Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2019-2020
Module : Contrôle optimal

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

T. D. Contrôle optimal non linéaire : Cas d'Etat final fixé.

Exercice 1 Résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t),\ t \in [0,T], \\ x(0) = 0,\ x(T) = B, \\ \min\limits_{u \in \mathbb{R}^+} \int\limits_0^T \left(u^2(t) + c.x(t)\right) dt, \end{cases}$$

où T, B et c sont des constantes strictement positives avec $B < \dfrac{c.T^2}{4}$.

Exercice 2 Résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - u(t),\ t \in [0,1], \\ x(0) = 1,\ x(1) = 0, \\ \min\limits_{u \in [1,2]} \int\limits_0^1 u(t)\, dt. \end{cases}$$

Exercice 3 Résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t),\ t \in [0,2], \\ x(0) = 0,\ x(2) = 1, \\ \min\limits_{u \in [-1,1]} \int\limits_0^2 x^2(t)\, dt. \end{cases}$$

Exercice 4 Résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = u(t),\ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0,\ x(T) = 0, \\ x'(0) = 0,\ x'(T) = 0, \\ \min\limits_{u \in [-1,1]} \int\limits_0^T dt, \end{cases}$$

avec $x_0 \in (0,1)$ et T n'est pas fixé.

Exercice 5 : Transfert optimal de fichiers informatiques

Un fichier de x_0 Mo doit être transféré par le réseau. A chaque temps t on peut choisir le taux de transmission $u(t) \in [0,1]$ Mo/s, mais il en coûte $u(t)f(t)$, où $f(.)$ est une fonction connue. De plus au temps final on a un coût supplémentaire γT^2, où $\gamma > 0$. Le système est donc

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -u(t),\ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0,\ x(T) = 0, \end{cases}$$

et on veut minimiser le coût

$$C(T,u)=\int_0^T u(t)f(t)dt+\gamma T^2.$$

Quelle est la politique optimale ?

Exercice 6 : Contrôle optimal du niveau d'un réservoir

On veut ajouter de l'eau dans un réservoir, de façon à atteindre le niveau d'eau h_1, en tenant compte du fait qu'il faut compenser une perte d'eau linéaire en temps. La modélisation est

$$\begin{cases} \dot{h}(t)=u(t)-t,\, t\in[0,T], \\ h(0)=0, \end{cases}$$

où $u(t)$ est le contrôle. Quelle est la loi optimale permettant d'atteindre l'objectif en minimisant $\int_0^T u^2(t)dt$, le temps final T n'étant pas fixé ?

Exercice 7 : Un voyage en fusée

On considère un véhicule spatial qui doit aller d'un point P1 à un point P2. On suppose qu'il suit une trajectoire rectiligne, et on note $x(t)$ l'abscisse le long de cette trajectoire, où t est le temps. On note $v(t)$ sa vitesse, et m sa masse qu'on suppose constante (dans un premier temps). La trajectoire est contrôlée par une poussée notée $u(t)$, qui sera le contrôle. Le système différentiel s'écrit donc

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} \dot{x}(t)=v(t),\ t\in[0,T], \\ m\dot{v}(t)=u(t),\, t\in[0,T], \\ x(0)=v(0)=0, \end{cases}$$

On souhaite arriver au point P2 au temps T, avec vitesse nulle : $x(T)=L, v(T)=0$, où $L>0$ est la distance P1P2.

1) Déterminer les valeurs de $\int_0^T u(t)\,dt$ et $\int_0^T tu(t)\,dt$.

2) **Coût quadratique**. On suppose que la fonctionnelle de coût est donnée par $J(u)=\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt$.

Ecrire l'équation adjointe et la résoudre. En déduire la valeur du contrôle optimal et celle du coût correspondant.

3) **Coût homogène**. On suppose que la fonctionnelle de coût est donnée par $J(u)=\int_0^T |u(t)|\,dt$; et que la poussée ne peut pas être plus grande qu'une valeur maximale $u_{\max}>0$ fixée : pour tout $t\in[0,T]$; $u(t)\in U:=[-u_{\max},u_{\max}]$. On suppose dans cette partie que $T>2\sqrt{\frac{mL}{u_{\max}}}$.

4) En appliquant le principe du maximum de Pontryaguine, démontrer que le contrôle optimal u ne peut prendre que trois valeurs (que l'on déterminera).

5) Déterminer le nombre de temps de commutation du contrôle optimal.

6) Calculer le contrôle optimal.

7) Que se passe-t-il si $T<2\sqrt{\frac{mL}{u_{\max}}}$?

Prise en compte de la perte de masse. On suppose toujours que la fonctionnelle de coût est donnée par $J(u) = \int_0^T |u(t)|\,dt$ et que le contrôle vérifie $u(t) \in U := [-u_{\max}, u_{\max}]$. On souhaite prendre en compte le fait que l'utilisation du carburant fait varier la masse de la fusée. Cette masse devient donc une inconnue du système, qui s'écrit maintenant

$$
(2) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t)\,,\ t \in [0,T]\,, \\ m(t)\dot{v}(t) = u(t)\,, t \in [0,T]\,, \\ \dot{m}(t) = -k|u(t)|, t \in [0,T]\,, \\ x(0) = v(0) = 0, \\ m(0) = M. \end{cases}
$$

La constante $k > 0$ est fixée, et on suppose que $2\sqrt{\dfrac{mL}{u_{\max}}} < T < \dfrac{M}{ku_{\max}}$.

8) Démontrer que $m(t) > 0$ pour tout $t \in [0;T]$.

9) Ecrire le hamiltonien du système et le système adjoint. On notera $\lambda = (\lambda_x, \lambda_v, \lambda_m)$ l'état adjoint.

10) Démontrer que, pour tout $t \in [0;T]$, $\lambda_x(t) \neq 0$.

11) Démontrer que l'application $t \mapsto \frac{\lambda_v(t)}{m(t)} + 1 - k\lambda_m(t)$ est strictement monotone sur tout intervalle où $u(t) \geq 0$. Même question pour $t \mapsto \frac{\lambda_v(t)}{m(t)} - 1 + k\lambda_m(t)$ sur un intervalle où $u(t) \leq 0$.

12) Appliquer le principe du maximum de Pontryaguine et en déduire que seules 3 valeurs (que l'on déterminera) sont possibles pour le contrôle optimal u^*.

13) Démontrer que le contrôle optimal change de signe au plus une fois.

14) Déduire des questions précédentes qu'on peut toujours se ramener à un contrôle optimal qui a au plus deux temps de commutation.

15) Déterminer la forme du contrôle optimal (on ne demande pas de calculer les temps de commutation).

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques.

A. U. : 2019-2020
Module : Contrôle optimal.

Niveau : Première Année Master Biomathématiques et Modélisation.

T.D. Contrôle optimal non linéaire : Cas D'Etat final fixé. (Corrigé).

<u>Exercice 1</u> : Il s'agit de résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$(P1) \begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \ t \in [0,T], \\ x(0) = 0, \ x(T) = B, \\ \min\limits_{u \in \mathbb{R}^+} \int_0^T (u^2(t) + c.x(t))\,dt, \end{cases}$$

où T, B et c sont des constantes strictement positives avec $B < \frac{c.T^2}{4}$.

$\boxed{3.2.1°}$

On définit le Hamiltonien H par:

$$H(t,x,\lambda,\lambda_0,u) = \lambda . u + \lambda_0 (u^2 + C.x).$$

D'après le principe du maximum de Pontryaguine

Théorème 3.4 si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors il existe une application $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}$ et un réel $\lambda_0 \in \{0,1\}$ tels que

i) $(\lambda,\lambda_0) \neq (0,0)$,

ii) $$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = u^*(t), \; t \in [0,T], \\ x^*(0) = 0, \; x^*(T) = B, \\ \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_0 . C, \; t \in [0,T] \end{cases}$$

iii) $$H(t,x^*,\lambda,\lambda_0,u^*) = \min_{v \in \mathbb{R}^+} H(t,x^*,\lambda,\lambda_0,v)$$

c'est-à-dire,

$$\lambda . u^* + \lambda_0 ((u^*)^2 + C x^*) = \min_{v \in \mathbb{R}^+} \{\lambda . v + \lambda_0 (v^2 + C x^*)\}.$$

$$\boxed{3.2.2^\circ}$$

C'est-à-dire,

$$\lambda . u^* + \lambda_0 (u^*)^2 = \min_{v \in \mathbb{R}^+} \left\{ \lambda . v + \lambda_0 v^2 \right\}. \qquad (A)$$

D'après cette dernière égalité si $\lambda_0 = 0$, on obtient

$$\lambda u^* = \min_{v \in \mathbb{R}^+} \lambda . v,$$

ce qui donne,

$$u^*(t) = 0 \quad \text{à condition que } \lambda(t) > 0.$$

Mais si $u^*(t) = 0$, alors d'après ii), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = 0, & t \in [0, T], \\ x^*(0) = 0, & x^*(T) = B. \end{cases}$$

Or ce problème n'admet aucune solution x^*. Par suite $\lambda_0 = 1$ et toute extrémale est normale.

Maintenant d'après (A), on a

$\boxed{3.2.3°}$

$$\lambda . u^* + (u^*)^2 = \min_{v \in \mathbb{R}^+} \{\lambda . v + v^2\}.$$

On pose

$$h(v) = \lambda v + v^2.$$

Alors,

$$h'(v) = \lambda + 2v. \qquad A_1$$

Maintenant d'apré ii), on a :

$$\dot{\lambda}(t) = -C, \quad t \in [0, T],$$

Ce qui donne,

$$\lambda(t) = -Ct + \alpha, \quad t \in [0, T].$$

On distingue les cas suivants:

<u>1^er Cas</u> : $\lambda(t) > 0, \ \forall t \in [0, T]$.

Alors d'apré A_1, on obtient $h' > 0$

et par suite $u^*(t) = 0$, pour tout $t \in [0, T]$.

Mais d'apré i), on obtient une contradiction.

$\boxed{3.2.4°}$

$2^{\text{ème}}$ Cas : $\lambda(t)<0$, pour tout $t\in[0,T]$

Alors d'après (A1), on a :

v	0		$-\frac{\lambda(t)}{2}$		$+\infty$
$h'(v)$		$-$	0	$+$	
$h(v)$	0	$\searrow$	$h\left(-\frac{\lambda(t)}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Par suite,

$$u^*(t) = -\frac{\lambda(t)}{2} = \frac{c}{2}t - \frac{\alpha}{2}.$$

Maintenant d'après ii), on a :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = u^*(t), & t\in[0,T], \\ x^*(0)=0, \; x^*(T)=B. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \frac{c}{2}t - \frac{\alpha}{2}, & t\in[0,T], \\ x^*(0)=0, \; x^*(T)=B. \end{cases}$$

$$\boxed{3.2.5^\circ}$$

Ce qui donne,

$$X^*(t) = \frac{c}{4} t^2 - \frac{\alpha}{2} t + \gamma, \quad \text{avec } \gamma \in \mathbb{R}.$$

Maintenant

$$X^*(0) = 0 \quad \text{donne} \quad \gamma = 0,$$

et

$$X^*(T) = B,$$

donne,

$$\frac{c}{4} T^2 - \frac{\alpha}{2} T = B, \quad (*)$$

Comme par hypothèse,

$$\frac{c T^2}{4} > B,$$

on obtient une contradiction avec l'égalité $(*)$.

(Voir que $\lambda(0) = \alpha < 0$).

<u>3ème Cas</u> : $\lambda(t) > 0$, pour tout $t \in [0, t^*[$,

et $\lambda(t) < 0$, pour tout $t \in]t^*, T]$.

$\boxed{3.2.6°}$

Alors d'aprés (A_1), on a

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0, t^*[, \\ -\frac{\lambda(t)}{2} = \frac{c}{2}t - \frac{\alpha}{2}, \; t \in [t^*, T]. \end{cases}$$

Maintenant d'aprés ii), on a :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = u^*(t), \; t \in [0, T], \\ x^*(0) = 0, \; x^*(T) = B \end{cases}$$

Ce qui donne,

$$x^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0, t^*[, \\ \frac{c}{4}t^2 - \frac{\alpha}{2}t + \delta, \; t \in [t^*, T], \end{cases}$$

avec

$$\frac{c}{4}t^{*2} - \frac{\alpha}{2}t^* + \delta = 0,$$

et

$$\frac{c}{4}T^2 - \frac{\alpha}{2}T + \delta = B.$$

$\boxed{3.2.7°}$

Ce qui donne,

$$\frac{c}{4}\left((t^*)^2 - T^2\right) - \frac{\alpha}{2}(t^* - T) = -B,$$

C'est-à-dire,

$$\boxed{\alpha = \frac{c}{2}(t^* + T) + \frac{2B}{t^* - T}}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\alpha}{2}t^* - \frac{c}{4}(t^*)^2 \\ &= \frac{c}{4}t^*(t^* + T) + \frac{Bt^*}{t^* - T} - \frac{c}{4}(t^*)^2 \\ &= \left(\frac{c}{4}T + \frac{B}{t^* - T}\right)t^*\end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0, t^*[, \\ \frac{c}{2}t - \frac{c}{4}(t^* + T) - \frac{B}{t^* - T}, \ t \in [t^*, T], \end{cases}$$

$\boxed{3.2.8°}$

et

$$x^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0, t^*[, \\ \frac{C}{4}t^2 - \frac{C}{4}(t^* + T)t - \frac{Bt}{t^* - T} + \left(\frac{C}{4}T + \frac{B}{t^* - T}\right)t^* \text{ si } t \in [t^*, T] \end{cases}$$

<u>Exercice 2</u> : Il s'agit de résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - u(t), \quad t \in [0, 1], \\ x(0) = 1, \quad x(1) = 0, \\ \min\limits_{u \in [1,2]} \int_0^1 u(t)\, dt. \end{cases}$$

$\boxed{3.2.9°}$

On définit le Hamiltonien H par :

$$H(t, x, \lambda, \lambda_0, u) = \lambda . (x - u) + \lambda_0 u$$

D'après le principe du maximum de Pontryaguine

Théorème 3.4 si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors il existe une application $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ et un réel $\lambda_0 \in \{0,1\}$ tels que

i) $(\lambda, \lambda_0) \neq (0,0)$,

ii) $$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) - u^*(t), \ t \in [0,1], \\ x^*(0) = 1, \quad x^*(1) = 0, \\ \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\lambda(t), \ t \in [0,1], \end{cases}$$

iii) $$H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, u^*) = \min_{v \in [1,2]} H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, v).$$

c'est-à-dire,

$$\lambda(x^* - u^*) + \lambda_0 u^* = \min_{v \in [1,2]} \{\lambda(x^* - v) + \lambda_0 v\}.$$

$\boxed{3.2.10°}$

C'est-à-dire,

$$-\lambda u^* + \lambda_0 u^* = \min_{v \in [1,2]} \{-\lambda v + \lambda_0 v\}. \quad (B)$$

Montrons d'abord que toute extrémale est normale.

Supposons que $\lambda_0 = 0$, alors d'aprés (B), on a

$$-\lambda u^* = \min_{v \in [1,2]} -\lambda . v$$

Ce qui donne, $$u^*(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } \lambda(t) < 0, \\ 2 \text{ si } \lambda(t) > 0. \end{cases}$$

⊛ Si $\lambda(t) < 0$, alors $u^*(t) = +1$ et par suite d'aprés ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) - 1, \\ x^*(0) = 1, \ x^*(1) = 0. \end{cases}$$

Les solutions de l'équation differentielle $\dot{x}^*(t) = x^*(t) - 1$ sont

$$x^*(t) = k e^t + 1, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Déterminons k.

Comme $x^*(0)=1$, on a :

$$k+1=1,$$

ce qui donne $k=0$.

Par suite, $x^*(t)=1$

Mais ça contredit le fait que $x^*(1)=0$.

(**) Si $\lambda(t)>0$, alors $u^*(t)=2$ et par suite d'après ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t)=x^*(t)-2, & t\in[0,1], \\ x^*(0)=1;\ x^*(1)=0. \end{cases}$$

Les solutions de l'équation différentielle

$\dot{x}^*(t)=x^*(t)-2$ sont $x^*(t)=ke^t+2$, avec $k\in\mathbb{R}$.

La condition $x^*(0)=1$ entraîne que $k=-1$.

Par suite $x^*(t)=-e^t+2$

$\boxed{3.2.12°}$

Mais $x^*(1) = -e+2 \neq 0$.

Par suite toute extrémale est normale c'est-à-dire

$\lambda_0 = 1$.

Maintenant d'aprés (B), on a

$$-\lambda u^* + u^* = \min_{v \in [1,2]} \{-\lambda v + v\}.$$

C'est-à-dire,

$$(-\lambda+1)\, u^* = \min_{v \in [1,2]} \{(-\lambda+1) v\}.$$

Ce qui donne,

$$u^*(t) = \begin{cases} +1 \text{ si } -\lambda(t)+1 > 0, \\ 2 \text{ si } -\lambda(t)+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +1 \text{ si } \lambda(t) < 1 \\ 2 \text{ si } \lambda(t) > 1, \end{cases}$$

D'aprés ii), on a
$$\lambda(t) = \alpha e^{-t}, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

(voir que $\dot{\lambda}(t) = -\lambda(t)$, $t \in [0,1]$).

$\boxed{3.2.13°}$

Comme la fonction $t \longmapsto \alpha e^{-t}$ est strictement monotone si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on distingue les cas suivants:

<u>1</u>

1er Cas : $\alpha e^{-t} < 1$, pour tout $t \in [0,1]$

Pour ce cas $u^*(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$ ce qui conduit à une contradiction. (Voir la preuve de l'existence d'une extrémale normale).

2ème Cas : $\alpha e^{-t} > 1$, pour tout $t \in [0,1]$.

Pour ce cas $u^*(t) = 2$ pour tout $t \in [0,1]$ ce qui conduit aussi à une contradiction (Voir la preuve de l'existence d'une extrémale normale.

3ème Cas : $\alpha e^{-t} > 1$, pour tout $t \in [0, t^*[$,

et $\alpha e^{-t} < 1$, pour tout $t \in]t^*, 1]$,

avec $0 < t^* < 1$.

$\boxed{3.2.14°}$

Pour ce cas, on a

$$u^*(t) = \begin{cases} 2 \text{ si } t \in [0, t^*], \\ 1 \text{ si } t \in]t^*, 1] \end{cases}$$

Maintenant d'aprés ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) - u^*(t), \ t \in [0,1], \\ x^*(0) = 1, \ x^*(1) = 0. \end{cases}$$

Alors,
$$x^*(t) = \begin{cases} -e^t + 2, & t \in [0, t^*[, \\ -e^{t-1} + 1, & t \in [t^*, 1], \end{cases}$$

avec $-e^{t^*} + 2 = -e^{t^*-1} + 1$ car x^* est continue,

c'est-à-dire, $e^{t^*} - e^{t^*-1} = 1$,

c'est-à-dire, $(1 - e^{-1}) e^{t^*} = 1$,

ce qui donne, $\boxed{t^* = 1 - \ln(e-1)}$

$\boxed{3.2.15^o}$

En conclusion, on a

$$u^*(t) = \begin{cases} 2 \text{ si } t \in [0, 1-\ln(e-1)], \\ 1 \text{ si } t \in]1-\ln(e-1), 1], \end{cases}$$

et la trajectoire optimale x^* est

$$x^*(t) = \begin{cases} -e^t + 2, & t \in [0, 1-\ln(e-1)[, \\ -e^{t-1} + 1, & t \in [1-\ln(e-1), 1]. \end{cases}$$

Exercice 3 : Il s'agit de résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$(P3) \begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \ t \in [0,2], \\ x(0) = 0, \ x(2) = 1, \\ \min\limits_{u \in [-1,1]} \int_0^2 x^2(t)\, dt. \end{cases}$$

$\boxed{3.2.16°}$

On définit le Hamiltonien H par

$$H(t, x, \lambda, \lambda_0, u) = \lambda . u + \lambda_0 x^2$$

D'après le principe du maximum de Pontryaguine Théorème 3.4 si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors il existe une application $\lambda : [0,2] \to \mathbb{R}$ et un réel $\lambda_0 \in \{0,1\}$ tels que

i) $(\lambda, \lambda_0) \neq (0,0)$

ii) $$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = u^*(t), \quad t \in [0,2], \\ x^*(0) = 0, \quad x^*(2) = 1, \\ \dot{\lambda}(t) = - \dfrac{\partial H}{\partial x} = -2\lambda_0 x^*(t), \quad t \in [0,2], \end{cases}$$

iii) $$H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, u^*) = \min_{v \in [-1,1]} H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, v).$$

$\boxed{3.2.17°}$

C'est-à-dire,

$$\lambda u^* + \lambda_0 x^{*2} = \min_{v \in [-1,1]} \{\lambda . v + \lambda_0 x^{*2}\}.$$

C'est-à-dire,

$$\lambda . u^* = \min_{v \in [-1,1]} \{\lambda . v\}.$$

C'est-à-dire,

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } \lambda(t) > 0 \\ +1 \text{ si } \lambda(t) < 0. \end{cases}$$

Montrons d'abord que toute extrémale est normale.

Supposons que $\lambda_0 = 0$, alors d'après ii), on a

$$\dot{\lambda}(t) = 0, \text{ pour tout } t \in [0,2].$$

Ce qui donne, $\lambda(t) = C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

pour tout $t \in [0,2]$.

$\boxed{3.2.18°}$

Alors
$$u^*(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } C>0, \\ +1 \text{ si } C<0. \end{cases}$$

On distingue les cas suivants:

<u>1er Cas</u>: $u^*(t) = -1$ pour tout $t \in [0,2]$.

D'après ii), on a:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = -1, \ t \in [0,2], \\ x^*(0)=0, \ \ x^*(2)=1. \end{cases} \qquad (C1)$$

Les solutions de $\dot{x}^*(t) = -1$ sont

$$x^*(t) = -t + \beta, \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}.$$

Comme $x^*(0)=0$, on obtient $\beta = 0$.

Alors, $\quad x^*(t) = -t.$

Mais $\quad x^*(2) = -2 \neq 1.$

Par suite le problème (C1) n'admet aucune solution.

$\boxed{3.2.19°}$

2ème Cas : $u^*(t) = 1$, pour tout $t \in [0,2]$.

D'après ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = 1, & t \in [0,2], \\ x^*(0) = 0, & x^*(2) = 1 \end{cases} \qquad (C2)$$

Les solutions de $\dot{x}^*(t) = +1$ sont

$$x^*(t) = t + \gamma, \text{ avec } \gamma \in \mathbb{R}.$$

Comme $x^*(0) = 0$, on obtient $\gamma = 0$.

Alors,

$$x^*(t) = t.$$

Mais $\qquad x^*(2) = 2 \neq 1.$

Par suite le problème (C2) n'admet aucune solution.

En conclusion toute extrémale est normale et par conséquent $\lambda_0 = 1$.

$\boxed{3.2.20}$

Maintenant d'aprés ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = u^*(t), \ t \in [0,2], \\ x^*(0) = 0, \ \ x^*(2) = 1, \\ \dot{\lambda}(t) = -2x^*(t), \ t \in [0,2], \end{cases} \qquad (C3)$$

et d'autre part, on a

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } \lambda(t) > 0, \\ +1 \text{ si } \lambda(t) < 0. \end{cases}$$

Comme $t \mapsto u^*(t)$ est une fonction constante par morceaux, alors d'aprés (C3) la fonction $t \mapsto \dot{\lambda}(t)$ a l'une des formes suivantes:

<u>1ère forme</u> : $t \mapsto \lambda(t) < 0$, pour tout $t \in]0,2]$.
Alors comme $\dot{\lambda}(0) = 0$ et $\dot{\lambda}(2) = -2$ et $t \mapsto \dot{\lambda}(t)$ est une fonction affine par morçeaux, on a

$$\dot{\lambda}(t) = -t, \ \text{ pour tout } t \in [0,2].$$

$\boxed{3.2.21°}$

Ce qui donne d'après (C3)

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t)$$
$$= -\frac{\ddot{\lambda}(t)}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \text{ contradiction.}$$

<u>2ème forme</u> : $t \mapsto \dot{\lambda}(t) > 0$, pour tout $t \in]0, t_1[$

et $t \mapsto \dot{\lambda}(t) < 0$, pour tout $t \in]t_1, 2]$.

Comme $\dot{\lambda}(0) = 0$, on a

$$\dot{\lambda}(t) = at, \text{ pour tout } t \in [0, t_1],$$

avec $a \in \mathbb{R}$.
Maintenant pour tout $t \in [t_1, 2]$, on a

$$\dot{\lambda}(t) = ct + d,$$

avec c et d deux constantes réelles telles que

$\boxed{3.2.22°}$

$$\text{(C4)} \begin{cases} a t_1 = c t_1 + d & \text{car la fonction } t \mapsto \dot{\lambda}(t) \text{ est continue.} \\ 2c + d = -2 & \text{car } \dot{\lambda}(2) = -2. \end{cases}$$

Maintenant d'après (C3), on a :

$$\ddot{\lambda}(t) = -2\,\dot{x}^*(t)$$
$$= -2\,u^*(t),$$

ce qui donne,

$$u^*(t) = -\frac{\ddot{\lambda}(t)}{2}$$
$$= \begin{cases} -\frac{a}{2} & \text{si } t \in [0, t_1[, \\ -\frac{c}{2} & \text{si } t \in [t_1, 2], \end{cases}$$

avec $a = \pm 2$ et $c = \pm 2$.

On distingue les cas suivants :

$\boxed{3.2.23°}$

$\underline{\underline{1^{er}\text{ Cas}}}$: $a = c = 2$.

C'est-à-dire,

$$u^*(t) = -1, \text{ pour tout } t \in [0, 2].$$

Ce cas est impossible car il ne vérifie pas le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = -1, & t \in [0, 2], \\ x^*(0) = 0, & x^*(2) = 1, \end{cases}$$

C'est-à-dire x^* n'existe pas.

$\underline{\underline{2^{ème}\text{ Cas}}}$: $a = c = -2$.

C'est-à-dire,

$$u^*(t) = 1, \text{ pour tout } t \in [0, 2].$$

Ce cas est aussi impossible car il n'existe aucune fonction x^* qui vérifie

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = 1, & t \in [0, 2], \\ x^*(0) = 0, & x^*(2) = 1. \end{cases}$$

$$\boxed{3.2.24^\circ}$$

3ème cas : $a=-2$ et $c=2$.

Pour ce cas d'après (C4), on a

$$\begin{cases} -2t_1 = 2t_1 + d, \\ 4 + d = -2, \end{cases}$$

ce qui donne,

$$d=-6 \text{ et } t_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \in]0,2[.$$

4ème cas : $a=2$ et $c=-2$.

Pour ce cas d'après (C4), on a :

$$\begin{cases} 2t_1 = -2t_1 + d, \\ -4 + d = -2, \end{cases}$$

ce qui donne $d=2$ et $t_1 = \frac{d}{4} = \frac{1}{2} \in]0,2[$.

$\boxed{3.2.25°}$

Maintenant pour le $3^{ème}$ cas, on a :

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [0, \frac{3}{2}[, \\ -1 \text{ si } t \in]\frac{3}{2}, 2], \end{cases}$$

et
$$x^*(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \in [0, \frac{3}{2}[, \\ -t+3 \text{ si } t \in [\frac{3}{2}, 2]. \end{cases}$$

et pour le $4^{ème}$ cas, on a :

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } t \in [0, \frac{1}{2}[, \\ +1 \text{ si } t \in]\frac{1}{2}, 2], \end{cases}$$

et
$$x^*(t) = \begin{cases} -t \text{ si } t \in [0, \frac{1}{2}[, \\ t-1 \text{ si } t \in [\frac{1}{2}, 2]. \end{cases}$$

$\boxed{3.2.26°}$

Notre problème de contrôle optimal (P3) est de déterminer u^* et x^* qui minimise le coût $\int_0^1 (x^*(t))^2 dt$.

Pour le $3^{ème}$ cas, on a

$$\int_0^2 (x^*(t))^2 dt = \int_0^{3/2} t^2 dt + \int_{3/2}^{2} (-t+3)^2 dt$$

$$= \int_0^{3/2} t^2 dt + \int_{3/2}^{2} (t^2 - 6t + 9) dt$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{27}{8}\right] + \frac{1}{3}\left(8 - \frac{27}{8}\right) - 3\left(4 - \frac{9}{4}\right) + 9\left(2 - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{3}{4} + \frac{9}{2} = \frac{32 + 9 + 54}{12} = \boxed{\frac{95}{12}},$$

et pour le $3^{ème}$ cas, on a

$$\int_0^2 (x^*(t))^2 dt = \int_0^{1/2} t^2 dt + \int_{1/2}^{2} (t-1)^2 dt$$

$$= \int_0^{1/2} t^2 dt + \int_{1/2}^{2} (t^2 - 2t + 1) dt$$

$\boxed{3.2.27°}$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{3}\left(8 - \frac{1}{8}\right) - \left(4 - \frac{1}{4}\right) + \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{15}{4} + \frac{3}{2} = \frac{32 - 45 + 18}{12} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

En conclusion on considère le $4^{ème}$ cas et par suite le contrôle optimal u^* est

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } t \in [0, \frac{1}{2}[, \\ +1 \text{ si } t \in]\frac{1}{2}, 2], \end{cases}$$

et la trajectoire optimale x^* est donnée par

$$x^*(t) = \begin{cases} -t \text{ si } t \in [0, \frac{1}{2}[, \\ t - 1 \text{ si } t \in [\frac{1}{2}, 2]. \end{cases}$$

$\boxed{3.2.28°}$

Exercice 4 : Il s'agit de résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$(P4)\quad \begin{cases} \ddot{x}(t) = u(t), \ t\in[0,T], \\ x(0) = x_0, \ x(T) = 0 \\ x'(0) = 0, \ x'(T) = 0, \\ \min\limits_{u\in[-1,1]} \int_0^T dt, \end{cases}$$

avec $x_0 \in (0,1)$ et T n'est pas fixé.

On pose $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}$

Alors $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix}$.

Maintenant on définit le Hamiltonien H par

$$H(t, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_0, u) = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u + \lambda_0.$$

$\boxed{3.2.29°}$

D'après le principe du maximum de Pontryaguine Théorème 3.4 si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors il existe une application $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et un réel $\lambda_0 \in \{0, 1\}$ tels que

i) $(\lambda, \lambda_0) \neq (0, 0, 0)$

ii) $$\begin{cases} \dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t), \ t \in [0, T], \\ \dot{x}_2^*(t) = u^*(t), \ t \in [0, T], \\ \begin{pmatrix} x_1^*(0) \\ x_2^*(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^*(T) \\ x_2^*(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dot{\lambda}_1(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \ t \in [0, T], \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t), \ t \in [0, T] \end{cases}$$

iii) $$H(t, x_1^*, x_2^*, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_0, u) = \min_{v \in [-1, 1]} H(t, x_1^*, x_2^*, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_0, v)$$

$\boxed{3.2.30°}$

C'est-à-dire,

$$\lambda_1 x_2^* + \lambda_2 u^* + \lambda_0 = \min_{v \in [-1,1]} \left\{ \lambda_1 x_1^* + \lambda_2 v + \lambda_0 \right\}.$$

C'est-à-dire,

$$\lambda_2 u^* = \min_{v \in [-1,1]} \lambda_2 \cdot v,$$

ce qui donne,

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } \lambda_2(t) > 0, \\ +1 & \text{si } \lambda_2(t) < 0. \end{cases} \qquad \text{A1}$$

iv) Comme T n'est pas fixé, on a

$$H(T, x_1^*, x_2^*, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_0, u^*) = 0.$$

C'est-à-dire,

$$\lambda_1(T)\, x_2^*(T) + \lambda_2(T)\, u^*(T) + \lambda_0 = 0, \qquad \cancel{\text{A2}}$$

c'est-à-dire, $$\boxed{\lambda_2(T)\, u^*(T) + \lambda_0 = 0.} \qquad \text{A2}$$

$$\boxed{3.2.31°}$$

Montrons d'abord que toute extrémale est normale.
Supposons que $\lambda_0 = 0$, alors d'après (A2), on a

$$\lambda_2(T)\, u^*(T) = 0,$$

ce qui donne,

$$\lambda_2(T) = 0 \quad \text{car } u^*(T) = \pm 1.$$

D'autre part d'après ii), on a :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = 0, & t \in [0,T], \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t), & t \in [0,T], \end{cases}$$

ce qui donne,

$$\lambda_2(t) = -ct + \alpha, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Comme $\lambda_2(T) = 0$, on obtient

$$\lambda_2(t) = -c(t - T), \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

On distingue les cas suivants :

$\boxed{3.2.32°}$

1er Cas : $C=0$.

Pour ce cas on a $\lambda_2(t)=0$, pour tout $t\in[0,T]$,

et comme $c=0$, on a $\lambda_1(t)=0$ (car $\lambda_1(t)=c$).

Par suite on a $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_0)=(0,0,0)$, ce qui est

en contradiction avec i).

2ème cas : $c<0$.

Pour ce cas, on a $\lambda_2(t)=-c\,(t-T)<0$, pour

tout $t\in[0,T[$.

Par suite d'après (A1), on a $u^*(t)=+1$ pour tout

$t\in[0,T]$.

Maintenant d'après ii), on a :

$$\begin{cases} \dot{x}_2^*(t)=1,\ t\in[0,T], \\ x_2^*(0)=0,\quad x_2^*(T)=0, \end{cases} \qquad (C1)$$

or ce problème (C1) n'admet aucune solution (vérifier ça).

$\boxed{3.2.33°}$

3ème cas : $c > 0$.

Pour ce cas, on a $\lambda_2(t) = -c(t-T) > 0$, pour tout $t \in [0, T[$

Par suite d'après (A2), on a $u^*(t) = -1$, pour tout $t \in [0, T]$.

Maintenant d'après ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}_2^*(t) = -1, \ t \in [0,T], \\ x_2^*(0) = 0, \ x_2^*(T) = 0 \end{cases} \quad (C2)$$

Il n'est pas difficile de montrer que le problème (C2) n'admet aucune solution.

En conclusion $\lambda_0 = 1$ et par suite toute extrémale est normale.

Maintenant on sait que,

$$\lambda_2(t) = -ct + \alpha, \text{ pour tout } t \in [0,T],$$

$$\boxed{3.2.34°}$$

et d'après (A2), on a :

$$\lambda_2(T)\, u^*(T) = -1,$$

Ce qui donne,

$$\lambda_2(T) = \pm 1 \text{ car } u^*(T) = \pm 1.$$

Alors,

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} -c(t-T)-1 & \text{si } \lambda_2(T) = -1, \\ -c(t-T)+1 & \text{si } \lambda_2(T) = 1. \end{cases}$$

On distingue les deux cas suivants:

<u>Cas 1</u> : $\lambda_2(t) > 0$, pour tout $t \in [0, t_1[$,

et $\lambda_2(t) < 0$, pour tout $t \in]t_1, T]$,

avec $0 < t_1 < T$.

Pour ce cas, on a :

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [0, t_1[, \\ +1 & \text{si } t \in]t_1, T]. \end{cases}$$

$\boxed{3.2.35°}$

Maintenant d'après ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}_2^*(t) = u^*(t), \ t \in [0, T], \\ x_2^*(0) = 0, \ x_2^*(T) = 0. \end{cases}$$

Alors $$x_2^*(t) = \begin{cases} -t \text{ si } t \in [0, t_1[, \\ t - T \text{ si } t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

Pour ce cas, on a :

$$-t_1 = t_1 - T,$$

c'est-à-dire, $t_1 = \frac{T}{2}$.

C'est-à-dire,

$$x_2^*(t) = \begin{cases} -t \text{ si } t \in [0, \frac{T}{2}[, \\ t - T \text{ si } t \in [\frac{T}{2}, T]. \end{cases}$$ A3

Déterminons x_1^*.

$\boxed{3.2.36°}$

D'aprés ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t), \; t \in [0, T], \\ x_1^*(0) = x_0, \; x_1^*(T) = 0. \end{cases}$$

Alors d'aprés (A3) (la formule explicite de x_2^*), on obtient

$$x_1^*(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + x_0, \; t \in [0, \frac{T}{2}[, \\ \frac{t^2}{2} - tT + \frac{T^2}{2}, \; t \in [\frac{T}{2}, T]. \end{cases}$$

De plus comme x_1^* est continue, on doit avoir pour $t = \frac{T}{2}$,

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}\right)^2 + x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}\right)^2 - \frac{T^2}{2} + \frac{T^2}{4},$$

2

c'est-à-dire, $$-\frac{T^2}{8} + x_0 = \frac{T^2}{8},$$

ce qui donne, $$x_0 = \frac{T^2}{4}$$

Comme $x_0 \in (0, 1)$, on obtient $T \in (0, 2)$.

$\boxed{3.2.37^\circ}$

Cas 2 : $\lambda_2(t) < 0$, pour tout $t \in [0, t_1[$,
et $\lambda_2(t) > 0$, pour tout $t \in]t_1, T]$,
avec $0 < t_1 < T$.

Pour ce cas, on a

$$u^*(t) = \begin{cases} +1 \text{ si } t \in [0, t_1[, \\ -1 \text{ si } t \in]t_1, T]. \end{cases}$$

Maintenant d'après ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}_2^*(t) = u^*(t), \ t \in [0, T], \\ x_2^*(0) = 0, \ x_2^*(T) = 0, \end{cases}$$

ce qui donne,

$$x_2^*(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \in [0, t_1[, \\ -t + T \text{ si } t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

Comme x_2^* est continue, on doit avoir au point t_1

$$\boxed{3.2.38°}$$

$$t_1 = -t_2 + T,$$

C'est-à-dire,
$$t_1 = \frac{T}{2}.$$

Alors,
$$x_2^*(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \in [0, \frac{T}{2}[, \\ -t + T \text{ si } t \in [\frac{T}{2}, T]. \end{cases} \quad (A4)$$

Déterminons maintenant x_1^*.

D'aprés ii), on a
$$\begin{cases} \dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t), \ t \in [0, T], \\ x_1^*(0) = x_0, \ x_1^*(T) = 0. \end{cases}$$

Alors d'aprés (A4) (la formule explicite de x_2^*), on obtient
$$x_1^*(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} + x_0 \text{ si } t \in [0, \frac{T}{2}[, \\ -\frac{t^2}{2} + t.T - \frac{T^2}{2}, \text{ si } t \in [\frac{T}{2}, T]. \end{cases}$$

$\boxed{3.2.39°}$

De plus comme x_1^* est continue, on doit avoir pour $t = \frac{T}{2}$,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}\right)^2 + x_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}\right)^2 + \frac{T^2}{2} - \frac{T^2}{2},$$

c'est-à-dire,

$$x_0 = -\frac{T^2}{4} < 0,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $x_0 \in (0,1)$.

En conclusion c'est le 1^{er} cas qui marche et par conséquent le contrôle optimal u^* est :

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } t \in [0, \frac{T}{2}[, \\ +1 \text{ si } t \in]\frac{T}{2}, T]. \end{cases}$$

et la trajectoire optimale x^* (voir que $x^* = x_1^*$) est donnée par

$$x^*(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + x_0, & t \in [0, \frac{T}{2}[, \\ \frac{t^2}{2} - tT + \frac{T^2}{2}, & t \in [\frac{T}{2}, T], \end{cases}$$

et $\quad T = 2\sqrt{x_0}$ (voir que $x_0 = \frac{T^2}{4}$).

Exercice 5 : Transfert optimal de fichiers informatiques.

Il s'agit de résoudre le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P5)\quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -u(t),\ t \in [0, T], \\ x(0) = x_0,\quad x(T) = 0, \\ \min\limits_{u \in [0,1]} C(T, u), \end{cases}$$

avec

$$C(T, u) = \int_0^T u(t) f(t)\,dt + \gamma T^2,$$

avec $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction connue, $\gamma > 0$

et $T > 0$ est libre.

On définit le Hamiltonien H par

$$H(t, x, \lambda, \lambda_0, u) = -\lambda \cdot u + \lambda_0 \cdot u \cdot f$$

D'aprés le principe du maximum de Pontryaguine

Théorème 3.4 si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors il existe une application $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}$ et un réel $\lambda_0 \in \{0,1\}$ tels que

i) $(\lambda, \lambda_0) \neq (0,0)$,

ii) $$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = -u^*(t), \ t \in [0,T], \\ x^*(0) = x_0, \ x^*(T) = 0, \\ \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 0, \ t \in [0,T]. \end{cases}$$

iii) $$H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, u^*) = \min_{v \in [0,1]} H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, v).$$

C'est-à-dire,

$$-\lambda u^* + \lambda_0 . u^* . f = \min_{v \in [0,1]} \{-\lambda . v + \lambda_0 . v . f\}.$$

c'est-à-dire

$$(-\lambda + \lambda_0 . f) u^* = \min_{v \in [0,1]} \{(-\lambda + \lambda_0 . f) v\}.$$

$\boxed{3.2.4.2°}$

C'est-à-dire,

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } -\lambda(t) + \lambda_0 f(t) > 0, \\ 1 \text{ si } -\lambda(t) + \lambda_0 f(t) < 0. \end{cases} \quad \text{(B1)}$$

iv) $H(T, x^*(T), \lambda, \lambda_0, u^*(T)) = -\lambda_0 \Psi'(T)$ avec $\Psi(T) = \gamma T^2$.

C'est-à-dire,

$$\left(-\lambda(T) + \lambda_0 f(T)\right) u^*(T) = -2\lambda_0 \gamma T \quad \text{(B2)}$$

Montrons d'abord que toute extrémale est normale.

Supposons que $\lambda_0 = 0$, alors d'après (B1) et (B2), on a :

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } -\lambda(t) > 0, \\ 1 \text{ si } -\lambda(t) < 0, \end{cases} \quad \text{(B3)}$$

et

$$-\lambda(T)\, u^*(T) = 0. \quad \text{(B4)}$$

$\boxed{3.2.4\ 3^{\circ}}$

Maintenant d'aprés ii), on a :

$$\dot{\lambda}(t) = 0, \text{ pour tout } t \in [0,T],$$

Ce qui donne,

$$\lambda(t) = C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

On distingue les cas suivants ;

<u>1er Cas</u> : $C = 0$.

Ce cas est impossible car on a $(\lambda, \lambda_0) = (0,0)$ ce qui est en contradiction avec i) $\left(\begin{array}{l}\text{voir que} \\ (\lambda, \lambda_0) \neq (0,0)\end{array}\right)$.

<u>2ème cas</u> : $C > 0$.

C'est-à-dire, $\lambda(t) > 0$, pour tout $t \in [0,T]$.

Alors d'aprés (B3), on a

$$u^*(t) = 1, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Par suite d'aprés ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = 1, \ t \in [0, T], \\ x^*(0) = x_0, \ x^*(T) = 0, \end{cases}$$

ce qui donne,

$$x^*(t) = t + x_0, \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Alors,

$$x^*(T) = T + x_0 > 0,$$

ce qui est en contradiction avec la condition $x^*(T) = 0$.

3ème cas : $C < 0$.

C'est-à-dire, $\lambda(t) < 0$, pour tout $t \in [0, T]$.

Alors d'aprés (B3), on a

$$u^*(t) = 0, \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Par suite d'aprés ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = 0, \ t \in [0, T], \\ x^*(0) = x_0, \ x^*(T) = 0, \end{cases} \qquad (C)$$

or il n'est pas difficile de vérifier que le problème (C) n'admet aucune solution.

$\boxed{B.2.1.5°}$

En conclusion toute extrémale est normale et par conséquent $\lambda_0 = 1$.

Maintenant d'après ii), on a

$$\dot{\lambda}(t) = 0, \text{ pour tout } t \in [0,T],$$

Ce qui donne,
$$\lambda(t) = C, \text{ pour tout } t \in [0,T] \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Comme $u^*(t) = 0$ ou $u^*(t) = 1$, pour $t \in [0,T]$, alors d'après (B2), on a $u^*(T) = 1$ et

$$-\lambda(T) + f(T) = -2\gamma T,$$

C'est-à-dire,
$$\lambda(T) = f(T) + 2\gamma T,$$

Ce qui donne,

$$\lambda(t) = f(T) + 2\gamma T \quad \left(\begin{array}{l}\text{Car } \lambda(t) = C, \\ \text{pour tout } t \in [0,T]\end{array}\right).$$

$\boxed{3.2.46°}$

En conclusion, on a

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } f(t) > f(T) + 2\gamma T, \\ 1 \text{ si } f(t) < f(T) + 2\gamma T. \end{cases}$$

Exercice 6 : Contrôle optimal du niveau d'un réservoir.

Il s'agit de résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$(P6) \begin{cases} \dot{h}(t) = u(t) - t, \; t \in [0,T], \\ h(0) = 0, \; h(T) = h_1 \\ \min \int_0^T u^2(t)\,dt, \end{cases}$$

avec le temps final T n'est pas fixé.

On définit le Hamiltonien H par

$$H(t,h,\lambda,\lambda_0,u) = \lambda(t).(u(t)-t)+\lambda_0\, u^2(t)$$

D'après le principe du maximum de Pontryaguine Théorème 3.4 si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors il existe une application $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}$ et un réel $\lambda_0 \in \{0,1\}$ tels que

i) $(\lambda,\lambda_0) \neq (0,0)$,

ii) $$\begin{cases} \dot{h}^*(t) = u^*(t)-t, \ t\in[0,T], \\ h^*(0)=0, \ h^*(T)=h_1, \\ \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial h} = 0, \ t\in[0,T], \end{cases}$$

iii) $$\frac{\partial H}{\partial u}(t,h^*,\lambda,\lambda_0,u^*)=0$$ (car il n'y a aucune contrainte sur le contrôle).

C'est-à-dire,

$$\lambda(t)+2\lambda_0\, u^*(t)=0, \text{ pour tout } t\in[0,T].$$

$$\boxed{3.2.48^\circ}$$

iv) $H(T, h^*(T), \lambda(T), \lambda_0, u^*(T)) = 0$ (car T est libre et $\psi(T) = 0$).

c'est-à-dire,

$$\lambda(T)\left(u^*(T) - T\right) + \lambda_0 u^{*2}(T) = 0.$$

Vérifions d'abord que toute extrémale est normale.

Supposons que $\lambda_0 = 0$, alors d'après iii) $\lambda(t) = 0$, pour tout $t \in [0, T]$, ce qui est en contradiction avec i) (voir que $(\lambda, \lambda_0) \neq (0, 0)$).

Par suite toute extrémale est normale et on a $\lambda_0 = 1$.

Alors d'après iii), on a

$$u^*(t) = -\frac{\lambda(t)}{2}, \text{ pour tout } t \in [0, T],$$

et comme d'après ii), on a

$$\dot{\lambda}(t) = 0, \text{ pour tout } t \in [0, T],$$

on obtient

$$\boxed{3.2.4.9}$$

$$u^*(t) = -\frac{c}{2}, \text{ pour tout } t \in [0,T],$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

Maintenant d'aprés ii), on a

$$\begin{cases} \dot{h}^*(t) = -\frac{c}{2} - t, \quad t \in [0,T], \\ h^*(0) = 0, \quad h^*(T) = h_1. \end{cases}$$

Alors,

$$h^*(t) = -\frac{c}{2}t - \frac{t^2}{2} \quad \text{car } h^*(0) = 0,$$

et on a

$$h^*(T) = h_1,$$

c'est-à-dire,

$$-\frac{c}{2}T - \frac{T^2}{2} = h_1 \quad (*)$$

Par suite d'aprés iv) et $(*)$, on a

$$\begin{cases} \lambda(T)\left(u^*(T) - T\right) + u^{*2}(T) = 0, \\ -\frac{c}{2}T - \frac{T^2}{2} = h_1 \end{cases}$$

$\boxed{3.2.50^{\circ}}$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} C\left(-\frac{C}{2}-T\right)+\left(-\frac{C}{2}\right)^2=0, \\ -\frac{C}{2}T-\frac{T^2}{2}=h_1, \end{cases}$$

Ce qui entraîne que,

$$\begin{cases} -\frac{C}{2}-T+\frac{C}{4}=0, \\ -\frac{C}{2}T-\frac{T^2}{2}=h_1, \end{cases}$$

(voir que $C\neq 0$ car si $C=0$, alors $\lambda(t)=0$, par suite $u^*(t)=0$ et par conséquent on sait que le problème $\begin{cases} \dot{h}^*(t)=-t, \; t\in[0,T], \\ h^*(0)=0, \; h^*(T)=h_1 \end{cases}$ n'admet aucune solution (vérifier ça car $h_1>0$)).

Alors, on a

$$\begin{cases} -\frac{C}{4}=T \\ -\frac{C}{2}T-\frac{T^2}{2}=h_1 \end{cases}$$

$\boxed{3.2.51°}$

Par suite d'aprés ce système algèbrique, on a :

$$\begin{cases} -\frac{c}{2} = 2T, \\ 2T^2 - \frac{T^2}{2} = h_1, \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} -\frac{c}{2} = 2T, \\ \frac{3}{2}T^2 = h_1, \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} -\frac{c}{2} = 2T, \\ T = \sqrt{\frac{2h_1}{3}}. \end{cases}$$

En conclusion, on a

$$u^*(t) = -\frac{c}{2} = 2\sqrt{\frac{2h_1}{3}}, \quad t \in [0, T],$$

$$h^*(t) = -2\sqrt{\frac{2h_1}{3}}\, t - \frac{t^2}{2}, \quad t \in [0, T],$$

et

$$T = \sqrt{\frac{2h_1}{3}}.$$

$\boxed{3.2.52°}$