H.BENALLAL

Courbes et Surfaces Paramétrées

Université de TLEMCEN, Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
2019-2020

Surfaces paramétrées

H.BENALLAL

28 avril 2020

1 Rappel sur les différentielles

L'étude des surfaces paramétrées est une généralisation de celle des arcs paramétrées. Nous nous intéressons ici aux propriétés affines des surfaces paramétrées et nous introduisons la notion de surface géométrique.

On rappelle dans cette partie les notions différentielles utiles pour les surfaces.

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ (ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$).

Définition 1.0.1 *Une fonction* $\begin{array}{c} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \longmapsto f(u,v) \end{array}$ *est dite de classe* C^1 *si* f *et ses dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ *existent et sont continues.*

Définition 1.0.2 *La fonction* f *est dite de classe* C^k *si les dérivées partielles jusqu'à l'ordre* k *existent et soient continues.*

f est dite de classe C^∞ si f est de classe $C^k, \forall k$.

Si f est de classe C^2, alors: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$

Notations: On note par:

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, f_v = \frac{\partial f}{\partial v}, f_{uv} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, f_{vu} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}.$$

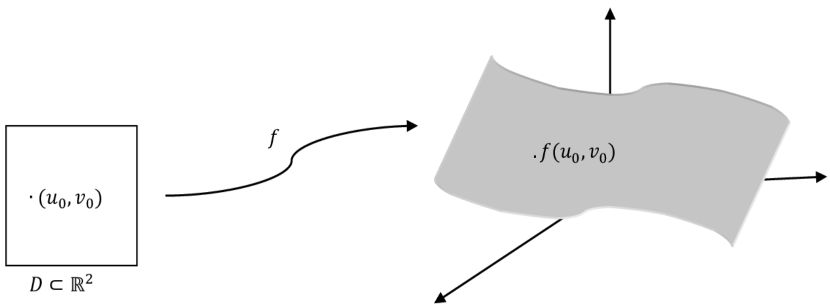
2 Représentation paramétrique des surfaces régulières

Définition 2.0.1 (Surfaces paramétrées)

Une représentation paramétrique de classe C^k d'un sous ensemble des points M dans $\mathbb{R}^3$ est une application de classe C^k:

$$\begin{array}{c} f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \longmapsto f(u,v) \end{array}$$

L'image $M = f(D) = \{f(u,v), u, v \in D\}$ est appelée la surface géométrique ou le support géométrique de la surface paramétrée. (une surface lisse de classe au moins C^1)



Exemple 2.0.2 *La sphère $S^2(0,a)$ est définie par l'application*

$$f : [0, 2\pi] \times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(v,u) = (a\cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$$

2.1 Reparamétrisation

On peut reparamétrer les surfaces paramétrées par les difféomorphismes. Soient $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée de classe C^1 et $g : X \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow D$ un C^1 difféomorphisme. Alors: $f \circ g : X \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une surface paramétrée qui a exactement le même support géométrique de f. On dit que $f \circ g$ est une reparamétrisation de la surface.

Définition 2.1.1 *On dit qu'une surface paramétrée est simple si et seulement si l'application f est injective.*

Définition 2.1.2 *On dit qu'une surface paramétrée est cartésienne si et seulement si, il existe un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$ tel que l'on ait:*

$$\forall (u,v) \in D : f(u,v) = O + u\overrightarrow{i} + v\overrightarrow{j} + h(u,v)\overrightarrow{k}$$

Définition 2.1.3 *Soit* $f : (u,v) \longmapsto f(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$ *une nappe paramétrée de* $\mathbb{R}^3$. *La matrice jacobienne de la nappe est la fonction matricielle*

$$J : (u,v) \longmapsto J(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Définition 2.1.4 *Une surface paramétrée:* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *est dite régulière au point* $p = f(u,v)$ *si et seulement si la matrice jacobienne est de rang 2. Ce-ci est équivalent à:* $f_u \wedge f_v \neq 0, \quad \forall u, v \in D$

Définition 2.1.5 *Un sous ensemble* M *de* $\mathbb{R}^3$ *connexe est appelé une surface si chaque point de* M *admet un voisinage qui soit régulièrement paramétré.*

2.2 Exemples

1) Le graphe d'une fonction de classe C^2

$$\begin{aligned} g : D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto g(u,v) = z \end{aligned}$$

définie par: $G_g = \big\{(u, v, g(u,v)) \in \mathbb{R}^3, u, v \in D\big\}$.
La paramétrisation $f(u,v) = (u, v, g(u,v))$ de G_g est régulière. En effet:

$f_u = (1, 0, g_u),\ f_v = (0, 1, g_v)$ et $f_u \wedge f_v = (-g_u, -g_v, 1) \neq 0\ \forall u, v \in D$

2) La représentation paramétrique:

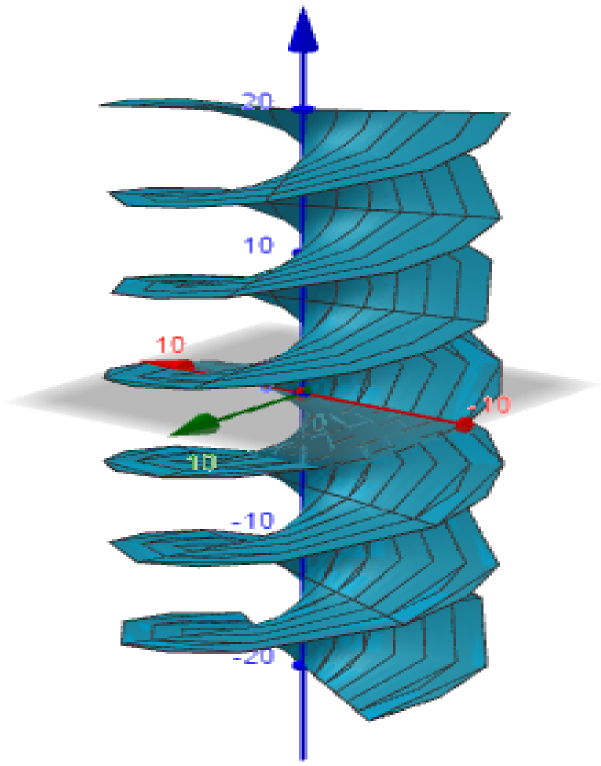
$$f(u,v) = (u+v, u-v, u^2+v^2)$$

est régulière: $f_u = (1, 1, 2u), \quad f_v = (1, -1, 2v)$ et $f_u \wedge f_v = (2v + 2u, 2u - 2v, -2) \neq 0 \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}^2$

3) L'hélicoïde:

$$f(u,v) = (u \cos v, u \sin v, bv) \quad u \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}, b > 0$$

On a: $f_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $f_v = (-u \sin v, u \cos v, b)$ et $f_u \wedge f_v = (b \sin v, -b \cos v, u) \neq 0$

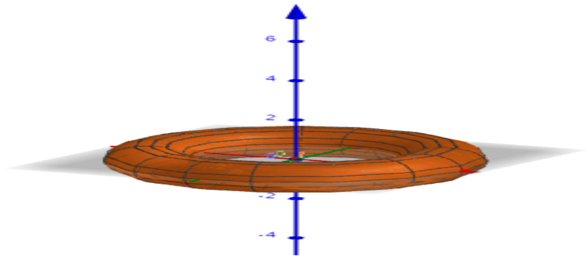


4) Le tore:

$$f(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, b \sin u)$$

$u \geq 0, v < 2\pi, R > r > 0$, On a:

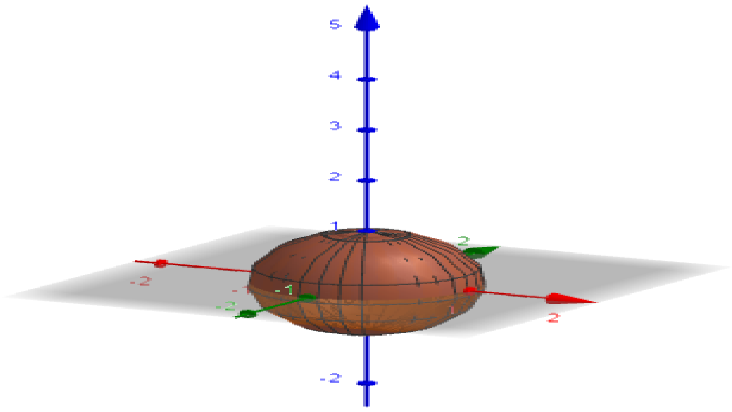
$$f_u \wedge f_v = -b(R + r \cos u)(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \neq 0, \forall u, v$$



5) La sphère unité:

$$f(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u), (u,v) \in]0,\pi[\times]0,2\pi[$$

On a: $f_u \wedge f_v = (\sin u) f(u,v) \neq 0, \forall u, v$



3 Plan tangent à une surface régulière

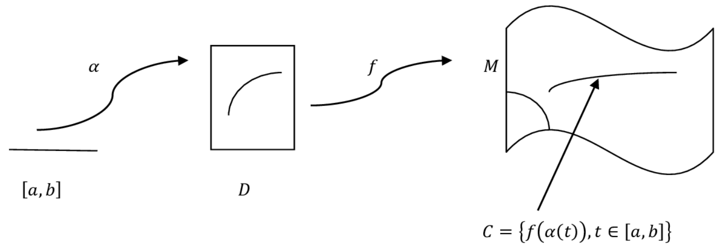
3.1 Courbe tracée sur une surface de $\mathbb{R}^3$

Soit $f(u,v)$ une représentation paramétrique d'une surface M de classe C^1. Soit

$$\begin{gathered} \alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \alpha(t) = (u(t), v(t)) \end{gathered}$$

une courbe paramétrée régulière plane de classe C^1. Considérons l'image de cette courbe dans la surface M. Alors l'application $f \circ \alpha$:

$I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée de classe C^1, dont le support est inclus dans le support: $M = f(D)$.



Considérons la courbe $\alpha_1 : u \in I \longmapsto \alpha_1(u) = f(u, v_0)$. Si α_1 est régulière , alors le vecteur $\alpha_1'(u_0)$ est tangent à la courbe α_1 au point $\alpha_1(u_0)$.

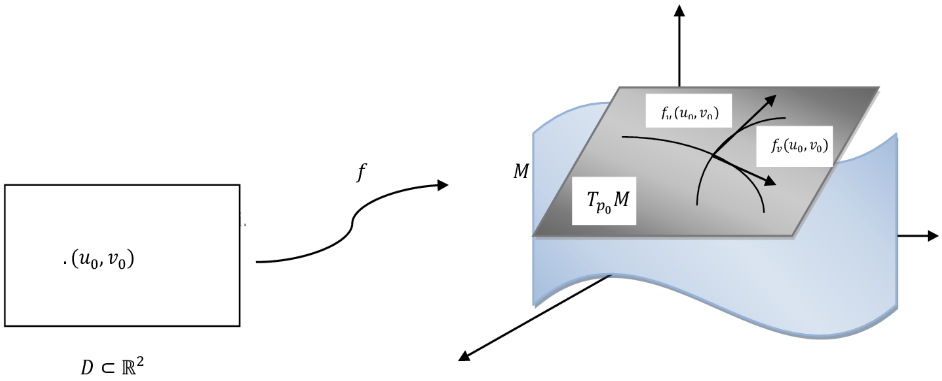
De même si la courbe: $\alpha_2 : v \in J \longmapsto \alpha_2(v) = f(u_0, v)$ est régulière, alors le vecteur $\alpha_2'(v_0)$ est tangent à la courbe α_2 au point $\alpha_2(v_0)$. Où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que: $(u_0, v_0) \in I \times J \subset D$. Et $\alpha_1'(u_0) = f_u(u_0, v_0), \alpha_2'(v_0) = f_v(u_0, v_0)$.

Et comme $f_u \wedge f_v \neq 0$ par hypothèse, alors les vecteurs f_u et f_v sont linéairement indépendants et ils engendrent un plan.

3.2 Plan tangent à une surface

Définition 3.2.1 *L'espace tangent à une surface paramétrée $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ au point $p_0 = f(u_0, v_0)$ est l'espace vectoriel de dimension 2, noté*

$T_{p_0}M$, passant par p_0 est engendré par les vecteurs $f_u(u_0, v_0)$ et $f_v(u_0, v_0)$.



Définition 3.2.2 *Soit $T_{p_0}M$ le plan tangent passant par le point p_0, le vecteur $N = \dfrac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}$ s'appelle le vecteur unitaire normal.*

Exemple 3.2.3 *L'hélicoïde:*

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv) \quad u \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}, b > 0$$

On a: $f_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $f_v = (-u \sin v, u \cos v, b)$, $f_u \wedge f_v = (b \sin v, -b \cos v, u) \neq 0$ et $\|f_u \wedge f_v\| = \sqrt{b^2 + u^2} \neq 0$, d'où:

$$N = \frac{1}{\sqrt{b^2 + u^2}}(b \sin v, -b \cos v, u)$$

3.3 Équation du plan tangent

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de $\mathbb{R}^3$ dans lequel $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ s'écrit: $(u, v) \longmapsto f(u, v) = f_1(u, v)\overrightarrow{i} + f_2(u, v)\overrightarrow{j} + f_3(u, v)\overrightarrow{k}$.

$p_0 = f(u_0, v_0)$ étant un point régulière de la surface M. Le plan tangent $T_{p_0}M$ est l'ensemble des points $m = (x, y, z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que le système $(\overrightarrow{p_0m}, f_u(u_0, v_0), f_v(u_0, v_0))$ soit lié, admet pour équation cartésienne:

$$\begin{vmatrix} x - f_1(u_0, v_0) & f_{1,u}(u_0, v_0) & f_{1,v}(u_0, v_0) \\ y - f_2(u_0, v_0) & f_{2,u}(u_0, v_0) & f_{2,v}(u_0, v_0) \\ z - f_3(u_0, v_0) & f_{3,u}(u_0, v_0) & f_{3,v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

c-à-d: $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{p_0 m} = af_u + bf_v$.

Exemple 3.3.1 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que: $f(u,v) = (5u - 3v^2 + 3, -u + v^2, 3u + 4v^2)$ l'équation de l'espace tangent à M au point $m_0 = f(0,0) = (3,0,0)$. On a: $f_u = (5,-1,3), f_v = (-6v, 2v, 8v)$. Soit $m = (x,y,z) \in T_{m_0}M$, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\overrightarrow{m_0 m} = af_u + bf_v = (5a, -a, 3a) + (-6bv, 2bv, 8bv)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x - 3 &= 5a - 6bv \\ y &= -a + 2bv \\ z &= 3a + 8bv \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x &= 5a - 6bv + 3 \\ y &= -a + 2bv \\ z &= 3a + 8bv \end{cases} \quad \textit{L'équation paramétrique}$$

l'équation cartésienne:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 5 & 0 \\ y & -1 & 0 \\ z & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x &= 5a + 3 \\ y &= -a \\ z &= 3a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x &= -5y + 3 \\ a &= -y \\ z &= -3y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x - z = -2y + 3 \Longrightarrow x + 2y - z - 3 = 0$$

4 les deux formes fondamentales

4.1 Première forme quadratique fondamentale

Soit $f : (u,v) \longmapsto f(u,v)$ une surface régulière de classe $C^k, k \geq 2$.

Définition 4.1.1 *On appelle la différentielle de $f(u,v)$, noté df, une application bijective du vecteur (du, dv) associe le vecteur:$df = f_u du + f_v dv$ dans le plan tangent.*

Définition 4.1.2 *La première forme quadratique fondamentale I_p (une forme bilinéaire symétrique) est la restriction de la forme quadratique $X \longmapsto \|X\|^2$ au plant tangent à M au point $p = f(u,v)$:*

$$\forall V, W \in T_p M : I_p(V,W) = V.W$$

où $V.W$ est le produit scalaire des vecteurs V, w dans $\mathbb{R}^3$.

Le plan vectoriel tangent à M est engendré par les deux vecteurs: f_u et f_v. Un vecteur du plan tangent est donc de la forme $V = \lambda f_u + \mu f_v$ est on a:

$$I_p(V, V) = \lambda^2 \|f_u\|^2 + 2\lambda\mu f_u.f_v + \mu^2 \|f_v\|^2$$

Elle s'exprime dans la base $\{f_u, f_v\}$ de T_pM par:

$$\begin{aligned} I_p(df, df) = df.df &= (f_u du + f_v dv) . (f_u du + f_v dv) \\ &= f_u.f_u du^2 + 2 f_u.f_v du.dv + f_v.f_v dv^2 \\ &= E du^2 + 2F du.dv + G dv^2 \end{aligned}$$

En désignant par: $E = f_u.f_u$, $F = f_u.f_v$ et $G = f_u.f_v$ des applications de classe C^{k-1} de D dans $\mathbb{R}$.

Les coefficients E, F et G s'appellent coefficients de la première forme fondamentale.

Théorème 4.1.3 *La forme T_p est une forme définie positive.*

Preuve

$$\begin{aligned} I_p = df.df &= E du^2 + 2F du.dv + G dv^2 \\ &= \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E du + F dv \\ F du + G dv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors la forme I_p est définie par la matrice symétrique $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$. Pour qu'elle soit définie positive il faut et il suffit que: $E > 0$ et $EG - F^2 > 0$. On a bien: $E = |f_u|^2 > 0$ et

$$EG - F^2 = (f_u.f_u)(f_v.f_v) - (f_u.f_v)^2 = (f_u \wedge f_v)^2 > 0$$

(On utilisera la formule : $(a \wedge b)(.c \wedge d) = (a.c)(b.d) - (a.d)(b.c)$).

Exemple 4.1.4 *Considérons la surface définie par:*

$f(u, v) = (u+v, u-v, uv) : f_u(u, v) = (1, 1, v)$ *et* $f_v(u, v) = (1, -1, u)$

Les coefficients de la première forme fondamentale sont: $E = f_u.f_u = 2 + v^2, G = f_v.f_v = 2 + v^2$ et $F = f_u.f_v = uv$. D'où $I_p = (2 + v^2)du^2 + 2uvdu.dv + (2 + u^2)dv^2$, cette forme est définies positive, car $E = 2 + v^2 > 0$ et $EG - F^2 = 2u^2 + 2v^2 + 4 > 0$.

4.2 Longueur et Aire

4.2.1 longueur d'un arc tracé sur une surface

Prenons une surface paramétrée: $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 et $\alpha : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow D$ une courbe paramétrée plane. Alors $f \circ \alpha = \gamma$ est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans $f(D)$.

$$\alpha : t \longmapsto (u(t), v(t)) \longmapsto f(u(t), v(t)) = \gamma(t)$$

Le vecteur tangent à γ en $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ est $\gamma'(t) = f_u(u(t), v(t))u'(t) + f_v(u(t), v(t))v'(t)$.

γ est ainsi rectifiable , sa longueur est donnée par:

$$L(\gamma(t)) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt = \int_a^b \|f_u(u(t), v(t))u'(t) + f_v(u(t), v(t))v'(t)\|dt$$

$$= \int_a^b \left[(u'(t))^2\|f_u(u(t), v(t))\|^2 + (v'(t))^2\|f_v(u(t), v(t))\|^2 + 2u'(t)v'(t)f_u.f_v\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_a^b \left[(u'(t))^2E(u(t), v(t)) + (v'(t))^2G(u(t), v(t)) + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t)\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_a^b \left[(u'(t))^2E(u(t), v(t)) + (v'(t))^2G(u(t), v(t)) + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t)\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

Donc

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{I_p(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt$$

4.2.2 l'aire d'une surface

La norme du produit vectoriel est égale à la surface du parallélogramme construit sur $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ c-à-d: $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\,|\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}|$.

Considérons $\triangle\ s = du.dv$ une petite surface encadrée par du et dv du point (u, v). Soit ΔS, l'image de $\triangle\ s$ par f:

$$\Delta S = |df \wedge df| = |f_u \wedge f_v|\, dudv = \sqrt{EG - F^2}dudv$$

Définition 4.2.3 *L'aire de la surface paramétrée $M = f(D)$ où $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est égale à*

$$Aire(M) = \iint_D \sqrt{FG - F^2}dudv$$

D est le domaine de la paramétrisation.

Exemple 4.2.4 *Soit M la surface d'un tore*

$$f(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, b\sin u)$$

$u \geq 0, v < 2\pi, R > r > 0$, *On a:*

$f_u(u,v) = -r(\sin u \cos v, -r\sin u \sin v, r\cos u), f_v(u,v) = (R{+}r\cos u)(-\sin v, \cos$

Ainsi

$$E = f_u.f_u = r^2, \quad F = f_u.f_v = 0, \quad G = f_v.f_v = (R + r\cos u)^2.$$

L'aire de cette surface est donc

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{EG - F^2}dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(r(R + r\cos u))dudv$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[r(Ru + r\sin u)\right]_0^{2\pi} dv = r\int_0^{2\pi} 2R\pi dv = 2Rr\pi[v]_0^{2\pi} = 4\pi^2 rR.$$

4.3 Application de Gauss

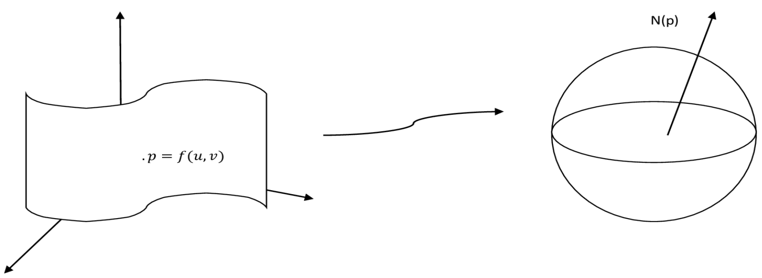
Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface régulière en tout point et $N(u,v) = \dfrac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}$ le vecteur normal unitaire au point $p = f(u,v)$ de M.

Soit $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ tel que } : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

L'application $N : M \longrightarrow s^2$ qui associe à chaque point $p = f(u,v)$, le vecteur unitaire normal en $f(u,v)$ est appelée application de Gauss de la surface:

$$N : p \in M \longmapsto N(p) \in S^2$$

On montre qu'elle est de classe C^∞ . Sa différentielle d_pN est une application linéaire de T_pM dans $T_{N(p)}S^2$. Comme ces deux espaces sont parallèles , d_pN peut être interprétée comme un endomorphisme de l'espace vectoriel T_pM.



4.4 Dérivée directionnelle

Soit $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles , p un point de M et V un vecteur tangent à M au point p $\quad(V \in T_pM)$.

On donne $\beta :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$ une courbe de classe C^1 telle que $\beta(0) = p$ et $\beta'(0) = V$. Alors :

$$F \circ \beta :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (F \circ \beta)(t)$$

Définition 4.4.1 $(F \circ \beta)'(t)$ *est appelée la dérivée directionnelle de la fonction F dans la direction du vecteur V.*

$$D_V F(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (F \circ \beta)(t) = \lim_{s \mapsto 0} \frac{F(t + sV) - F(t)}{s}$$

4.5 Opérateur de forme

Soit M une surface régulière paramétrée par $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et V un vecteur tangent à M au point $p \in M$: $V = af_u + bf_v$.
Soit $N(p)$ le vecteur unitaire normal à M au point p : c-à-d : $\forall\ V \in T_pM : V.N(p) = 0$.

Soit maintenant $\alpha : I \longrightarrow M$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant l'origine) et telle que: $\alpha(0) = p$ et $\alpha'(0) = v$ ($\alpha'(t) = u'(t)f_u(u(t), v(t)) + v'(t)f_v(u(t) + v(t))$).

Comme $\quad (N \circ \alpha)(t).T(t) = 0 \quad \forall t \quad$ proche de 0, où T le vecteur tangent à α. Alors $\quad T'(t).(N \circ \alpha)(t) = -(N \circ \alpha)'(t).T(t)$

Au point $t = 0$, on a :

$$-T(0).(N \circ \alpha)'(0) = T'(0).N(\alpha(0)) = T'(0).N(p)$$

c-à-d $-D_V N(p).V = T'(0).N(p)$ $(T(0) = \alpha'(0) = V)$.

Proposition 4.5.1
Pour tout $V \in T_pM$, la dérivée directionnelle $D_V N(p)$ appartient à T_pM.

De plus, l'application définie par

$$S_p : T_pM \longrightarrow T_pM$$

$$V \mapsto S_p(V) = -D_V N(p)$$

est une application linéaire symétrique. c-à-d : $\forall\ \ U, V \in T_p(M)$: $S_p(U).V = U.S_p(V)$. S_p est appelé l'opérateur de forme de la surface M.

Preuve

1) Montrons que $D_V N(p) \in T_pM$.
Soit $\alpha : I =]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc avec $\alpha(0) = p$ et $\alpha'(0) = V$.
On a : $\|(N \circ \alpha)(t)\| = 1 \implies (N \circ \alpha)'(t).(N \circ \alpha)(t) = 0$. Donc en $t = 0$: $\left.\dfrac{d}{dt}N(\alpha(t))\right|_{t=0} .N(\alpha(0)) = 0$. C-à-d: $D_V N(p).N(p) = 0$. Ce qui montre que $D_v N(p)$ est orthogonal à $N(p)$, ainsi $D_V N(p) \in T_pM$.

2) Montrons la linéarité de $V \mapsto D_v N$
on considère la courbe α passant par p et telle que $\alpha'(0) = V + W$.
d'après la définition :

$$D_{V+W}N(p) = \left.\frac{d}{dt}N(\alpha(t))\right|_{t=0} .(V + W)$$

$$= \left.\frac{d}{dt}N(\alpha(t))\right|_{t=0} .V + \left.\frac{d}{dt}N(\alpha(t))\right|_{t=0} .W$$
$$= D_V N(p) + D_W N(p)$$

3)Montrons que S_p est symétrique:
Considérons $(f_u, f_v) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}\right)(p)$ une base du palan tangent T_pM où $f(u, v)$ est la paramétrisation de la surface M.

a) Montrons que $S_p(f_u).f_v = S_p(f_v).f_u$, c-à-d: $D_{f_u}N(p).f_v = D_{f_v}N(p).f_u$
Soit $t \mapsto \alpha(t) = f(u(t), v(t))$ une courbe tracée sur M telle que $\alpha(0) = p$. On a

$$D_{\alpha'(0)}N(p) = D_{u'(0)f_u + v'(0)f_v}N(p) = u'(0)D_{f_u}N(p) + v'(0)D_{f_v}N(p)$$

D'autre part:

$$\left.\frac{d}{dt}N(u(t), v(t))\right|_{t=0} = N_u u'(0) + N_v v'(0)$$

Et comme $D_{\alpha'(0)}N(p) = \left.\dfrac{d}{dt}(N \circ \alpha)(t)\right|_{t=0}$. Alors $D_{f_u}N(p) = N_u$ et $D_{f_v}N(p) = N_u$.

Par ailleurs , comme N est perpendiculaire au plan T_pM, alors $N.f_u.N.f_v = 0$. En dérivant respectivement par rapport à v et u on aura: $N_v.f_u + N.f_{vu} = 0$ et $N_u.f_v + N.f_{vu} = 0$. Ainsi $N_v.f_u = -N.f_{uv} = N_u.f_v$

On en déduit

$$S_p(f_u).f_v = -(D_{f_u}N(p)).f_v = -N_u.f_v = -N_v.f_u$$
$$= (-D_{f_v}N(p)).f_u = S_p(f_v).f_u$$

b) Prenons maintenant, V, W deux vecteurs quelconques dans T_pM. Montrons que: $S_p(V).W = S_p(W).V$

V et W sont deux combinaisons linéaires de f_u et f_v, c-à-d:

$$V = af_u + bf_v \text{ et } W = cf_u + df_v$$

Alors

$$\begin{aligned} S_p(V).W &= S_p(af_u + bf_v).(cf_u + df_v) = (aS_p(f_u) + bS_p(f_v)).(cf_u + df_v) \\ &= acS_p(f_u).f_u + adS_p(f_u).f_v + bcS_p(f_v).f_u + bdS_p(f_v).f_v \\ &= acS_p(f_u).f_u + adS_p(f_v).f_u + bcS_p(f_u).f_v + bdS_p(f_v).f_v \\ &= af_u.(cS_p(f_u) + dS_p(f_v)) + bf_v.(cS_p(f_u) + dS_p(f_v)) \\ &= (af_u + bf_v).(cS_p(f_u) + dS_p(f_v)) = V.S_p(W) \end{aligned}$$

Proposition 4.5.2
Si l'opérateur S_p est partout nul, alors la surface M est un sous ensemble du plan.

Preuve

$$S_p : T_pM \longrightarrow T_pM$$
$$U \mapsto S_p(U) = -D_U N_p$$

Si $\forall U \in T_pM : S_p(U) = 0$ pour tout $p \in M$. Alors $N_u = N_v = 0$ donc $N(p) = cste$ et par suite M est un sous ensemble d'un plan.

Exemple 4.5.3
Soit $S^2(0,a)$ la sphère centrée à l'origine de rayon a. $f(u,v)$ une paramétrisation de la sphère $S^2(0,a)$.

$$f(u,v) = (a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, a\cos u), \quad 0 < v \leq 2\pi, 0 < u < \pi$$

$f_u = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, -a\sin u)$, $\quad f_v = (-a\sin u\sin v, a\sin u\cos v, 0)$ *et*

$$f_u \wedge f_v = (a\cos v\sin^2 u, a\sin v\sin^2 u, a\cos u\sin u)$$
$$= a\sin u(\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u) = a\sin u f(u,v)$$

le vecteur normal unitaire:

$$N = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|} = \frac{a \sin u f(u,v)}{a\,|\sin u|\,\|f(u,v)\|} = \frac{a \sin u}{a \sin u}.\frac{1}{a}.f(u,v) = \frac{1}{a}f(u,v)$$

L'application de Gauss est: $N_p = \dfrac{1}{a}f(u,v)$

Soit $\{f_u, f_v\}$ *une base de* T_pS^2 *l'espace tangent à* S^2 *au point* p

$$\forall p \in S^2 : S_p(f_u) = -D_{f_u}N = -N_u = -\frac{1}{a}f_u \ \text{ et } S_p(f_v) = -\frac{1}{a}f_v$$

et par suite $\forall V \in T_pS^2 : V = cf_u + df_v,$ *on a*

$$S_p(V) = cS_p(f_u) + dS_p(f_v) = -\left(\frac{c}{a}f_u + \frac{d}{a}f_v\right) = -\frac{1}{a}V$$

Donc $\quad \forall\ V \in T_pS^2 : S_p(V) = -\dfrac{1}{a}V = -\dfrac{1}{a}cf_u - \dfrac{1}{a}df_v.$

$$S_p(.) = -\frac{1}{a}Id_{T_pS^2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

.

4.6 Deuxième forme fondamentale

La deuxième forme fondamentale mesure en quelque sorte l'écart que fait une courbe tracée sur la surface avec la plan tangent au point $f(u_0(t), v_0(t))$

On munit l'espace vectoriel T_pM du produit scalaire induit par celui de $\mathbb{R}^3$ qu'on notera $\langle , \rangle_p$. La collection $\left\{\langle , \rangle_p\right\}_{p \in M}$ varie de façon différentiable en fonction de p; c'est précisément ce qu'on appelle la métrique riemannienne induite sur M.

Définition 4.6.1

Soit p *un point de la surface* M*. La forme bilinéaire symétrique* $II_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par:* $\forall V, W \in T_pM : II_p(V, W) = S_p(V).W$ *est dite la deuxième forme fondamentale de la surface* M *en* p*.*

Dans la base $\{f_u, f_v\}$ *de* T_pM*, on note par:*

$$l = II_p(f_u, f_u) = -(D_{f_u}N).f_u = f_{uu}.N$$

$$m = II_p(f_u, f_v) = -(D_{f_u}N).f_v = f_{uv}.N = f_{vu}.N$$

$$q = II_p(f_v, f_v) = -(D_{f_v}N).f_v = f_{vv}.N$$

De plus, si $V = af_u + bf_v$ *et* $W = cf_u + df_v$*. Alors*

$$II_p(V,W) = II_p(af_u + bf_v, cf_u + df_v)$$

$$= acII_p(f_u, f_u) + bdII_p(f_v, f_v) + bcII_p(f_v, f_u) + adII_p(f_u, f_v)$$

$$= acl + (ad + bc) + bdq = (a \quad b)\begin{pmatrix} lc + dm \\ cm + dq \end{pmatrix}$$

$$= (a \quad b)\begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix}_{(f_u, f_v)}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

D'où la matrice associée à II_p : $\begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix}$.

l, m *et* q *sont appelés les coefficients de la deuxième forme fondamentale.*

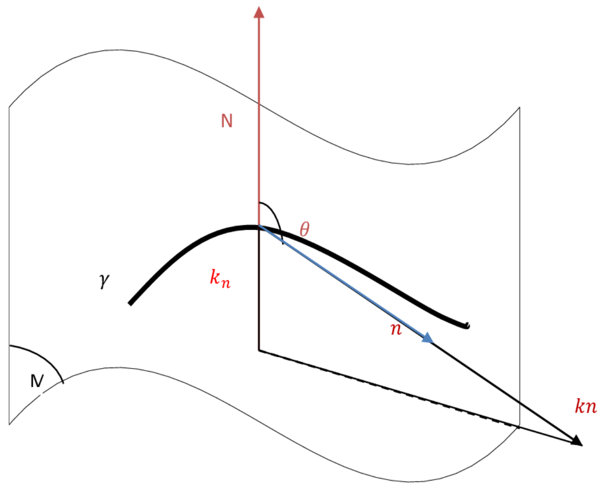
4.7 Courbure normale

Soit M une surface de classe ≥ 2 paramétrée par $f(u, v)$ contenant le point $p = f(u_0, v_0)$. Soit T_pM le plan tangent à la surface M au point p et N la normale unitaire à T_pM au point p.

Considérons la courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ paramétrée par la longueur de l'arc (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant l'origine) donné par: $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$ et $p = \gamma(0)$. La courbure de γ au point p est: $k = \|T'(t)\|$.

Notons n et N les vecteurs normaux en p respectivement à la courbe

γ et à la surface M, θ l'angle entre n et N.



Définition 4.7.1
On appelle courbure normale de γ en p le scalaire:

$$k_n = k.N = k(\cos\theta).n$$

On montre en fait que: $k_n(p) = II_p(\gamma'(0))$.

On a

$$II_p(\gamma'(0)) = S_p(\gamma'(0)).\gamma'(0)$$
$$= -D_{\gamma'(0)}N(p).\gamma'(0) = -(N \circ \gamma)'(0).\gamma'(0)$$

Comme $N(t)$ est orthogonal à $\gamma'(t)$, la relation $N(t).\gamma'(t) = 0$ implique que: $N'(t).\gamma'(t) = -N(t).\gamma''(t)$

Par conséquent

$$II_p(\gamma'(0)) = N(0).\gamma''(0) = N(0).T'(0) = N(0).k$$

On obtient : $\boxed{II_p(\gamma'(0)) = k_n(p)}$.

Exemple 4.7.2
Pour une sphère S^2 de rayon a , dans les coordonnées sphériques :

$$f(u,v) = (a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, a\cos u), \quad 0 < v \leq 2\pi, 0 < u < \pi$$

$f_u = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, -a\sin u)$, $\quad f_v = (-a\sin u\sin v, a\sin u\cos v, 0)$
et $N = \dfrac{1}{a}f(u,v)$.

A chaque point p sur cette sphère on peut faire passer un cercle de rayon a, considéré comme l'équateur de S^2. Au point p les vecteurs n et N coïncident, donc la courbure du cercle $k = \frac{1}{a}$ est égale à la courbure normale de la surface k_n. Ou encore, comme $\theta = 0$, alors $\cos\theta = 1$ et $k_n = k.N = \frac{1}{a^2} f(u,v)$. D'où $|k_n| = \frac{1}{a^2}.a = \frac{1}{a}$.

4.8 Courbures principales de la surfaces

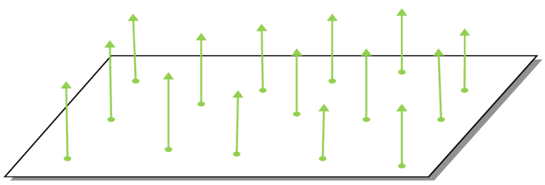
Comme la différentielle $DN(p)$ de l'application de Gauss est symétrique, c-à-d l'opérateur S_p est symétrique donc diagonalisable.

Il existe une base notée $\{e_1, e_2\}$ de T_pM telle que $S_p(e_1) = k_1e_1$ et $S_p(e_2) = k_2e_2$. En plus les nombres k_1 et k_2 (on suppose $k_1 \geq k_2$) sont les valeurs propres de la matrice de $S_p(.)$.

Définition 4.8.1 *La courbure normale maximale k_1 et la courbure normale minimale k_2 (les valeurs propres k_1 et k_2) sont appelées courbures principales de M au point p. Les directions des vecteurs e_1 et e_2 sont appelées directions principales de M au point p.*

Définition 4.8.2 *Le déterminant K de l'opérateur S_p: $K = k_1k_2$ est appelée courbure de Gauss de M en p. La moitié H de la trace de S_p: $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ est appelée courbure moyenne de M en p.*

Exemple 4.8.3
1) *dans la cas d'un plan affine l'application de Gauss est constante, donc de dérivée nulle, ainsi $k_1 = k_2 = K = H$*



2) *Dans le cas de la sphère S^2: On rappelle que la sphère S^2 est définie par l'équation: $x^2+y^2+z^2 = 1$. Et donc le champ de vecteur normal est donné au point $p = (x,y,z)$ sur la courbe γ tracée sur S^2 par $N(p) = (-x(t), -y(t), -z(t))$. par suite :$DN(p) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t))$.*

Donc $D_V N(p) = -V$ *pour tout* $V \in T_p S^2$
(On a déjà montrer que $S_p = -DN = -Id_{T_p s^2}$*, donc* $-k_1 = -k_2 = -H = K = 1$ *).*

4.9 Calculs explicites de K en fonction des deux formes fondamentales

Soient l, m et q les coefficients de la seconde forme fondamentale dans la base $\{f_u, f_v\}$: $l = f_{uu}.N, \quad m = f_{uv}.N, \quad q = f_{vv}.N$.

Notons $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de l'opérateur S_p relativement à la base $\{f_u, f_v\}$. C-à-d $S_p(f_u) = af_u + bf_v, \quad S_p(f_v) = cf_u + df_v$.

En faisant le produit scalaire de ces deux égalités par f_u puis f_v, on obtient quatre égalités:

$$S_p(f_u).f_u = af_u.f_u + bf_v.f_u = l = aE + bF$$

$$S_p(f_u).f_v = af_u.f_v + bf_v.f_v = m = aF + bG$$

$$S_p(f_v).f_u = cf_u.f_u + df_v.f_u = m = cE + dF$$

$$S_p(f_v).f_v = cf_u.f_v + df_v.f_v = q = cF + dG$$

Ces égalités peuvent s'écrire matriciellement sous la forme:

$$\begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix} = I_p^{-1}.II_p$$

la courbure de Gauss est le $\det S_p$:

$$K = \det(I_p^{-1}.II_p) = \frac{1}{\det I_p}.\det II_p = \frac{lq - m^2}{EG - F^2}$$

La courbure moyenne $H = \frac{1}{2} trace S_p$, or

$$S_p = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Gl - Fm & Gm - Fq \\ Em - Fl & Eq - Fm \end{pmatrix}$$

D'où $\quad H = \dfrac{Gl - 2Fm + Eq}{2(EG - F^2)}$.

Remarque 4.9.1
Il est facile de calculer les courbures principales qui sont racines du polynôme $X^2 - 2HX + K$. *On trouve* $K_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$, *et on a bien* $H^2 - K = \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 > 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{k_1 + k_2}{2} & = H \\ k_1.k_2 & = K \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_1 = 2H - k_2 \\ 2k_2H - k_2^2 = K \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_2^2 - 2Hk_2 + K = 0 \\ k_1^2 - 2Hk_1 + K = 0 \end{cases}$$

On définie ainsi le polynôme $X^2 - 2HX + K = 0$.

Exemple 4.9.2 *Nappe d'Enneper*
Soit $f(u,v) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2\right)$ *la paramétrisation de la surface d'Enneper (1Figure 1).*

1. *Déterminons le vecteur unitaire normal en chaque point: Soit* $p = f(u,v)$ *un point de la surface, le plan tangent au point* p *est engendré par* $\{f_u, f_v\}$ *où* $f_u = (1 - (u^2 - v^2), 2uv, 2u)$ *et* $f_v = (2uv, 1 + (u^2 - v^2), -2v)$ *donc*
$$f_u \wedge f_v = (1 + u^2 + v^2)(-2u, 2v, 1 - u^2 - v^2)$$
de norme $\|f_u \wedge f_v\| = (1 + u^2 + v^2)^2$
On obtient, le vecteur normal
$$N(u,v) = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|} = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}\left(-2u, 2v, 1 - u^2 - v^2\right)$$

2. *Calculons, en un point* p *de la surface, la deuxième forme fondamentale:*
La deuxième forme fondamentale II_p *est définie par la matrice symétrique* $\begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix}$. *Où* $l = \left\langle N, \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right\rangle$, $m = \left\langle N, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right\rangle$ *et* $q = \left\langle N, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right\rangle$
On calcule
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = (-2u, 2v, 2)\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = (2v, 2u, 0)\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = (2u, -2v, -2)$$
Or $N = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}\left(-2u, 2v, 1 - u^2 - v^2\right)$, *donc* $l = 2$, $m = 0$ *et* $q = -2$ *c-à-d* $II_p = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. *Montrons que la surface d'Enneper est de courbure moyenne nulle en chaque point*

   Rappelons Les dérivées premières du paramétrage:

   $$f_u = (1-(u^2-v^2), 2uv, 2u) \text{ et } f_v = (2uv, 1+(u^2-v^2), -2v)$$

   D'où l'on tire les coefficients de la première forme fondamentale I_p: $E = \langle f_u, f_u\rangle = \left(1+u^2+v^2\right)^2$, $F = \langle f_u, f_v\rangle = 0$, $G = \langle f_v, f_v\rangle = \left(1+u^2+v^2\right)^2$

   Et maintenant, l'opérateur de forme S_p *a pour matrice* $B = I_p^{-1} II_p$. *Or*

   $I_p^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}$, *d'où* $B = \dfrac{1}{(1+u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

   Par conséquent, les courbures principales sont: $k_1 = \dfrac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$ *et* $k_2 = \dfrac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}$, *ce-ci implique que la courbure moyenne* H *est nulle* $\left(H = -\dfrac{1}{2}(k_1+k_2) = 0\right)$.

4. *Le calcul de la courbure de Gauss* K *est immédiat*

   $$K = \det B = \frac{\det II_p}{\det I_p} = \frac{-4}{(1+u^2+v^2)^4}.$$

Proposition 4.9.3 *Soient* e_1 *et* e_2 *deux vecteurs unitaires dans les directions principales en un point* p *de courbures principales correspondantes* k_1 *et* k_2. *Supposons que* $V = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$ *pour* $\theta \in [0, 2\pi[$, *alors:*

$$II_p(V,V) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$$

Preuve

On a: $S_p(e_i) = k_ie_i$ pour $i = 1, 2$. Alors:

$$II_p(V,V) = S_p(V).V = S_p((\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2).((\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2)$$

$$= (k_1(\cos\theta)e_1 + k_2(\sin\theta)e_2).((\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$$

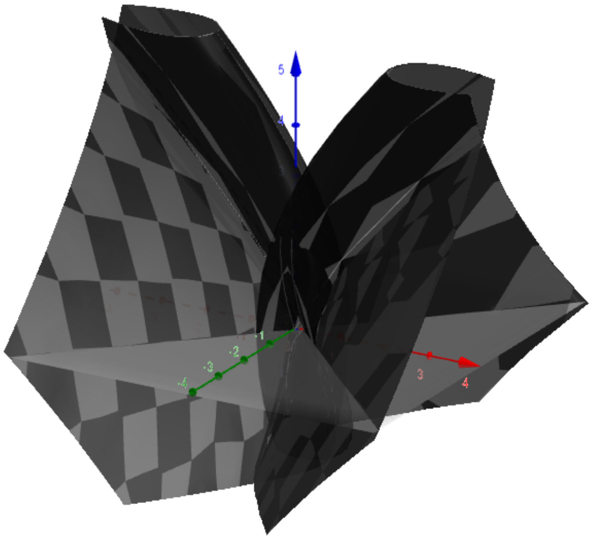


Figure 1: Surface d'Enneper

4.10 Interprétation géométrique

Fixons un point p de M.

Pour tout vecteur $V \in T_pM$, $II_p(V)$ est la courbure de la surface au point p dans la direction V. en particulier, k_1 est la courbure de la surface M dans la direction e_1 et k_2 est la courbure de la surface M dans la direction e_2.

Pour tout point de toute surface régulière de classe C^2, la direction dans laquelle la surface est la plus courbée et la direction dans laquelle la surface est la moins courbée sont orthogonales .

Il est clair que l'allure de la surface au voisinage du point p dépens du signe de k_1 et de k_2 :

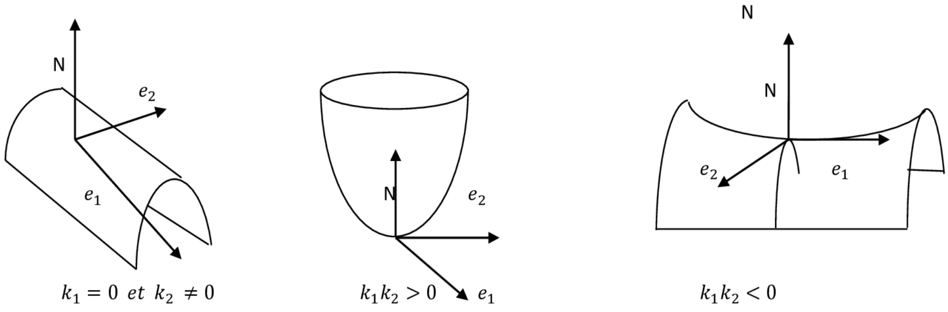
1) Si k_1 et k_2 ont une valeur commune k ($k_1 = k_2 = k$): c'est le cas où on peut représenter S_p et II_p par une matrice de la forme kId_2, c-à-d le cas où il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $II_p = kI_p$, égalité qui s'écrit: $(l = kE)$ et $(m = kF)$ et $(q = kG)$.

la surface représente localement une forme soit sphérique soit plane (cas de $k_1 = k_2 = 0$).

2) Si $K = 0$ ($k_1 = 0$ ou $k_2 = 0$), p est un point parabolique (un cylindrique).

3) Si $K = k_1k_2 > 0$, p est un point elliptique .

4) Si $K = k_1 k_2 < 0$, p est un point hyperbolique.



4.11 Etude d'un exemple: nappe de révolution

Définition 4.11.1

Une surface géométrique orienté M de classe C^k $(k \geq 1)$, est dite surface de révolution si et seulement si , on peut lui associer un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$, tel que M admette un représentant de la forme $(I \times \mathbb{R}, f)$ avec: $f(u,v) = O + g(u)\cos v\,\overrightarrow{i} + g(u)\sin v\,\overrightarrow{j} + h(u)\overrightarrow{k}$, I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et où g et h sont des applications de classe C^k de I dans $\mathbb{R}$, g ne prenant que des valeurs positives: $f(u,v) = (g(u)\cos v, g(u)\sin v, h(u))$.

1) la régularité

On a $f_u(u,v) = (g'(u)\cos v, g'(u)\sin v, h'(u))$ et $f_v(u,v) = (-g(u)\sin v, g(u)\cos v, 0) = g(u)(\sin v, \cos v, 0)$.

D'où $f_u \wedge f_v = (-h'(u)g(u)\cos v, -h'(u)g(u)\sin v, g'(u)g(u))$ de norme $\|f_u \wedge f_v\| = g(u)\sqrt{h'^2(u) + g'^2(u)}$, $(g(u) > 0, \forall u \in I)$. Donc (g', h') ne prend pas la valeur $(0,0)$, et par suite la surface M est régulière $(\|f_u \wedge f_v\| > 0)$. On déduit

$$N = \left(-\frac{h'(u)}{\sqrt{h'^2(u) + g'^2(u)}}\cos v, -\frac{h'(u)}{\sqrt{h'^2(u) + g'^2(u)}}\sin v, \frac{g'(u)}{\sqrt{h'^2(u) + g'^2(u)}} \right)$$

2) les formes fondamentales

On a: $E = f_u.f_u = g'^2 + h'^2$; $F = f_u.f_v = 0$; $G = f_v.f_v = g^2$. D'où la première forme fondamentale:

$$I_p = (f_u du + f_v dv).(f_u du + f_v dv) = (g'^2 + h'^2)du^2 + g^2 dv^2$$

On calcule en suite $f_{uu} = (g''(u)\cos v, g''(u)\sin v, h''(u))$, $f_{uv} = (-g'(u)\sin v, g'(u)\cos v, 0)$, $f_{vv} = (-g(u)\cos v, -g(u)\sin v, 0)$, d'où

$$l = f_{uu}.N = \frac{g'h'' - g''h'}{\sqrt{h'^2(u) + g'^2(u)}}, \quad m = f_{uv}.N = 0, \quad q = \frac{gh'}{\sqrt{g'^2 + h'^2}}$$

et la seconde forme fondamentale

$$II_p = \sqrt{g'^2 + h'^2}\left((g'h'' - g''h')du^2 + gh'dv^2\right)$$

3) Les courbures

Notons k_u et k_v les courbures principales de directions principales f_u et f_v. Un calcul simple donne

$$S_p(f_v) = -\frac{\partial N}{\partial v} = \frac{h'}{\sqrt{g'^2 + h'^2}}(-\sin v, \cos v, 0) = \frac{h'}{g\sqrt{g'^2 + h'^2}}.f_v$$

et donc $\quad k_v = \dfrac{h'}{g\sqrt{g'^2 + h'^2}}$.

La courbure de Gauss

$$K = \frac{lq - m^2}{EG - F^2} = \frac{lq}{EG} = \frac{gh'(g'h'' - g''h')}{g^2(g'^2 + h'^2)^2}$$

$$= \frac{h'}{g\sqrt{g'^2 + h'^2}}.\frac{g'h'' - g''h'}{\sqrt{(g'^2 + h'^2)^3}} = k_v.\frac{g'h'' - g''h'}{\sqrt{(g'^2 + h'^2)^3}}$$

D'où $\quad k_u = \dfrac{g'h'' - g''h'}{\sqrt{(g'^2 + h'^2)^3}}$.

Finalement la courbure moyenne

$$H = \frac{1}{2}(k_u + k_v) = \frac{1}{2}\left(\frac{h'}{\sqrt{g'^2 + h'^2}} + \frac{g'h'' - g''h'}{\sqrt{(g'^2 + h'^2)^3}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g'^2 + h'^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(h'g'^2 + h'^3 + gg'h'' - gg''h'\right)$$

.

5 Equation de Codazzi et Gauss

5.1 Symboles de Christoffel

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface régulière. $p = f(u,v)$ un point de M.

Considérons la base $\{f_u, f_v, N_p\}$ de $\mathbb{R}^3$. Il existent des fonctions : Γ^u_{uu}, Γ^v_{uu}, $\Gamma^u_{uv} = \Gamma^u_{vu}$, $\Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu}$, Γ^u_{vv} et Γ^v_{vv}, telles que:

$$f_{uu} = \Gamma^u_{uu} f_u + \Gamma^v_{uu} f_v + lN_p$$

$$f_{uv} = \Gamma^u_{uv} f_u + \Gamma^v_{uv} f_v + mN_p$$

$$f_{vv} = \Gamma^u_{vv} f_u + \Gamma^v_{vv} f_v + pN_p$$

Le fait que $f_{uv} = f_{vu}$ implique que $\Gamma^{\cdot}_{uv} = \Gamma^{\cdot}_{vu}$. Les fonctions $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ sont appelées symboles de Christoffel.

Exemple 5.1.1

Calculer les symboles de Christoffel de la sphère:

$$f(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos v), \quad 0 < u < \pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

$f_u(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$ *et* $f_v(u,v) = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$.

Par suite $f_u \wedge f_v = \sin v . f(u,v)$ *et* $\|f_u \wedge f_v\| = \sin u$. *D'où* $N(p) = f(u,v)$.

On calcule en suite

$$f_{uu} = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, cosu) = -f(u,v) = -N(p)$$

$$f_{vv} = (-\sin u \cos v, sinu \sin v, 0), f_{uv} = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

Calculons les $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$*:* *on a* $f_{uu} = -N(p)$, *donc* $\Gamma^u_{uu} = \Gamma^v_{uu} = 0$.

D'autre part: $f_{uv} = (-\cot u \sin u \sin v, \cot u \sin u \cos v, 0) = \cot u . f_v$. *Donc* $\Gamma^u_{uv} = 0$ *et* $\Gamma^v_{uv} = \cot u$.

Maintenant : $f_{vv} = \Gamma^u_{vv} f_u + \Gamma^v_{vv} f_v + qN(p)$. *En faisant le produit scalaire avec* f_u *puis* f_v, *on obtient*

$$f_{vv} . f_u = \Gamma^u_{vv} = -\sin u \cos u \implies \Gamma^u_{vv} = -\sin u \cos u$$

$$f_{vv} . f_v = \Gamma^v_{vv} = \sin^2 u \sin v \cos v - \sin^2 u \sin v \cos v = 0 \implies \Gamma^v_{vv} = 0$$

Conclusion: $\Gamma^u_{uu} = \Gamma^v_{uu} = \Gamma^u_{uv} = \Gamma^v_{vv} = 0$, $\Gamma^v_{uv} = \cot u$, $\Gamma^u_{vv} = -\sin u \cos u$.

5.2 Le calcul des symboles de Christoffel

$p = f(u,v)$ un point de la surface M ,$\{f_u, f_v\}$ une base de l'espace tangent T_pM au point p et $\{f_u, f_v, N(p)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$, donc

$$f_{uu} = \Gamma^u_{uu} f_u + \Gamma^v_{uu} f_v + lN_p$$
$$f_{uv} = \Gamma^u_{uv} f_u + \Gamma^v_{uv} f_v + mN_p$$
$$f_{vv} = \Gamma^u_{vv} f_u + \Gamma^v_{vv} f_v + pN_p$$

En faisant le produit scalaire de ces trois égalités par f_u puis f_v, on obtient

$$f_{uu}.f_u = \Gamma^u_{uu} E + \Gamma^v_{uu} F \text{ et } f_{uu}.f_v = \Gamma^u_{uu} F + \Gamma^v_{uu} G$$
$$f_{uv}.f_u = \Gamma^u_{uv} E + \Gamma^v_{uv} F \text{ et } f_{uv}.f_v = \Gamma^u_{uv} F + \Gamma^v_{uv} G$$
$$f_{vv}.f_u = \Gamma^u_{vv} E + \Gamma^v_{vv} F \text{ et } f_{vv}.f_v = \Gamma^u_{vv} F + \Gamma^v_{vv} G$$

D'autre part

$$f_{uu}.f_u = \frac{1}{2}(f_u.f_u)_u = \frac{1}{2}E_u, \quad f_{uv}.f_u = \frac{1}{2}(f_u.f_u)_v = \frac{1}{2}E_v$$
$$f_{uv}.f_v = \frac{1}{2}(f_v.f_v)_u = \frac{1}{2}G_u, \quad f_{vv}.f_v = \frac{1}{2}(f_v.f_v)_v = \frac{1}{2}G_u$$
$$f_{uu}.f_v = (f_u.f_v)_u - f_u.f_{uv} = F_u - \frac{1}{2}E_v, \; f_{vv}.f_u = (f_v.f_u)_v - f_v.f_{uv} = F_v - \frac{1}{2}G_u$$

D'où

$$\begin{cases} \Gamma^u_{uu} E + \Gamma^v_{uu} F = & \frac{1}{2}E_u \\ \Gamma^u_{uu} F + \Gamma^v_{uu} G = & F_u - \frac{1}{2}E_v \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Gamma^u_{uv} E + \Gamma^v_{uv} F = & \frac{1}{2}E_v \\ \Gamma^u_{uv} F + \Gamma^v_{uv} G = & \frac{1}{2}G_u \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Gamma^u_{vv} E + \Gamma^v_{vv} F = & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \Gamma^u_{vv} F + \Gamma^v_{vv} G = & \frac{1}{2}G_v \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} \\ \Gamma^v_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^u_{vv} \\ \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix}$$

On peut donc calculer les symboles de Christoffel en déterminant la première forme fondamentale.

Exemple 5.2.1 *La sphère unité*

$$f(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos v), \quad 0 < u < \pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

$f_u(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$ *et* $f_v(u,v) = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$. *On a*

$$(E = f_u . f_u = 1 \implies E_u = E_v = 0), \ (F = f_u . f_v = 0 \implies F_u = F_v = 0)$$

$$G = f_v . f_v = \sin^2 u \implies G_v = 0, G_u = \sin 2u$$

La matrice de la première forme fondamentale

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 u \end{pmatrix} \implies I_p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sin^2 u} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} \\ \Gamma^v_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sin^2 u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sin^2 u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos u \sin u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cot u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^u_{vv} \\ \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sin^2 u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin u \cos u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.3 Equations de Codazzi et équations de Gauss

La matrice de l'opérateur de forme S_p dans la base $\{f_u, f_v\}$ est donnée par:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} lG - mF & mG - qF \\ mE - lF & qE - mF \end{pmatrix}$$

Notons que les coefficients a, b, c, d sont les composantes des dérivées N_u et N_v dans la base $\{f_u, f_v\}$:

$$N_u = D_{f_u} N = -S_p(f_u) = -(af_u + bf_v), \ N_v = D_{f_v} N = -S_p(f_v) = -(cf_u + df_v)$$

Dérivons maintenant les équations suivantes

$$f_{uu} = \Gamma^u_{uu} f_u + \Gamma^v_{uu} f_v + lN_p$$

$$f_{uv} = \Gamma^u_{uv} f_u + \Gamma^v_{uv} f_v + mN_p$$
$$f_{vv} = \Gamma^u_{vv} f_u + \Gamma^v_{vv} f_v + pN_p$$

On obtient

$$f_{uuv} = (\Gamma^u_{uu})_v f_u + \Gamma^u_{uu} f_{uv} + (\Gamma^v_{uu})_v f_v + \Gamma^v_{uu} f_{vv} + l_v N + l N_v$$
$$= (\Gamma^u_{uu})_v f_u + \Gamma^u_{uu}(\Gamma^u_{uv} f_u + \Gamma^v_{uv} f_v + mN) + (\Gamma^v_{uu})_v f_v$$
$$+\Gamma^v_{uu}(\Gamma^u_{vv} f_u + \Gamma^v_{vv} f_v + qN) + l_v N - l(cf_u + df_v)$$
$$= ((\Gamma^u_{uu})_v + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^u_{vv} - cl) f_u + (\Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + (\Gamma^v_{uu})_v + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - dl) f_v$$
$$+(l_v + m\Gamma^u_{uu} + q\Gamma^v_{uu})N$$

De même

$$f_{uvu} = (\Gamma^u_{uv})_u f_u + \Gamma^u_{uv} f_{uu} + (\Gamma^v_{uv})_u f_v + \Gamma^v_{uv} f_{vv} + m_u N + l N_u$$
$$= ((\Gamma^u_{uv})_u + \Gamma^u_{uv}\Gamma^u_{uu} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{vu} - am) f_u + (\Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} + (\Gamma^v_{uv})_u + \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{uv} - bm) f_v$$
$$+(m_u + m\Gamma^v_{uv} + l\Gamma^u_{uv})N$$

Et comme $f_{uuv} = f_{uvu}$ et en comparant ces deux dernières équations, on obtient:

$$(f_u) : (\Gamma^u_{uu})_v + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^u_{vv} - cl = (\Gamma^u_{uv})_u + \Gamma^u_{uv}\Gamma^u_{uu} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{vu} - am$$
$$(f_v) : \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + (\Gamma^v_{uu})_v + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - dl = \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} + (\Gamma^v_{uv})_u + \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{uv} - bm$$
$$(N) : l_v + m\Gamma^u_{uu} + q\Gamma^v_{uu} = m_u + m\Gamma^v_{uv} + l\Gamma^u_{uv}$$

De même: $f_{uvv} = f_{vvu}$, on trouve

$$(f_u) : (\Gamma^u_{uv})_v + \Gamma^u_{uv}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{vv} - cm = (\Gamma^u_{vv})_u + \Gamma^u_{vv}\Gamma^u_{uu} + \Gamma^v_{vv}\Gamma^u_{vu} - aq$$
$$(f_v) : \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{uv} + (\Gamma^v_{uv})_v - md = (\Gamma^v_{vv})_u + \Gamma^u_{vv}\Gamma^v_{uu} - bq$$
$$(N) : q_u + l\Gamma^u_{vv} + m\Gamma^v_{vv} = m_v + m\Gamma^u_{uv} + q\Gamma^v_{uv}$$

Les deux équations obtenues pour la composante normale, nous donne les équations de Codazzi:

$$l_v - m_u = l\Gamma^u_{uv} + m(\Gamma^v_{uv} - \Gamma^u_{uu}) - q\Gamma^v_{uu}$$
$$m_v - q_u = l\Gamma^u_{vv} + m(\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}) - q\Gamma^v_{uv}$$

En utilisant le fait que $K = \dfrac{lq - m^2}{EG - F^2}$, on aura les équations de Gauss:

$$(f_v) : ld - mb = \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + (\Gamma^v_{uu})_v + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} - (\Gamma^v_{uv})_u + (\Gamma^v_{uv})^2$$

Or

$$ld - mb = \frac{1}{EG - F^2}(l(qE - mF) - m(mE - lF)) = \frac{1}{EG - F^2}E(lq - m^2) = EK$$

Donc

$$EK = \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + (\Gamma^v_{uu})_v + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} - (\Gamma^v_{uv})_u + (\Gamma^v_{uv})^2$$

De la même manière on obtient le reste des équations

$$FK = (\Gamma^v_{uv})_v - (\Gamma^v_{vv})_u + \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uv} - \Gamma^v_{uu}\Gamma^u_{vv}$$

$$GK = (\Gamma^u_{vv})_u - (\Gamma^u_{uv})_v + \Gamma^v_{vv}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^u_{vv}\Gamma^v_{uu} - \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{vv} - (\Gamma^u_{uv})^2$$