Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2019-2020

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 2

Fiche de TD 7 : Les matrices

Exercice 1 :
Soient A, B et C les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $B + C, B - C, B + 2C, 2B - 3C$.
2. Calculer AB, AC, A^2, A^3.
3. Déterminer ${}^tA,\ {}^tB,\ {}^tC,\ {}^t(AB)$.

Exercice 2 :
Soit f l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) = (x + y, y + z). \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice associée à f dans les bases canoniques.
2. Calculer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 :
Désignons par $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}.$$

1. Préciser les vecteurs $f(e_1), f(e_2), f(2, 5), f(1, 3)$.
2. Donner l'expression de f.

Exercice 4 :
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis trouver deux réels $\alpha,\ \beta$ tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
2. Déduire de ce qui précède que A est inversible, et donner A^{-1}. Retrouver A^{-1} par utilisation de la comatrice.

Exercice 5 :
Soit f l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = (2x-3y, x+y). \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice A de f par rapport à la base canonique $B = \{e_1, e_2\}$.
2. Soit $u_1 = (1,2), u_2 = (2,3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Vérifier que $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice A' de f par rapport à $B' = \{u_1, u_2\}$.
4. Soit V un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Exprimer V dans la base B'. En déduire la matrice de passage P de B à B'.
5. Exprimer la matrice A' en fonction de A et P.