

Définition 1: Un polyèdre K de \mathbb{R}^n est une intersection finie bornée et non vide de demi-espaces fermés de \mathbb{R}^n . Une partie K' de la frontière ∂K de K est appelée face n et seulement si il existe un hyperplan H de \mathbb{R}^n et un seul tel que $K' = \partial K \cap H$.

exple $n=2$: Ds \mathbb{R}^2 les hyperplans sont les droites

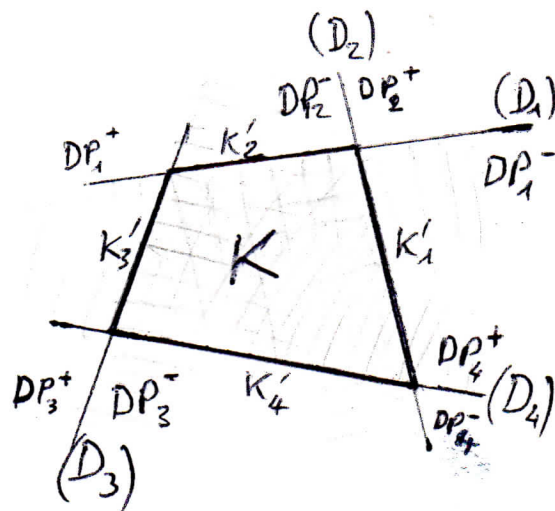
DP_1^- est le demi-plan inférieur contenant K

DP_2^- est le demi-plan gauche contenant K

DP_3^- est le demi-plan droit contenant K

DP_4^+ est le demi-plan supérieur contenant K

(la droite (D_1) sépare \mathbb{R}^2 en 2 demi-plans DP_1^- et DP_1^+ , de même la droite (D_2) partage \mathbb{R}^2 en 2 demi-plans DP_2^- et DP_2^+ , (D_3) divise \mathbb{R}^2 en DP_3^- et DP_3^+ et enfin (D_4) divise l'espace \mathbb{R}^2 en 2 demi-espaces DP_4^- et DP_4^+).



On en déduit alors que : $K = DP_1^- \cap DP_2^- \cap DP_3^- \cap DP_4^+$

$$K_1' = \partial K \cap (D_2), K_2' = \partial K \cap (D_1), K_3' = \partial K \cap (D_3), K_4' = \partial K \cap (D_4)$$

$$\text{Enfin } \partial K = K_1' \cup K_2' \cup K_3' \cup K_4' \quad (K_i' \ i=1,4 \text{ faces de } K)$$

Remarque: D'après la définition du polyèdre K de \mathbb{R}^n , K est une partie convexe fermée de \mathbb{R}^n (c'est aussi un compact convexe de \mathbb{R}^n) car c'est une intersection de demi-espaces fermés qui sont, par construction, convexes

Rappels utiles: H hyperplan de $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $H = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, a \rangle = \alpha\}$
 où $\langle x, a \rangle = \langle x, a \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ avec $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ et $a = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$

Donc H divise \mathbb{R}^n en 2 demi-espaces fermés D_{esp}^- et D_{esp}^+ avec :

$$D_{esp}^- = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, a \rangle \leq \alpha\} \text{ et } D_{esp}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, a \rangle \geq \alpha\}. \text{ On a } D_{esp}^- \supset H \subset D_{esp}^+$$

$$(\text{int}(D_{esp}^-) = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, a \rangle < \alpha\} \text{ et } \text{int}(D_{esp}^+) = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, a \rangle > \alpha\} \text{ ce qui permet d'écrire } D_{esp}^- \cap D_{esp}^+ = H \text{ et } \text{int}(D_{esp}^-) \cap \text{int}(D_{esp}^+) = \emptyset).$$

Dans la définition de l'hyperplan H , il faut remarquer que si $\alpha = 0$ alors H est en fait, un s.e.v. de \mathbb{R}^n . (Ds ce cas $a_n = (0, \dots, 0)^T \in H$ et $\forall x, y \in H \ x - y \in H$)

Exo: Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, H, D_{esp}^- et D_{esp}^+ sont convexes.

Rappel $C \subset \mathbb{R}^n$ est convexe de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall x, y \in C \ \forall \lambda \in [0, 1] \ \lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.

Définition 2: Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est dit polyédrique si $\bar{\Omega}$ est une réunion finie et connexe de polyèdres de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), Ω étant borné.

Remarque: Si $n=1$, les ouverts bornés polyédriques sont les intervalles ouverts connexes.

Soit donc Ω un ouvert borné polyédrique de \mathbb{R}^n de frontière $\Gamma \in C^1$ par morceaux et soit u la solution unique de V (\mathbb{R} -esp. de Hilbert) du P.V.G.: $\forall v \in V$ $a(u, v) = L(v)$ où $a(\cdot, \cdot)$ forme bilinéaire continue sur $V \times V$ et V -elliptique et aussi L lin. cont. sur V .

On considère alors une décomposition finie du domaine $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ où (i) Chaque élément K de \mathcal{T}_h est un polyèdre de \mathbb{R}^n .

(ii) $K_\ell, K_m \in \mathcal{T}_h$ $K_\ell \neq K_m$ (qd $\ell \neq m$) $\Rightarrow K_\ell \cap K_m = \text{int}(K_\ell) \cap \text{int}(K_m) = \emptyset$.

(iii) toute face K' d'un polyèdre $K_1 \in \mathcal{T}_h$ est soit une face pour un autre polyèdre $K_2 \in \mathcal{T}_h$ (ds ce cas K' est dite une interface) soit une partie de la frontière $\Gamma = \partial\Omega$.

Définition 3: Toute décomposition \mathcal{T}_h de $\bar{\Omega}$ vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) est appelée triangulation de $\bar{\Omega}$.

Par convention d'écriture, \mathcal{T}_h désignera une triangulation de $\bar{\Omega}$ telle que $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ où h_K est le diamètre du polyèdre K ($h_K = \sup_{x, y \in K} \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$)

On suppose ensuite qu'à chaque polyèdre K de \mathcal{T}_h est associé un élément fini de Lagrange (K, P_K, Σ_K) tel que $P_K \subset H^1(K)$ s.e.v.

On définit aussi les espaces de dimensions finies suivants:

$$(*1) \quad V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}); \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in P_K\}$$

$$(*2) \quad V_{0,h} = \{v \in C(\bar{\Omega}); \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in P_K \text{ et } v|_\Gamma = 0\} = \{v \in V_h / v|_\Gamma = 0\}$$

V_h est donc l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ telles que leur restriction $(v|_K)$ à chaque polyèdre K de la triangulation \mathcal{T}_h se trouve dans P_K ($v|_K$ est une fctn de P_K s.e.v. de $H^1(K)$). On en déduit

alors que toute fctn de V_h est une fctn de $H^1(\Omega)$ en vertu du thm 4 du chapitre 1: $v \in C(\bar{\Omega})$ où $\bar{\Omega} = \bigcup_{r=1}^R \bar{\Omega}_r$ ($\Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset$ si $r \neq s$) et $\forall r=1, \dots, R$ $v|_{\Omega_r} \in H^1(\Omega_r) \Rightarrow v \in H^1(\Omega)$.

Conclusion: $V_h \subset H^1(\Omega)$ et $V_{0,h} \subset H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\Gamma=\partial\Omega} = 0\}$

Deux cas se présentent pour poser le problème d'approximation variationnelle général: $V = H^1(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$.

Si $V = H^1(\Omega)$ on cherche $u_h \in V_h$ solution du P.A.V.G.:

$$(P_h): \forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0 \quad u \text{ étant la}$$

Si $V = H_0^1(\Omega)$, on cherche $u_h \in V_{0,h}$ solution du P.A.V.G.:

$$(P_{0,h}): \forall v_h \in V_{0,h} \quad a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \text{avec} \quad u_h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{H_0^1(\Omega)} u, u \text{ étant la solution théorique du P.V.G.: } \forall v \in V = H_0^1(\Omega) \quad a(u, v) = L(v).$$

Pour la détermination d'une base de V_h ou de $V_{0,h}$, il convient de rajouter des hypothèses supplémentaires sur les éléments finis de Lagrange (K, P_K, Σ_K) , $K \in \mathcal{T}_h$.

Définition 4: Soit K un polyèdre de \mathbb{R}^n , un élément fini de Lagrange (K, P_K, Σ_K) est dit de classe \mathcal{E}^0 si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(i) $P_K \subseteq \mathcal{E}(K)$

(ii) Pour toute face K' de K , l'ensemble $\Sigma' = \Sigma_K \cap K'$ est P'_K -unisolvant où $P'_K = \{p|_{K'}; p \in P_K\}$: L'espace des traces sur K' des fonctions de P_K . (Rem. (ii) $\Rightarrow (K', P'_K, \Sigma_K)$ élém. fini de Lagrange)

On note parfois $P'_K = P_K|_{K'}$. On vérifie que tout élément fini affine-équivalent à un élément fini de classe \mathcal{E}^0 est aussi de classe \mathcal{E}^0 .

De plus, on fait les hypothèses de compatibilité entre deux éléments finis $(K_1, P_{K_1}, \Sigma_{K_1})$ et $(K_2, P_{K_2}, \Sigma_{K_2})$: Pour toute paire $\{K_1, K_2\}$ de polyèdres de \mathcal{T}_h adjacents de face commune $K' = K_1 \cap K_2$, on a:

$$P'_{K_1} = P_{K_1}|_{K'} = P_{K_2}|_{K'} = P'_{K_2} \quad \text{et} \quad \Sigma'_{K_1} = \Sigma_{K_1} \cap K' = \Sigma_{K_2} \cap K' = \Sigma'_{K_2}$$

(On rappelle que $P'_{K_1} = P_{K_1}|_{K'}$ est l'espace des traces sur K' des fonctions de P_{K_1} . De même pour $P'_{K_2} = P_{K_2}|_{K'}$ esp. des traces sur K' des fonctions de P_{K_2}).

Enfin, pour évaluer la quantité $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$ qui intervient dans la majoration de l'erreur $\|u - u_h\|_V$ (où $V = H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$), on introduit.../...

l'opérateur $\Pi_{\mathcal{T}_h}$ qui à toute fonction $v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ fait correspondre la fonction $\Pi_{\mathcal{T}_h} v$ de $L^2(\Omega)$ définie par :

$\forall K \in \mathcal{T}_h, \forall x \in \text{Int}(K), \Pi_{\mathcal{T}_h} v(x) = \Pi_K v(x)$ où Π_K est l'opérateur de P_K -interpolation sur Σ_K ($\Pi_K v \in P_K \forall K \in \mathcal{T}_h$)

Rem. $\Pi_{\mathcal{T}_h} v \in L^2(\Omega)$ car $\forall K \in \mathcal{T}_h, P_K \subset H^1(K) \subset L^2(K)$ et $\int (\Pi_{\mathcal{T}_h} v)^2 dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\Pi_K v)^2 dx$

Or $\Pi_K v \in L^2(K) \forall K \in \mathcal{T}_h \Rightarrow \int_K (\Pi_K v)^2 dx < +\infty \forall K \in \mathcal{T}_h \Rightarrow \int_{\Omega} (\Pi_{\mathcal{T}_h} v)^2 dx < +\infty \Rightarrow \Pi_{\mathcal{T}_h} v \in L^2(\Omega)$

Théorème 1 : Soit \mathcal{T}_h une triangulation de $\bar{\Omega}$ et soit $(K, P_K, \Sigma_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ une famille d'éléments finis associée. On suppose les conditions de compatibilité vérifiées (voir hypothèses de compatibilité ci-dessus). On suppose aussi que $\forall K \in \mathcal{T}_h, (K, P_K, \Sigma_K)$ est un élément fini de classe \mathcal{C}^0 et $P_K \subset H^1(K)$ s.e.v. Alors l'opérateur d'interpolation $\Pi_{\mathcal{T}_h}$ défini ci-dessus de $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ dans $L^2(\Omega)$ est à valeurs dans $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$; de façon plus précise, on peut écrire :

$$V_h = \{ \Pi_{\mathcal{T}_h} v; v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \} = \Pi_{\mathcal{T}_h}(\mathcal{C}(\bar{\Omega}))$$

$$\text{et } V_{0,h} = \{ \Pi_{\mathcal{T}_h} v; v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), v|_{\Gamma} = 0 \}$$

où V_h et $V_{0,h}$ sont les sous-espaces de $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ introduits en (x1) et (x2).

Démonstration : On commence par montrer l'inclusion $\{ \Pi_{\mathcal{T}_h} v; v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \} \subset V_h$. Soit v une fonction continue sur $\bar{\Omega}$; la restriction à un élément (polyèdre) quelconque K de \mathcal{T}_h de la fonction $\Pi_{\mathcal{T}_h} v$ appartient à $P_K \subset \mathcal{C}(K)$ s.e.v.

Pour montrer que $\Pi_{\mathcal{T}_h} v \in V_h$ (c.à.d. m.q. $\Pi_{\mathcal{T}_h} v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$), il suffit de vérifier que $\Pi_{\mathcal{T}_h} v$ est continue sur toute face K' commune à deux

éléments (polyèdres) adjacents K_ℓ et K_m de \mathcal{T}_h . Autrement dit, il faut montrer que : $(\Pi_{K_\ell} v)|_{K'} = (\Pi_{K_m} v)|_{K'}$. On rappelle que, par cons-

-truction même de $\Pi_{\mathcal{T}_h}$, $\Pi_{\mathcal{T}_h} v$ est continue sur chaque polyèdre K de \mathcal{T}_h puisque $\forall K \in \mathcal{T}_h, \Pi_{\mathcal{T}_h} v|_{\text{Int}(K)} = \Pi_K v$ et $\forall K \in \mathcal{T}_h, \Pi_K v \in P_K \subset \mathcal{C}(K)$ s.e.v.

$$\text{On pose alors } w = (\Pi_{K_\ell} v)|_{K'} - (\Pi_{K_m} v)|_{K'} = w_1 - w_2$$

où $w_1 = (\Pi_{K_\ell} v)|_{K'}$ est la trace de $\Pi_{K_\ell} v$ sur K' avec $\Pi_{K_\ell} v \in P_{K_\ell} \Rightarrow w_1 \in P_{K_\ell}|_{K'}$

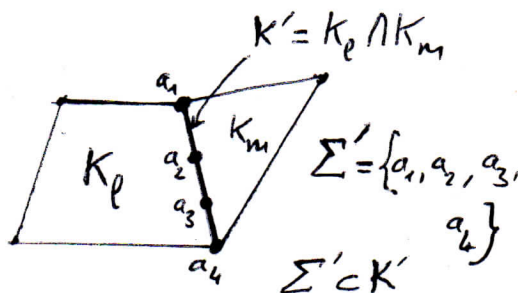
et $w_2 = (\Pi_{K_m} v)|_{K'}$ est la trace de $\Pi_{K_m} v$ sur K' avec $\Pi_{K_m} v \in P_{K_m} \Rightarrow w_2 \in P_{K_m}|_{K'}$

Les conditions de compatibilité étant vérifiées (hypothèses du thm), on peut écrire alors $P_{K_e}|_{K'} = P_{K_m}|_{K'} =: P'$ et $\Sigma_{K_e} \cap K' = \Sigma_{K_m} \cap K' =: \Sigma'$.

Ainsi la fonction $w = w_1 - w_2$ est une fctn de l'espace P' (espace des traces des fctns de P_{K_e} et des fctns de P_{K_m} sur la face commune K') telle que $\forall a \in \Sigma', w(a) = w_1(a) - w_2(a) = 0$ puisque $w_1(a) = w_2(a) \forall a \in \Sigma'$.
 $(\Pi_{K_e} v)|_{K'} = w_1$ est le $P_{K_e}|_{K'}$ -interpolé de $v|_{K'}$ sur Σ' c.à.d. $w_1(a) = v|_{K'}(a) \forall a \in \Sigma'$.
 De même, $(\Pi_{K_m} v)|_{K'} = w_2$ est, par déf., le $P_{K_m}|_{K'}$ -interpolé (noté aussi le $P'|_{K'}$ -interpolé) de $v|_{K'}$ sur Σ' c.à.d. $w_2(a) = v|_{K'}(a) = w_1(a) \forall a \in \Sigma'$.

Or $\forall K \in \mathcal{T}_h, (K, P_K, \Sigma_K)$ est un élément fini de classe $\mathcal{C}^0 \Rightarrow \Sigma'$ est P' -unisolvant d'où la nullité de $w: w \equiv 0 (\forall x \in K' w(x) = 0)$, puis-que $\forall a \in \Sigma', w(a) = 0$ et il n'y a que la fctn nulle (unique) qui s'annule sur Σ' (voir déf. de la P' -unisolvance de Σ' au début du Chap. II).

exple: Ds $\mathbb{R}^2 (n=2)$



$w \equiv 0 = w_1 - w_2 \Rightarrow w_1 = w_2$ c.à.d. $(\Pi_{K_e} v)|_{K'} = (\Pi_{K_m} v)|_{K'}$.

Par conséquent, $\Pi_h v$ est continue sur $\bar{\Omega}$.

Donc, on a bien $\{\Pi_h v; v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})\} \subset V_h$.

Inversement, si $v \in V_h$ alors $v|_K \in P_K \forall K \in \mathcal{T}_h$.

(voir construction de V_h en (*1) page -2-), ce qui entraîne que $v|_K = \Pi_K v \forall K \in \mathcal{T}_h$ en vertu de l'unicité du P_K -interpolé d'une fctn sur Σ_K et ici cette fonction est $v|_K \in P_K$ ($\Pi_K v$ est le P_K -interpolé unique de $v|_K$ sur Σ_K).

Donc $v = \Pi_h v$ (voir déf. de l'opérateur Π_h : début de page -4-) et comme $v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

(voir déf. de V_h en (*1) page -2-), on en déduit alors que $V_h \subset \{\Pi_h v; v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})\}$.

Enfin, on applique le même principe de démonstration pour montrer que $V_{0,h} = \{\Pi_h v; v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), v|_{\Gamma} = 0\}$ ■

On introduit, à présent, l'ensemble des nœuds des éléments finis :

$$\Sigma_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \Sigma_K$$

Déf. Un nœud est un pt de $\Sigma_h \subset \bar{\Omega}$ où la solution u_h du P.A.V.G. (P_h) $a(u_h, v_h) = L(v_h) \forall v_h \in V_h$, n'est pas connue.

Si on numérote les nœuds de manière à classer en derniers les pts de Σ_h qui

se trouvent sur la frontière Γ , on obtiendra alors :

$\Sigma_R = \{a_i\}_{i=1}^N$ avec $\text{Card}(\Sigma_R) = N$ et $\Sigma_{0,R} = \Sigma_R \cap \Omega = \{a_i\}_{i=1}^{N_0}$
avec $\text{Card}(\Sigma_{0,R}) = N_0 < N$.

$\forall i=1, \dots, N$, on note par φ_i la fctn de $V_R / \varphi_i(a_j) = \delta_{i,j} \quad 1 \leq j \leq N$.

Si v est une fonction continue sur $\bar{\Omega}$, il est évident que :

$$\Pi_R v = \sum_{i=1}^N v(a_i) \varphi_i \quad \text{puisque } \forall K \in \mathcal{T}_R \quad \Pi_K v|_K = \Pi_K v = \sum_{\substack{I_k \\ I_k \cap K \neq \emptyset}} v(a_i) \varphi_i|_K$$

où $I_k = \text{Card}(\Sigma_K)$.

Par ailleurs $\varphi_i|_K \equiv 0$ si $a_i \notin \Sigma_K$ ($a_i \in \Sigma_R$)

Corollaire 1: Sous les hypothèses du théorème 1, l'ensemble des fonctions

$\varphi_i \in V_R$ ($1 \leq i \leq N$), définies par $\varphi_i(a_j) = \delta_{i,j} \quad \forall j=1, \dots, N$, constitue une

base de V_R et toute fonction v de V_R s'écrit $v = \sum_{i=1}^N v(a_i) \varphi_i$ (conséquence du thm 1: $V_R = \{\Pi_R v; v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})\} \Rightarrow \forall v \in V_R \quad v = \Pi_R v = \sum_{\substack{i=1 \\ 1 \leq i \leq N}} v(a_i) \varphi_i$).

De même, l'ensemble des fonctions $\varphi_i \in V_{0,R}$ ($1 \leq i \leq N_0$) t.q. $\varphi_i(a_j) = \delta_{i,j} \quad \forall j=1, \dots, N_0$, constitue une base de l'espace $V_{0,R}$ et toute fonction v de $V_{0,R}$ s'écrit comme suit: $v = \sum_{i=1}^{N_0} v(a_i) \varphi_i$ ($v \in V_{0,R} \Rightarrow v = \Pi_R v$ et $v|_\Gamma \equiv 0$ (voir thm 1))

Définition 5: Les scalaires $v(a_i)$ ($1 \leq i \leq N$) (respectivement $1 \leq i \leq N_0$) sont appelés degrés de liberté de la fctn v de V_R (respectivement de $V_{0,R}$).

Enfin, on présente quelques résultats sur la convergence de la méthode des éléments finis simpliciaux (élément fini n -simplexe de type (k)). On admettra alors les théorèmes introduits dans ce paragraphe.

Théorème 2: Soit \mathcal{T}_R une triangulation de $\bar{\Omega}$ construite à l'aide de n -simplexes. Etant donné un entier $k \geq 1$, on associe à tout K de \mathcal{T}_R , le n -simplexe de type (k) construit sur K . Alors les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées. $[(K, P_K, \Sigma_K)$ où $K \in \mathcal{T}_R$ est, dans ce cas, une famille d'éléments finis n -simplexes de type (k) c.à.d. $(K, P_K, \Sigma_K) = (K, P_k, \Sigma_k) \quad k \in \mathbb{N}^*$].

Définition 6: On dit que \mathcal{T}_R est une famille régulière de triangulations de $\bar{\Omega}$ si les quatre conditions suivantes sont satisfaites

.../...

(i) Tous les éléments finis (K, P_K, Σ_K) de toutes les triangulations sont affine-équivalents à un même élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ de classe \mathcal{C}^0 .

(ii) Pour tout couple (\hat{K}_1, \hat{K}_2) de faces de \hat{K} et pour toute application G affine inversible de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n telle que $\hat{K}_2 = G(\hat{K}_1)$, on a $\hat{\Sigma} \cap \hat{K}_2 = G(\hat{\Sigma} \cap \hat{K}_1)$

et $\{\hat{P}|_{\hat{K}_2}; \hat{P} \in \hat{P}\} = \{p \circ G|_{\hat{K}_1}; p \in \hat{P}\}$ $\hat{K}_1 \xrightarrow{G} \hat{K}_2 \xrightarrow{P} \mathbb{R}$

(iii) $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \rightarrow 0$ Si $\hat{P} \in \hat{P} \exists p \in \hat{P} / \hat{P}|_{\hat{K}_2} = p \circ G|_{\hat{K}_1}$
les faces de \hat{K} sont en correspondance bijective. $p \circ G|_{\hat{K}_1} = \hat{P}|_{\hat{K}_2}$

(iv) $\exists \sigma \gg 1$ telle que $\forall h, \forall K \in \mathcal{T}_h, \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$ où ρ_K est la rondeur de K i.e. le diamètre maximum des sphères contenues dans K .

Théorème 3: Soit Ω ouvert polyédrique de $\mathbb{R}^n, n \leq 3$.

Soit (\mathcal{T}_h) une famille régulière de triangulations de $\bar{\Omega}$ associé à 1 élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ de classe \mathcal{C}^0 . Supposons par ailleurs que $P_K \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{K})$ où k est 1 entier t.q $k \gg 1$. Alors la méthode d'éléments finis est convergente c.à.d. la solution u_h du P.A.V.G. converge vers la solution u du P.V.G. dans $H^1(\Omega)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Corollaire 2: Soit (\mathcal{T}_h) une famille régulière de triangulations de $\bar{\Omega}$ associée à 1 n -simplexe de type (k) . Supposons $n \leq 3$ et $k \gg 1$ alors la m.é.f. converge.