Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen **Semestre 2**

Module : ***Contrôle optimal***
Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

T. D. N°05 : EQUATION DE HAMILTON- JACOBI -BELLMAN

Exercice1 : Mouvement d'un point matériel par équation HJB

On considère le mouvement d'un point matériel avec un critère quadratique :

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), t \in [s,T] \\ x(s) = \xi, \\ J(s,\xi;u) = \frac{1}{2}\int_s^T (u^2(t) + x^2(t)dt + \frac{1}{2}x^2(T), \end{cases}$$

pour tout $s \in [0,T]$, $T > 0$ fixé, et pour tout $\xi \in \mathrm{R}$.

Question 1. Écrire l'équation HJB et la condition finale pour la fonction valeur $V(s;\xi) = \inf_{u \in L^1([0,T],\mathrm{R})} J(s,\xi;u)$.

Question 2.Résoudre l'équation HJB en cherchant la solution sous la forme séparée $V(s;\xi) = \frac{1}{2}\mu(s)\xi^2$

Question 3. En déduire le contrôle optimal comme feedback, la trajectoire optimale et le contrôle optimal.

Exercice2 : Politique d'investissement

On considère un consommateur qui dispose d'un capital $x(t)$, où $t \in [0;T]$ est le temps. Ce capital lui rapporte au taux $\alpha > 0$. Par ailleurs, le consommateur dépense une quantité $u(t) \geq 0$ de son capital, de sorte que l'évolution est donnée par

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - u(t).$$

On considère la fonction u(t) comme un contrôle, et le consommateur cherche à maximiser la fonction d'utilité suivante :

$$\Phi(u) = \int_0^T e^{-\beta t}\sqrt{u(t)}dt + \sqrt{x(T)},$$

sous la contrainte $u \geq 0$ sur le contrôle. Le réel β vérifie $\beta > \frac{\alpha}{2}$. Le dernier terme de la fonction d'utilité traduit le fait qu'on souhaite à la fois maximiser la consommation (avec une appétence plus prononcée pour la jouissance immédiate que différée) et le capital final. Il s'agit donc d'un problème de contrôle optimal avec le critère $J(u) = -\Phi(u)$.

Question 1. Écrire le Hamiltonien du système et la définition de la fonction valeur $V(s;\xi)$.

Question 2. Écrire l'équation HJB vérifiée par V , et la résoudre en supposant une séparation des variables sous la forme $V(s;\xi) = f(s)\sqrt{\xi}$.

Question 3. En déduire la stratégie d'investissement optimale et la valeur finale du capital.