$$

Alors

$$P = \begin{array}{cc} \begin{matrix} e'_1 & e'_2 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} \end{array}$$

Si on fait l'inverse, c'est à dire les vecteurs de la base canonique $\mathcal{E}$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{E}'$ on trouve la matrice P^{-1}.

1.2 Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur

Soit E un espace vectoriel, et soient $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ deux bases de E.
Alors pour tout $u \in E$, on a :

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j w_j$$

En utilisant l'équation (1) on obtient

$$u = \sum_{j=1}^{n} x'_j \big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(\sum_{j=1}^{n} x'_j a_{ij}\big) v_i.$$

Ce qui implique que

$$\forall i = 1, .., n : x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j.$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

c'est à dire $X_{\mathcal{B}_1} = P.X'_{\mathcal{B}_2}$, équivalent à $P^{-1}.X_{\mathcal{B}_1} = X'_{\mathcal{B}_2}$ car P est inversible.

Exemple .2 *Soit $v = (-3, 2) \in \mathbb{R}^2$ dans la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$. Quelles sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}' = \{e'_1, e'_2\}$ où*

$$\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + e_2 \\ e_2 = 3e_1 + 2e_2 \end{cases}$$

On remarque que la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ est $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, donc

$$X = P.X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x' + 3y' \\ x' + 2y' \end{pmatrix}.$$

En résolvant le système, on trouve $x' = -12$ et $y' = 7$. Donc les coordonnées de v dans la nouvelle base est $(-12, 7)$.

1.3 Effet d'un changement de base sur la matrice associée à une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels donnés, tels que $\dim E = p$ et $\dim F = k$, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, avec $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ et $\mathcal{B}'_1 = \left\{v'_1, v'_2, ..., v'_p\right\}$ deux bases de E, et $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$ et $\mathcal{B}'_2 = \{w'_1, w'_2, ..., w'_k\}$ deux bases de F. Si l'on pose

$$A = M(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$$

la matrice associée à f par rapport aux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et

$$A' = M\left(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2\right)$$

la matrice associée à f par rapport aux bases $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ et si l'on pose

$$P = P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}'_1}$$

la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}'_1$ et

$$Q = P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}'_2}$$

la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}'_2$ alors on a la relation dite de changement de base

$$A' = Q^{-1}AP.$$

A et A' sont appelées matrices équivalentes.

Remarque .2 *Dans le cas particulier où f est un endomorphisme alors $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'_2$*

$$A' = P^{-1}AP.$$

A et A' sont dites semblables.

Exemple .3 *Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$, on considère l'application linéaire f définie par sa matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Déterminons la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{E}' = \{e'_1, e'_2\}$ où

$$\begin{cases} e'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \\ e'_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 \end{cases}$$

Donc la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ est

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} e'_1 & e'_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

Maintenant, on a besoin de la matrice P^{-1}, pour l'obtenir il suffit d'écrire les vecteurs e_1 et e_2 en fonction de e'_1 et e'_2. On obtiendra

$$\begin{cases} e_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e'_1 - \frac{1}{2}e'_2 \\ e_2 = \frac{1}{2}e'_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e'_2 \end{cases}$$

Ce qui nous donne que

$$P^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \end{array} \end{array}$$

La matrice associée à f par rapport à la base $\mathcal{E}'$ est donnée par la formule

$$A' = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Après un calcul de produit de 3 matrices carrées d'ordre 2, on trouve

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(e'_1) & f(e'_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \end{array} \end{array}$$

Références

---

1. Algèbre, Cours de Mathématiques pour la première année , site web : http ://exo7.emath.fr/
2. Algèbre linéaire, 5e édition, de Joseph Grifone.
3. Le succès en algèbre en fiches-méthodes : 1re année, de Abdelaziz El Kaabouchi.

Auteur

M. Mamchaoui

Laboratoire de Statistiques et Modélisation Aléatoires (LSMA). Faculté des Sciences. Département de Mathématiques. Université Abou Bakr Belkaïd, Tlemcen, BP 119, 13000 Tlemcen, Algérie.

`E-mail: mohamed.mamchaoui@univ-tlemcen.dz`

`Site-web:`

`https://sites.google.com/view/mamcha/enseignements/l1-mathématiques-informatique`