

Vision par ordinateur

La vision et
La Géométrie de projection

Domaine de la Géométrie et la projection



Géométrie projective pour la vision

Utilisations de la géométrie projective

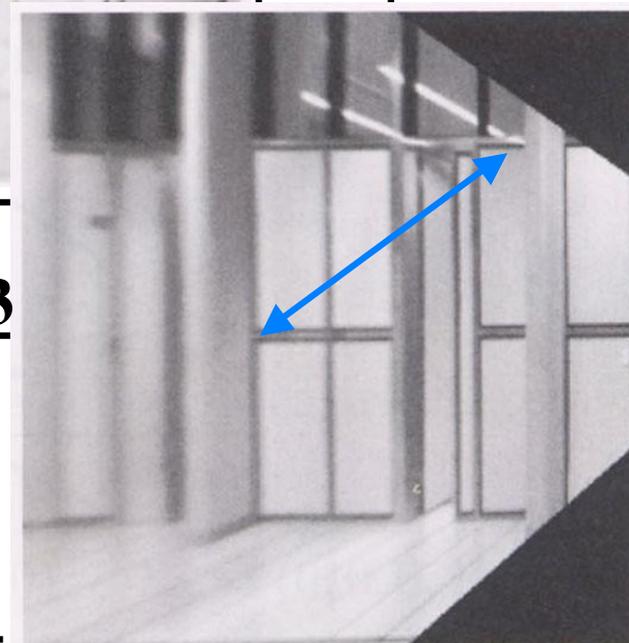
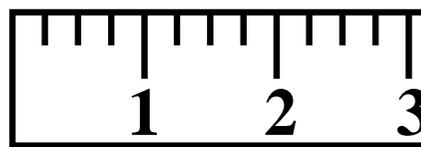
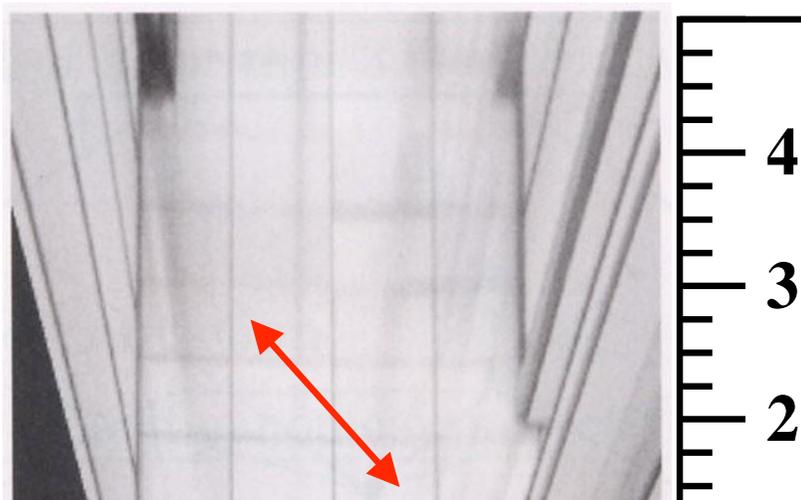
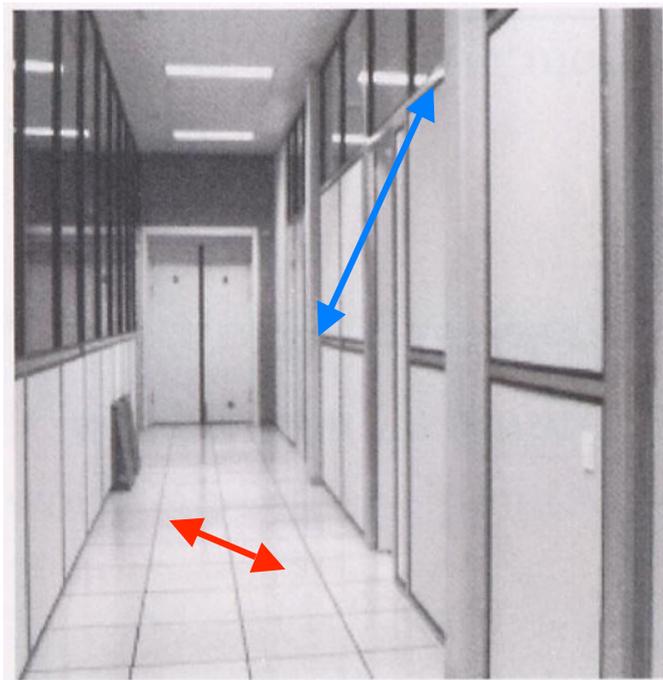
- Dessin
- Mesures
- Mathématiques de la projection
- Dé-distordre les images
- Focus of expansion
- Estimation de pose de la caméra, suivi
- Reconnaissance d'objets utilisant des invariants

Géométrie projective pour une seule caméra

- Représentation projective
- Dualité point-droite
- Points/lignes de fuite
- Homographies
- Le birapport

La stéréoscopie et multi-vues

Mesures sur des plans



Approche: transformation inverse puis mesure

Transformations Projectives du Plan

Projection perspective d'un plan

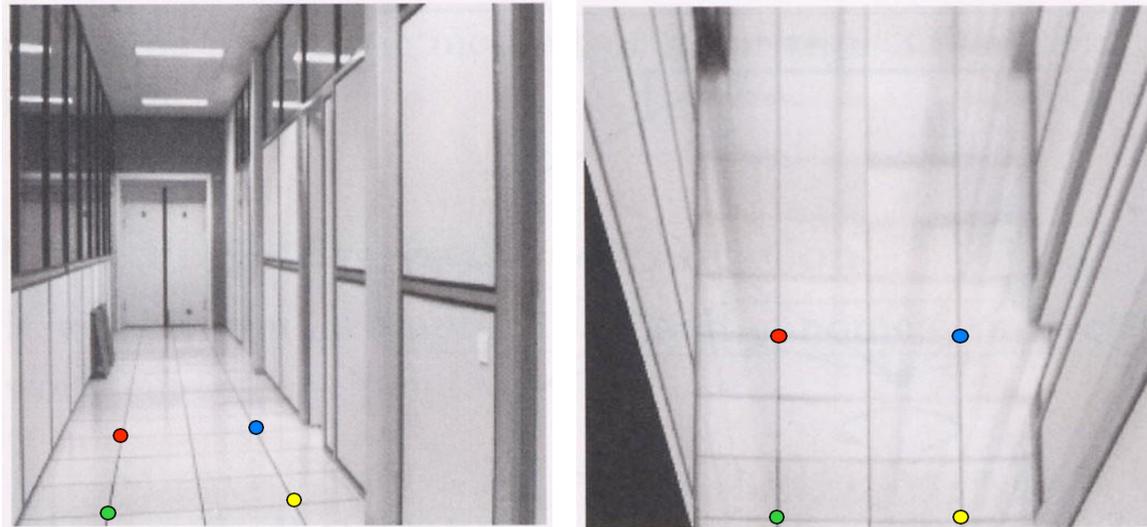
- différents noms:
 - homographie, placage de texture, colinéation
- se représente facilement grâce aux coordonnées homogènes

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} s x' \\ s y' \\ s \end{matrix} = \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} \begin{matrix} x \\ y \\ 1 \end{matrix} \\
 \mathbf{p}' \quad \quad \mathbf{H} \quad \quad \mathbf{p}
 \end{array}$$

Pour appliquer une homographie H

- calculer $\mathbf{p}' = \mathbf{H}\mathbf{p}$
- $\mathbf{p}'' = \mathbf{p}'/s$ normaliser en divisant par la 3ième composante

Rectification d'une image



Pour rectifier une image

- calculer \mathbf{H} étant donnés les \mathbf{p}'' et \mathbf{p}
- résoudre des équations de la forme : $\mathbf{sp}'' = \mathbf{Hp}$
 - linéaires en les inconnues: s et coefficients de \mathbf{H}
 - besoin d'au moins 4 points

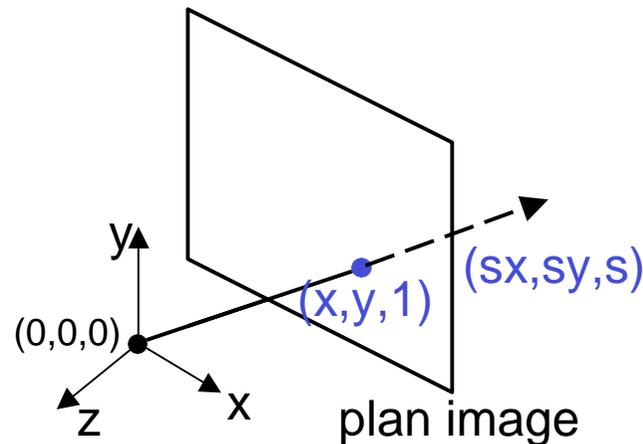
Le plan projectif

Pourquoi les coordonnées homogènes ?

- Permettent de représenter les points à l'infini, les homographies, la projection perspective, les relations multi-vues

Quelle est l'intuition géométrique ?

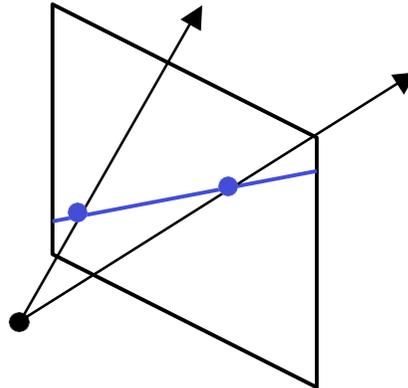
- Un point de l'image est un *rayon* dans l'espace projectif



- Chaque *point* (x,y) du plan est représenté par un *rayon* (sx, sy, s)
 - tous les points du rayon son équivalents : $(x, y, 1) \cong (sx, sy, s)$

Les droites projectives

Qu'est-ce qu'une droite dans l'espace projectif ?



- Une droite est un *plan* formé de rayons passant par l'origine
 - tous les rayons (x,y,z) satisfont: $ax + by + cz = 0$

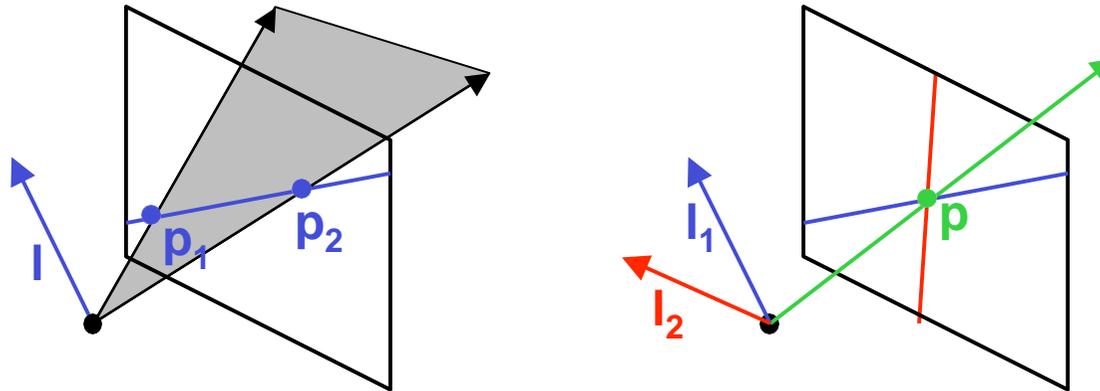
en notation vectorielle: $0 = [a \quad b \quad c] \begin{matrix} \exists x \\ \exists y \\ \exists z \end{matrix}$

l **p**

- Une droite est donc aussi représentée par un vecteur de dimension 3 en coordonnées homogènes **l**

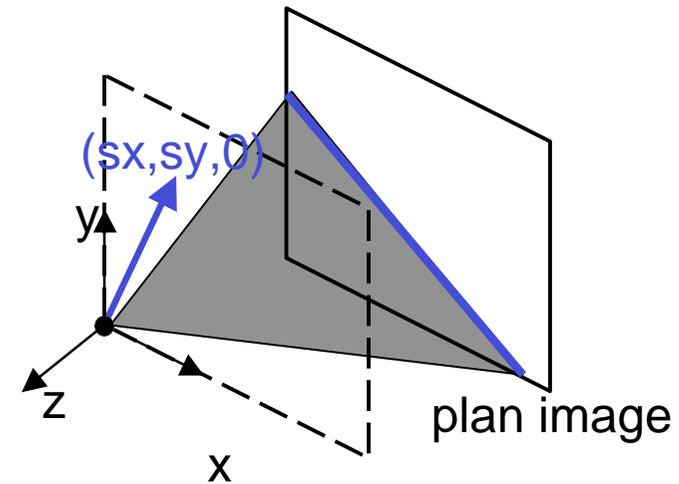
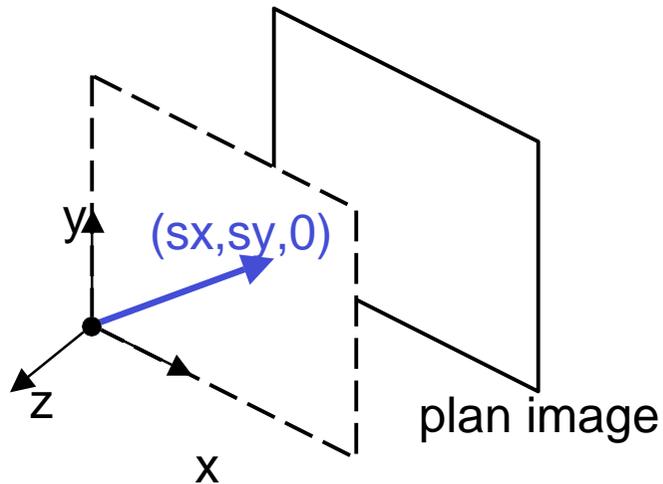
Principe de dualité point / droite

- Une droite l est vecteur à 3 coordonnées (un rayon)
- Elle est \perp à tout point (rayon) p sur la droite: $l \cdot p = 0$



- Quelle est la droite l passant par les rayons p_1 et p_2 ?
 - l est \perp à p_1 et $p_2 \Rightarrow l = p_1 \times p_2$ (produit vectoriel)
 - l est la normale au plan formé par les deux rayons
- Quelle est l'intersection de deux droites l_1 et l_2 ?
 - p est \perp à l_1 et $l_2 \Rightarrow p = l_1 \times l_2$
- Les pts et les droites sont duaux dans l'espace projectif:
 - toute propriété sur les points s'applique aux droites

Points et droites idéaux



Point à l'infini (ou point idéal)

- $p \cong (x, y, 0)$ – parallèle au plan image
- Il a des coordonnées image infinies : c'est une "direction"

Droite idéale

- $l \cong (a, b, 0)$ – parallèle au plan image
- Correspond à une droite passant par l'origine de l'image

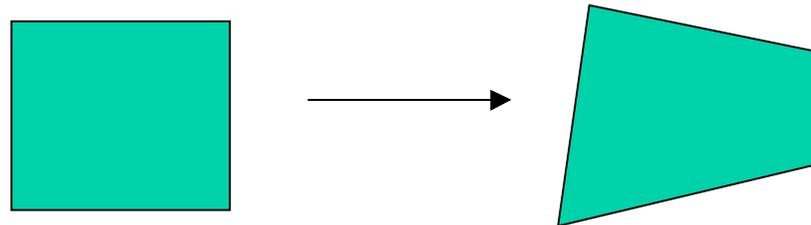
Homographies de points et de droites

Multiplication par une matrice 3x3

- Pour transformer un point : $\mathbf{p}' = \mathbf{H}\mathbf{p}$
- Pour transformer une droite : $\mathbf{l}\mathbf{p}=0 \rightarrow \mathbf{l}'\mathbf{p}'=0$
 - $0 = \mathbf{l}\mathbf{p} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{p} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{p}' \Rightarrow \mathbf{l}' = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{l}$
 - les droites sont transformées par multiplication à droite par \mathbf{H}^{-1}

Les homographies sont des objets courants:

- Transformation perspective d'un plan



- « Texture mapping »
- Rectification pour la stéréoscopie
- Construction de panorama

Géométrie projective 3D

Ces concepts se généralisent en 3D

- Coordonnées homogènes
 - Les points 3D projectifs ont quatre coords : $\mathbf{P} = (X, Y, Z, W)$
- Dualité
 - Un plan \mathbf{L} est aussi représenté par un vecteur de dim. 4
 - Les points et les plans sont duaux en 3D: $\mathbf{L} \mathbf{P} = 0$
- Transformations projectives
 - Représentées par des matrices 4x4 \mathbf{T} : $\mathbf{P}' = \mathbf{T}\mathbf{P}$, $\mathbf{L}' = \mathbf{L} \mathbf{T}^{-1}$

Toutefois

- Par de produit vectoriel en 4D. On a besoin de nouveaux outils
 - Algèbre de Grassman-Cayley
 - » généralisation du produit vectoriel, interactions entre points, droites et plans via les opérateurs *join* et *meet*
 - Dépasse le cadre de ce cours (cf. Faugeras & Luong 2001)

3D vers 2D: Projection "perspective"

Il est utile de décomposer Π en $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \text{projection} \rightarrow \mathbf{A}$

$$\mathbf{D} = \begin{matrix} \begin{matrix} s_x & 0 & t_x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & t_y & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} & \mathbf{T} \\ 3 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 1 \end{matrix} \\ \text{intrinsèques} & \text{projection} & \text{orientation} & \text{position} \end{matrix}$$

Orthographique

$$D = \begin{bmatrix} i_x & i_y & i_z & t_x \\ j_x & j_y & j_z & t_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perspectif faible

$$D = f \begin{bmatrix} i_x & i_y & i_z & t_x \\ j_x & j_y & j_z & t_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Affine

$$D = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perspectif

$$D = [R \quad t]$$

Projectif

$$D = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Propriétés de la projection

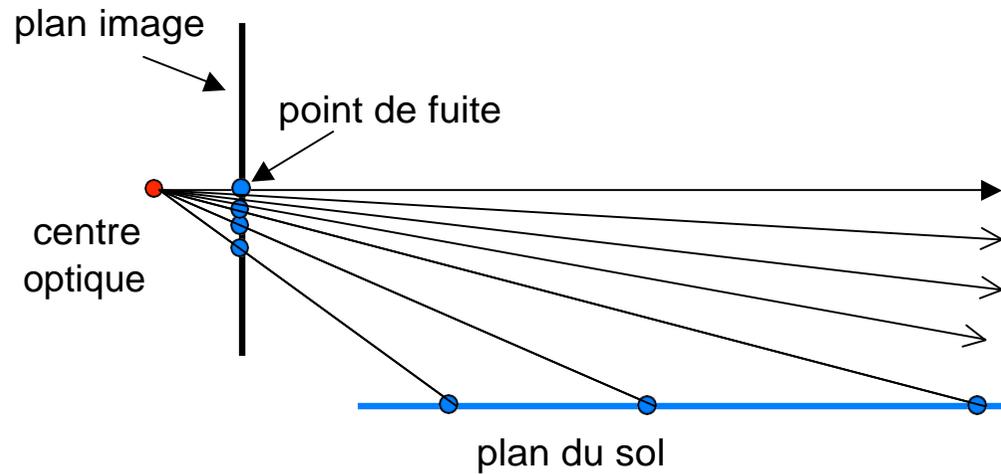
Conserve

- Droites et coniques
- Intersection
- Invariants (birapport)

Ne conserve pas

- Distances
- Angles
- Parallélisme

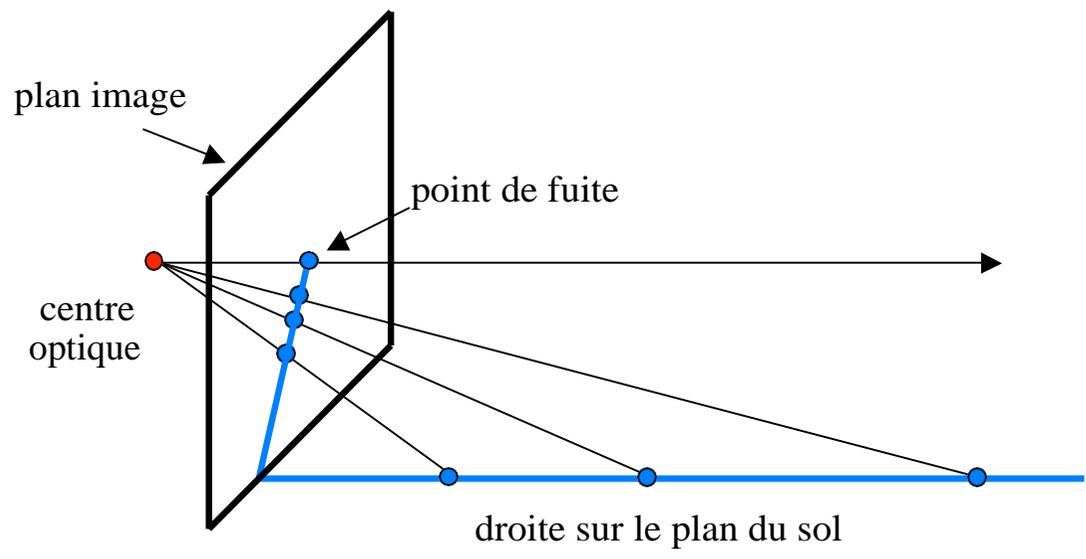
Points de fuite



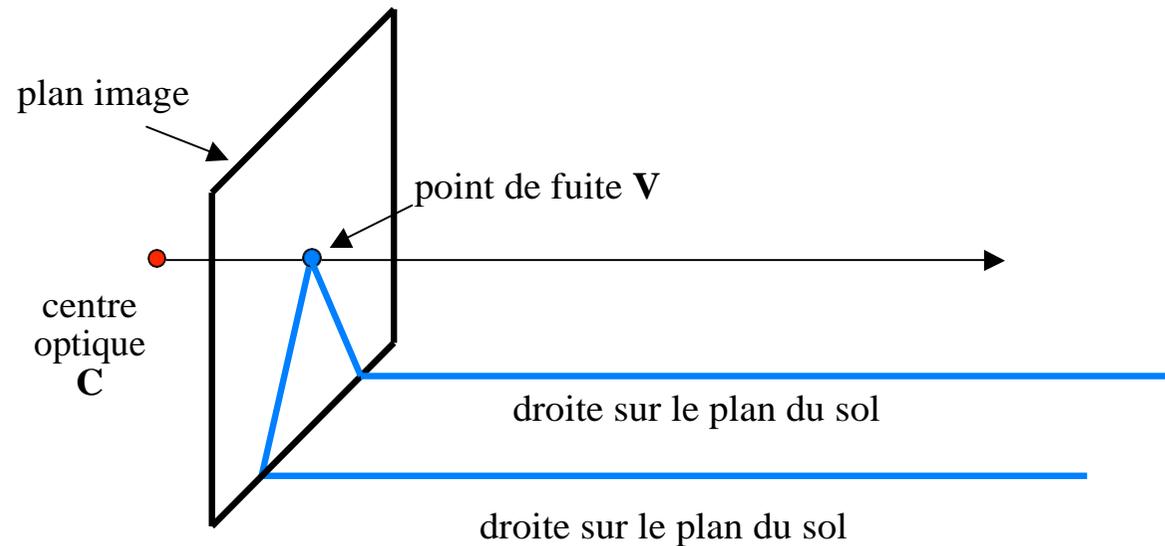
Point de fuite

- projection d'un point à l'infini

Points de fuite (2D)



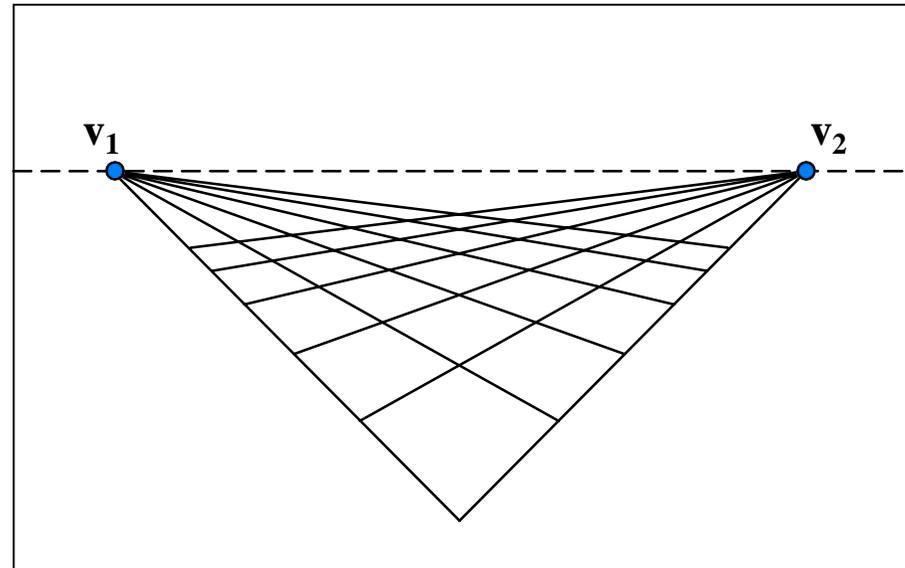
Points de fuite



Propriétés

- Deux droites parallèles ont le même point de fuite
- Le rayon issu de **C** passant par **v** est parallèle aux droites
- Une image peut avoir plus d'un point de fuite

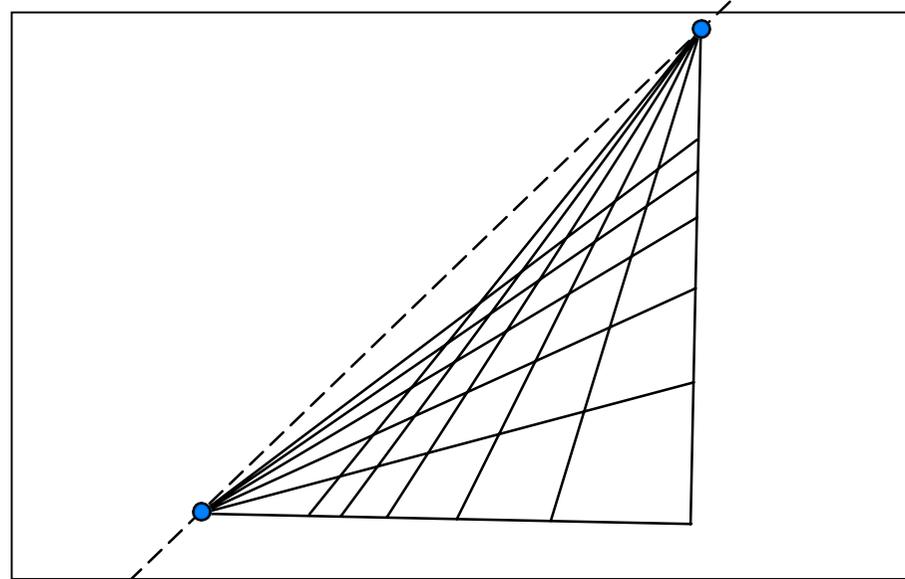
Lignes de fuite



De nombreux points de fuite

- Un ensemble de droites // du plan définit un point de fuite
- L'union de tous ces points de fuite est la *ligne d'horizon*
 - aussi appelée *ligne de fuite* (article de Criminisi)
- Différents plans définissent différentes lignes de fuite

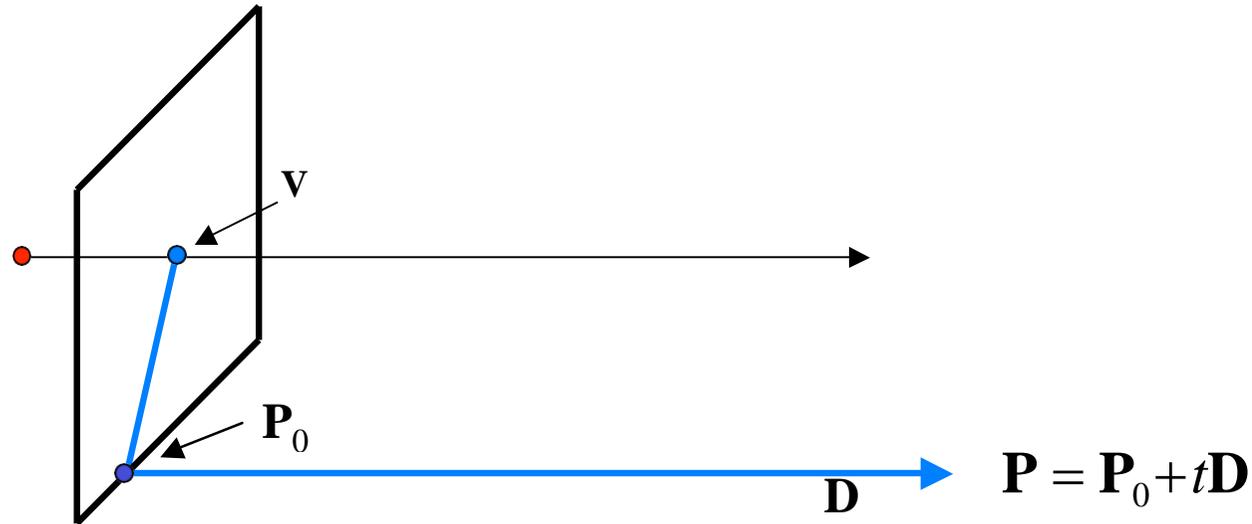
Lignes de fuite



De nombreux points de fuite

- Un ensemble de droites // du plan définit un point de fuite
- L'union de tous ces points de fuite est la *ligne d'horizon*
– aussi appelée *ligne de fuite* (article de Criminisi)
- Différents plans définissent différentes lignes de fuite

Calcul des points de fuite

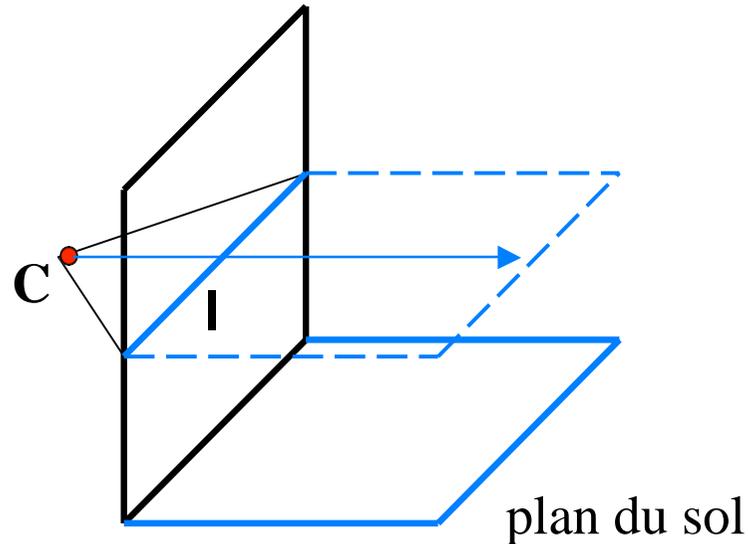


$$\mathbf{P}_t = \begin{pmatrix} P_x + tD_x \\ P_y + tD_y \\ P_z + tD_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x / t + D_x \\ P_y / t + D_y \\ P_z / t + D_z \\ 1/t \end{pmatrix} \quad t \rightarrow \infty \quad \mathbf{P}_\infty = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés $\mathbf{v} = \mathbf{DP}_\infty$

- \mathbf{P}_∞ est un point à l'infini, \mathbf{v} est sa projection
- Ils dépendent seulement de la *direction* de la droite
- Des droites parallèles $\mathbf{P}_0 + t\mathbf{D}$, $\mathbf{P}_1 + t\mathbf{D}$ s'intersectent en \mathbf{P}_∞

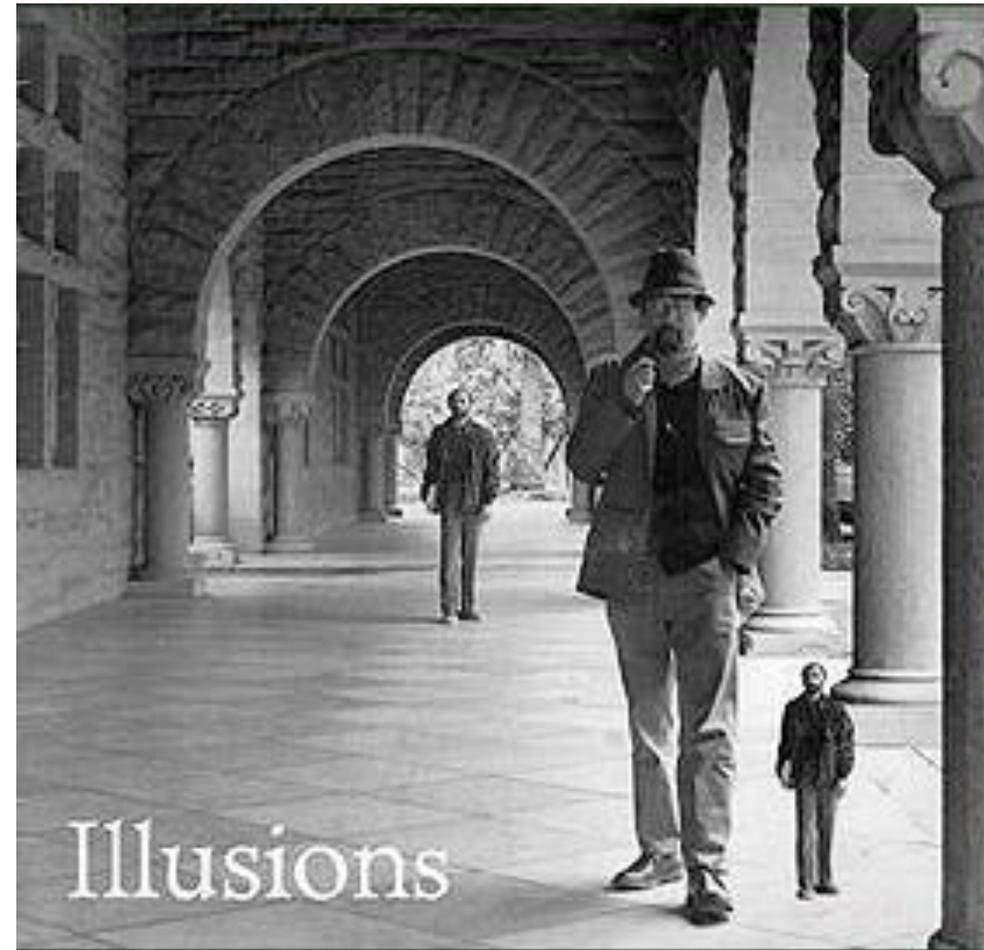
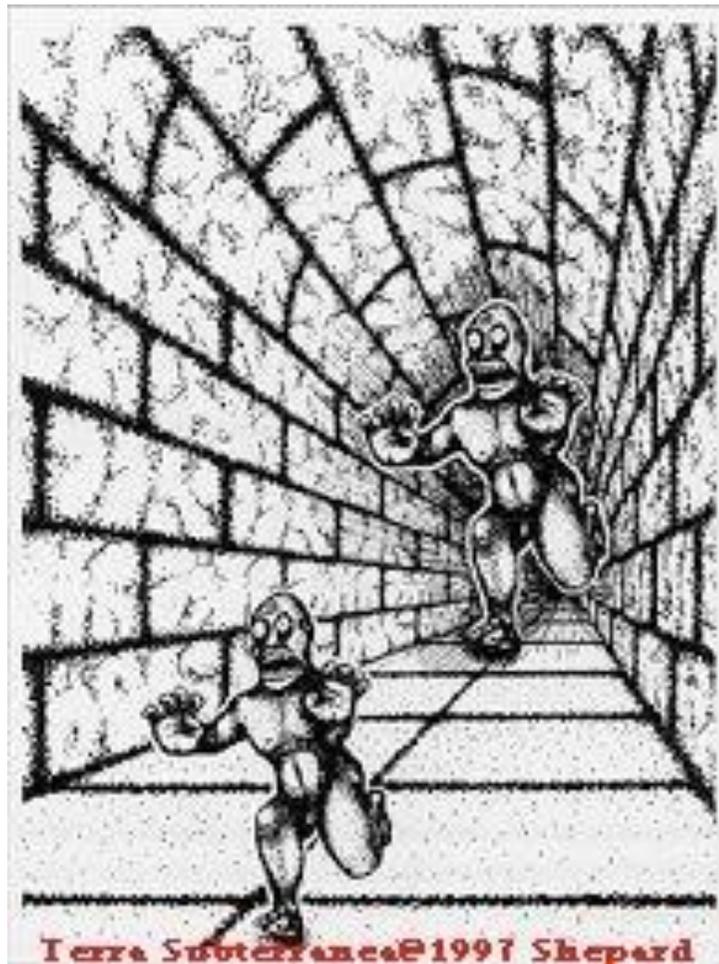
Calcul des lignes de fuite



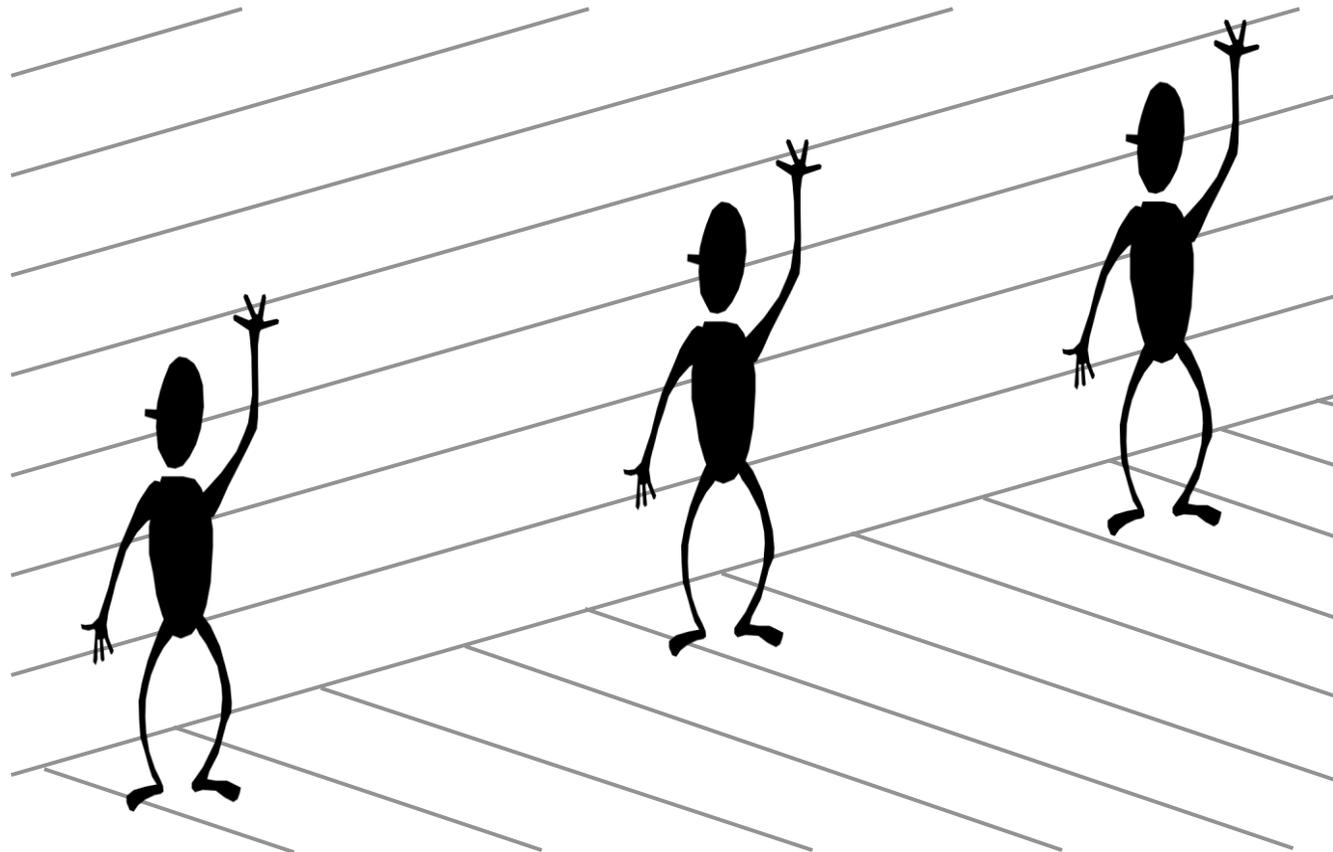
Propriétés

- **I** est l'intersection du plan horizontal passant par **C** avec le plan image
- Calcul de **I** à partir de deux ensemble de droites // du plan du sol
- Tous les points situés à la même hauteur que **C** se projettent en **I**
- Permet de comparer les hauteurs des objets de la scène

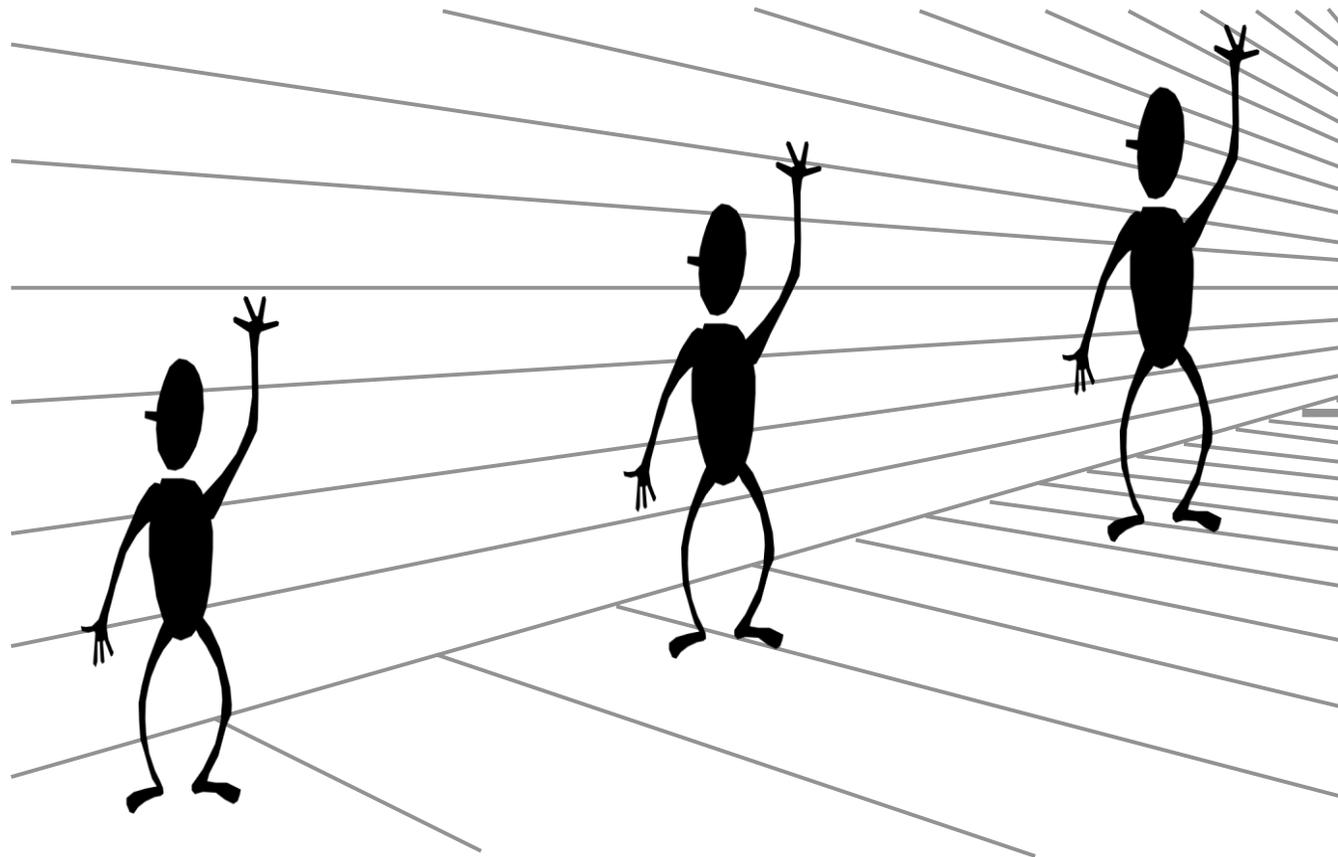
S'amuser avec les points de fuite



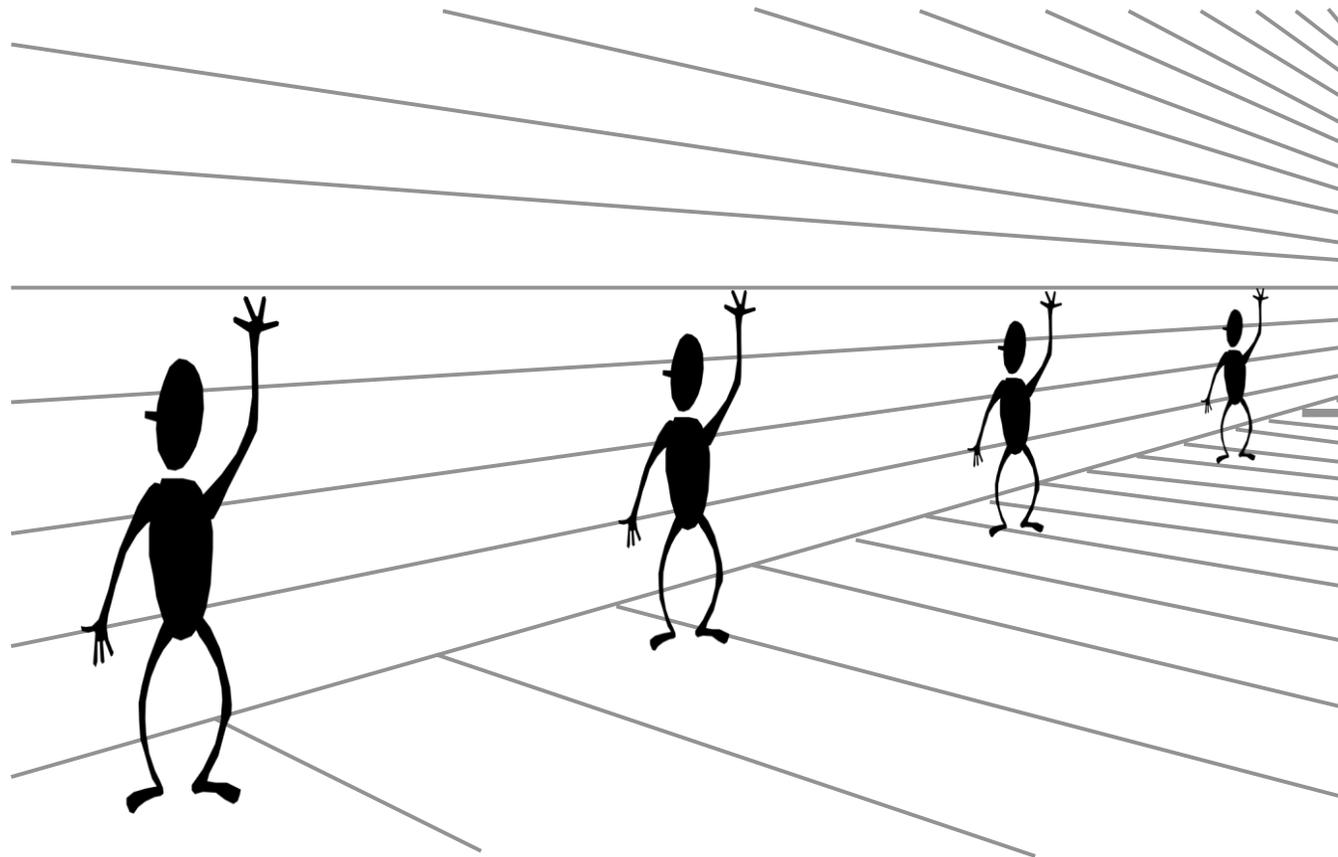
Indices de perspective



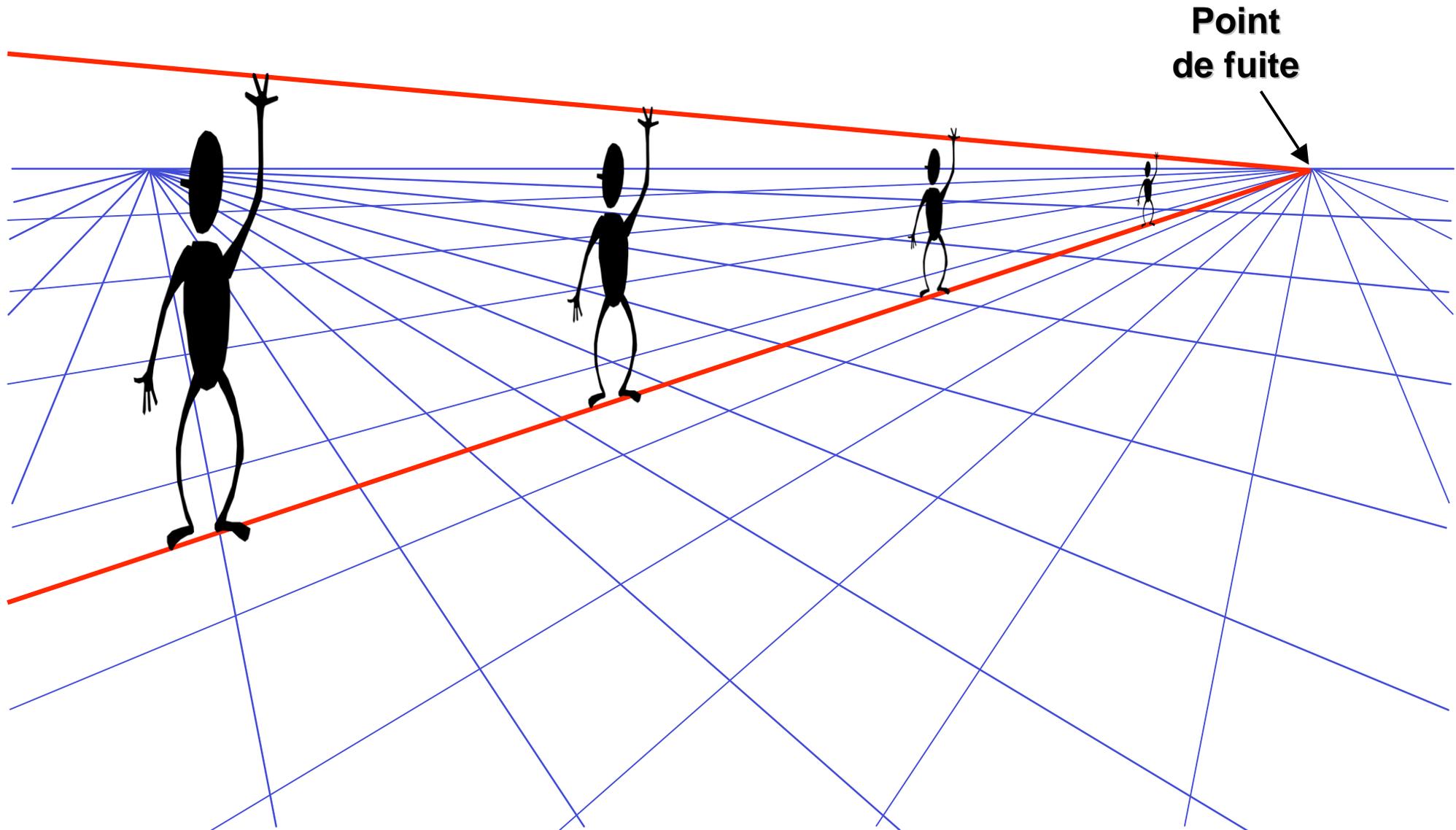
Indices de perspective



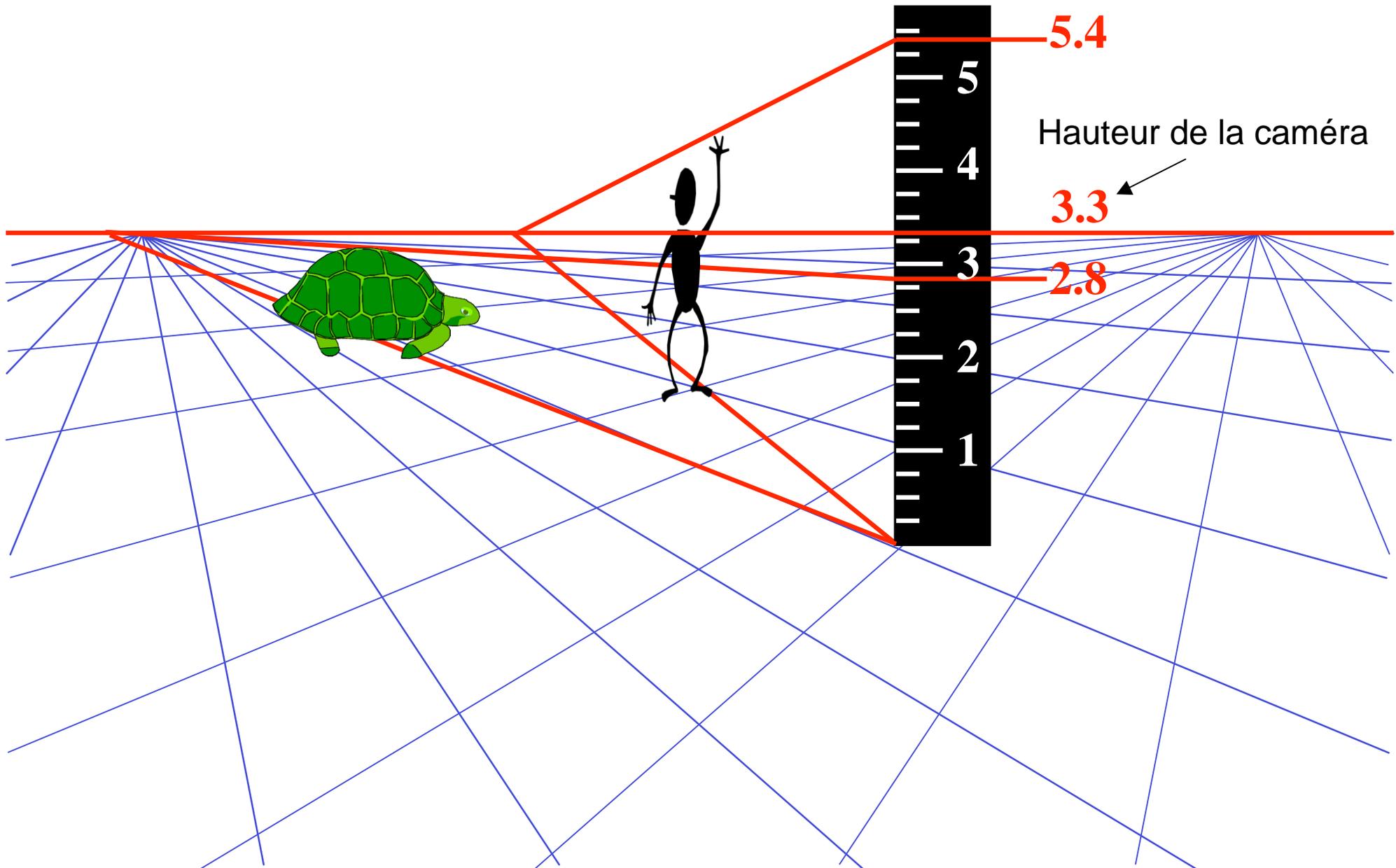
Indices de perspective



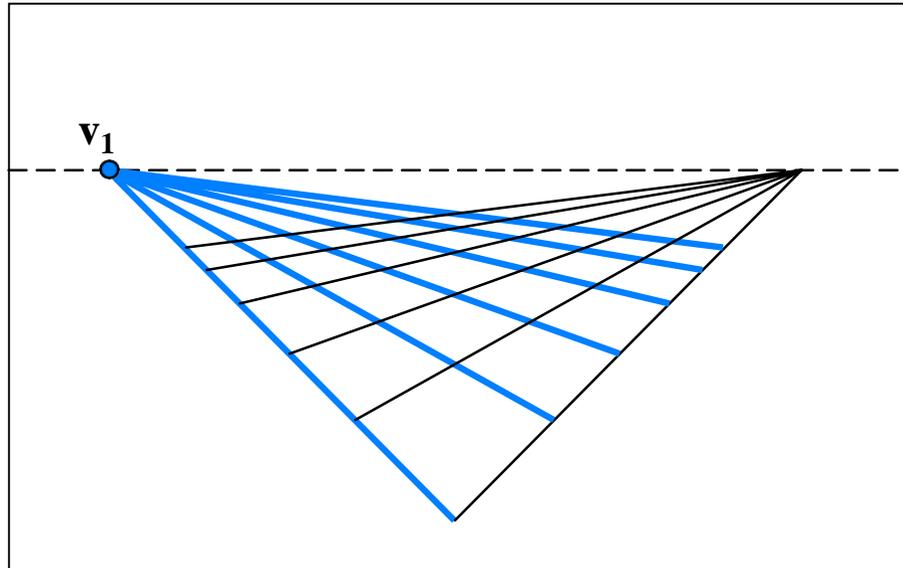
Comparer les hauteurs



Mesurer la hauteur

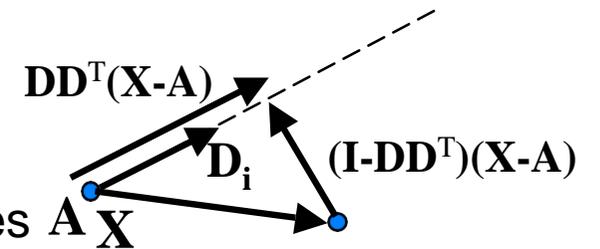


Calcul des points de fuite



Intersection de 2 droites ou plus

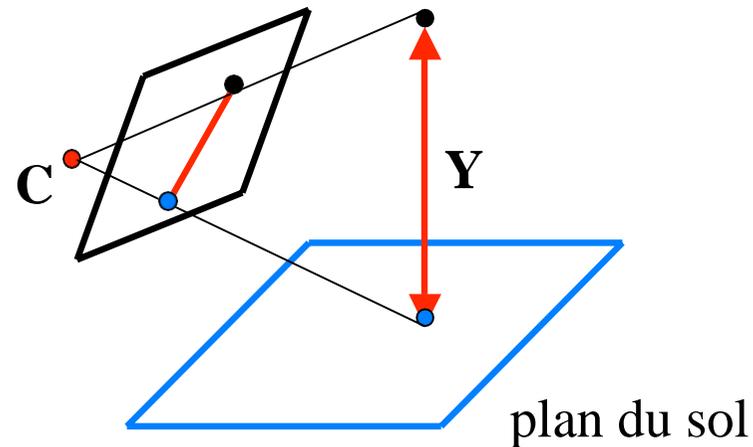
- Droites $A_1 + tD_1, \dots, A_n + tD_n$ (D_i vecteurs unitaires)
- Minimiser la somme des distances au carré aux droites



$$\text{minimiser } \sum_{i=1}^n (\mathbf{X} - \mathbf{A}_i)^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}_i \mathbf{D}_i^T) (\mathbf{X} - \mathbf{A}_i)$$

$$\text{dérivée par rapp. à } \mathbf{X} \text{ égale à } 0 \exists \sum_{i=1}^n \mathbf{C}_i \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i$$

Mesurer la hauteur sans mètre



Mesurer Y à partir des images

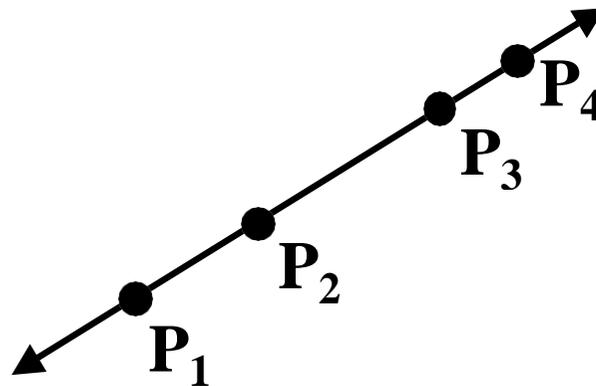
- On a besoin de plus que des points de fuite pour y arriver

Le birapport

Un invariant projectif

- Quelque chose qui n'est pas affecté par les transformations projectives (y compris la projection perspective)

Le birapport de 4 points collinéaires



$$\frac{P_1P_3 \cdot P_2P_4}{P_1P_2 \cdot P_3P_4}$$

On peut permuer l'ordre des points

- $4! = 24$ ordres différent (mais seulement 6 valeurs distinctes)

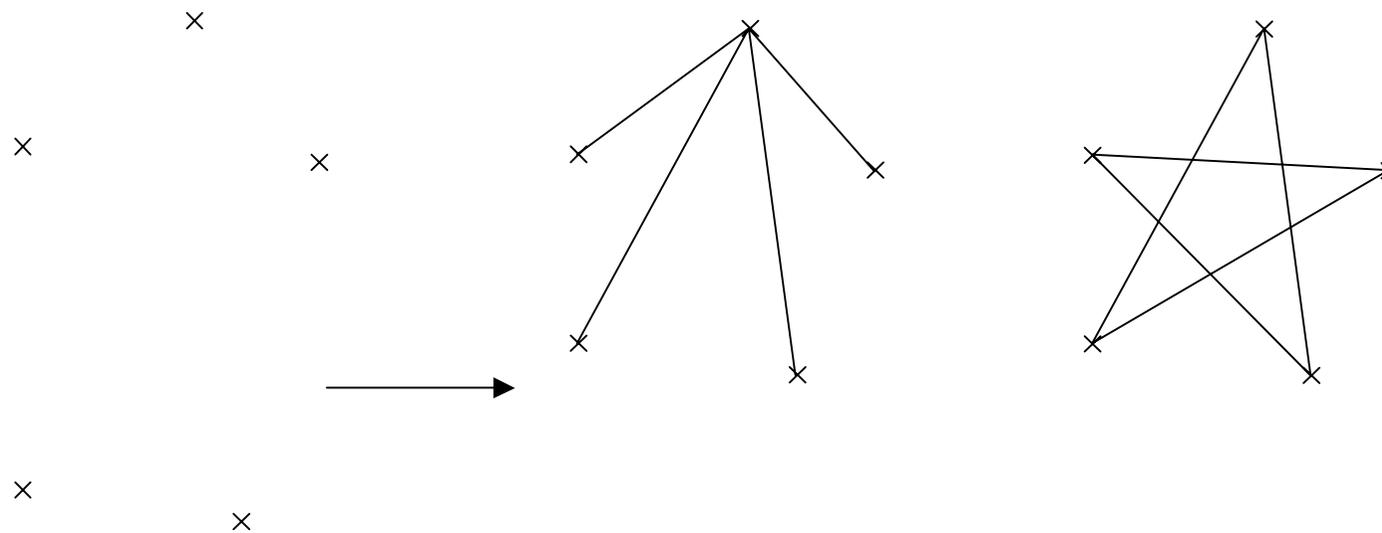
C'est l'invariant fondamental de la géométrie projective

- tous les autres invariants sont dérivés du birapport

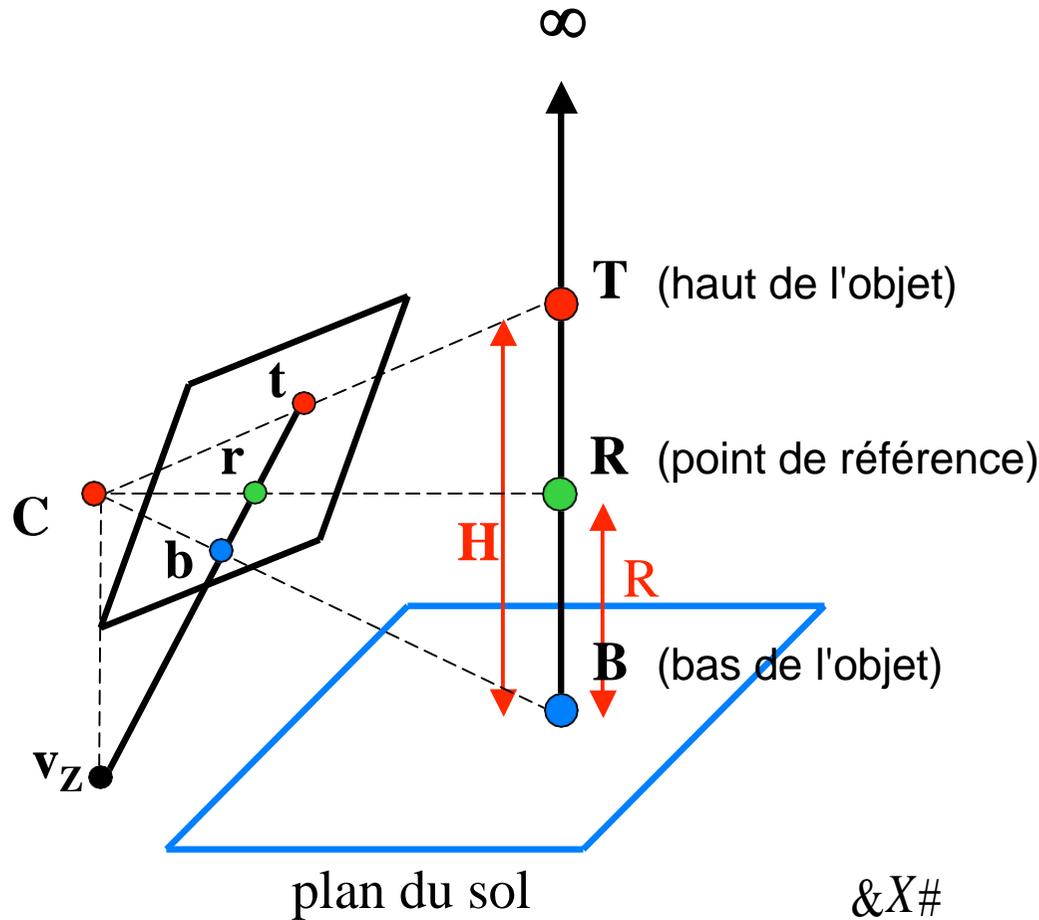
Le birapport



Birapport de points non-collinéaires :



Mesurer la hauteur



Birapport dans la scène

$$\frac{\|T \parallel B\| \|R \parallel \infty\|}{\|R \parallel B\| \|T \parallel \infty\|} = \frac{H}{R}$$

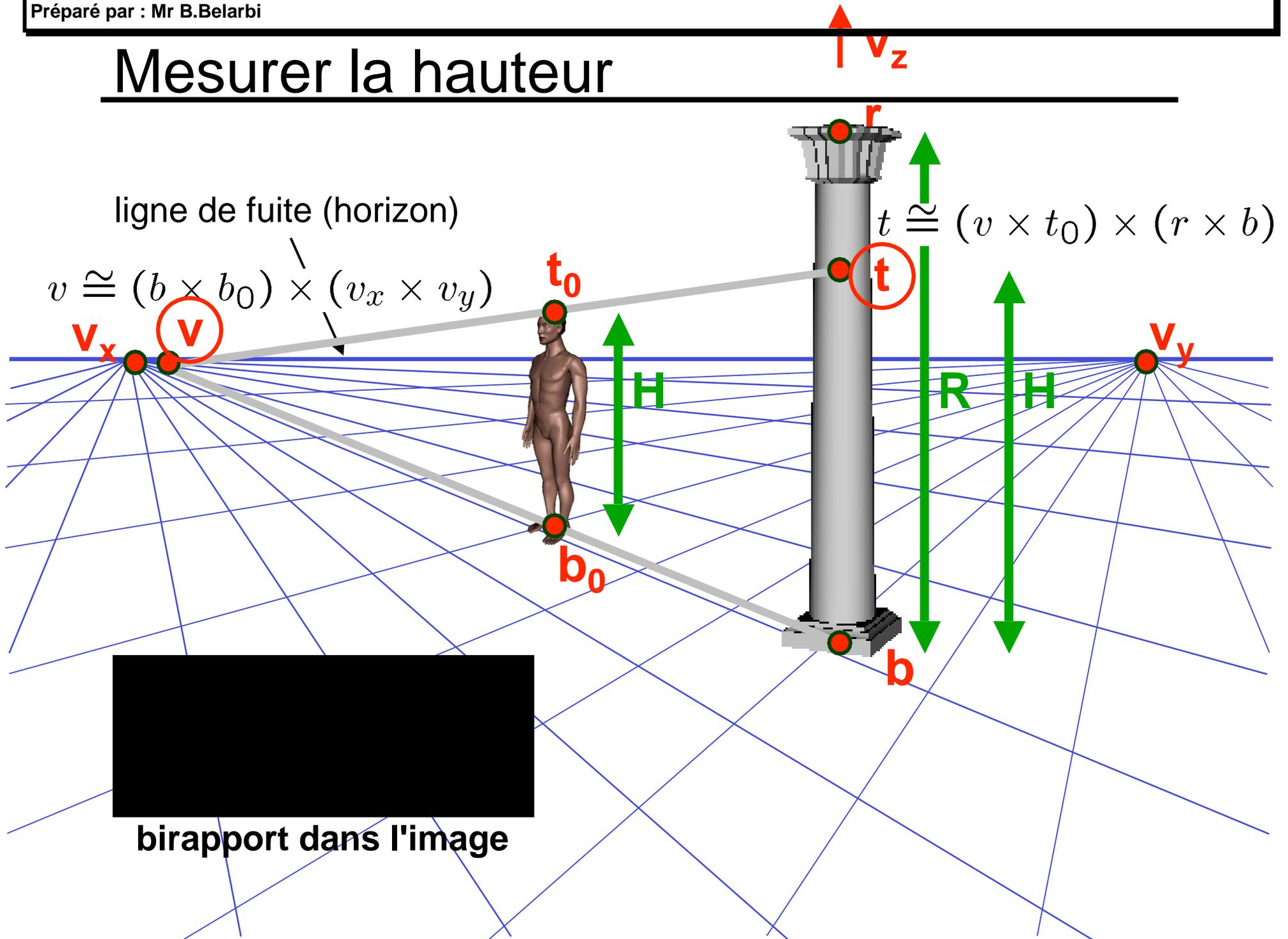
Birapport dans l'image

$$\frac{\|t \parallel b\| \|v_z \parallel r\|}{\|r \parallel b\| \|v_z \parallel t\|} = \frac{H}{R}$$

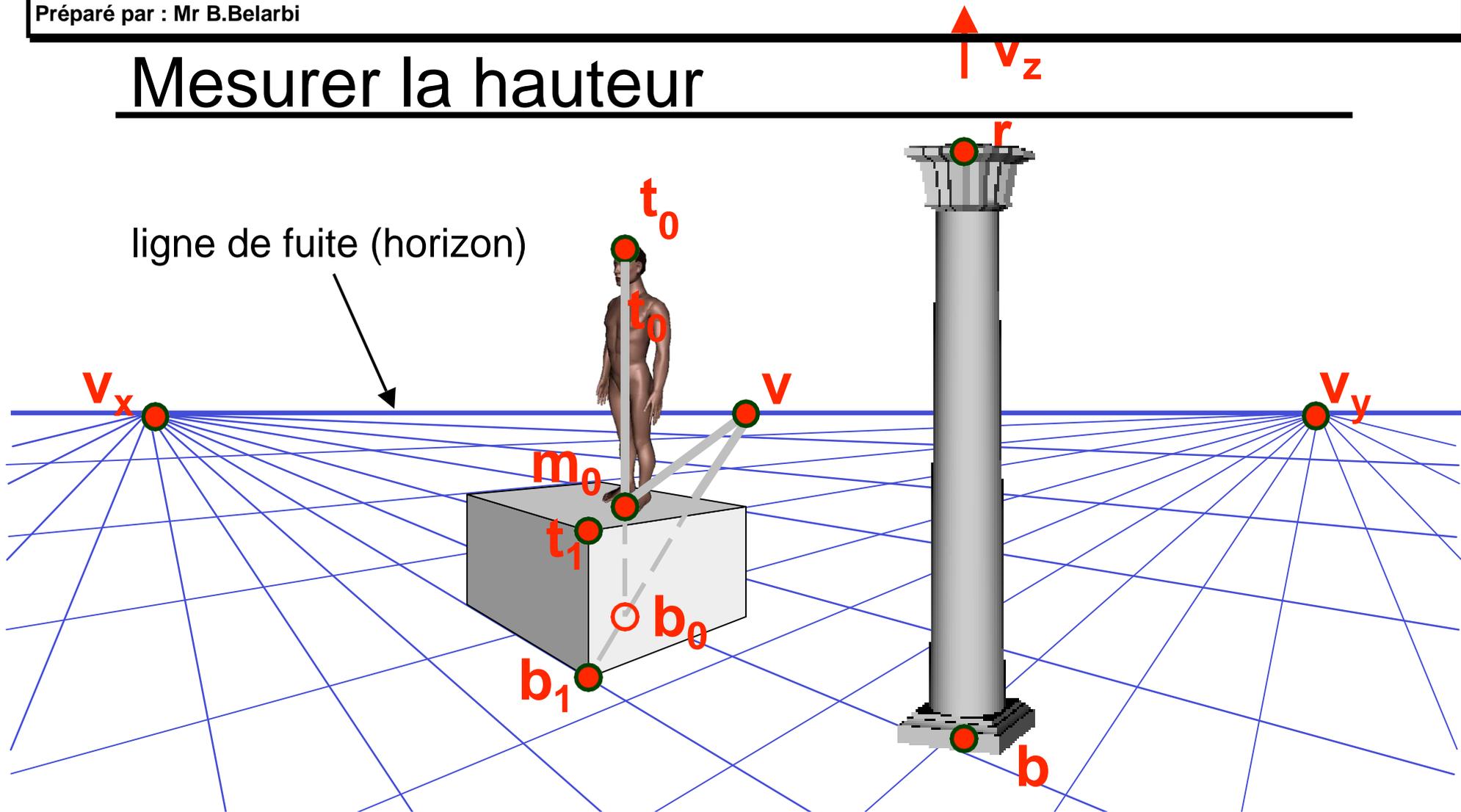
points scène représentés par $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$

points image $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

Mesurer la hauteur



Mesurer la hauteur



Et si le point sur le plan du sol b_0 est inconnu ?

- L'homme est debout sur une boîte, dont la hauteur est inconnue
- Utiliser un côté de la boîte pour trouver b_0 comme ci-dessus

3D projective geometry

These concepts generalize naturally to 3D

- Homogeneous coordinates
 - Projective 3D points have four coords: $\mathbf{P} = (X, Y, Z, W)$
- Duality
 - A plane \mathbf{N} is also represented by a 4-vector
 - Points and planes are dual in 3D: $\mathbf{N} \mathbf{P} = 0$
- Projective transformations
 - Represented by 4x4 matrices \mathbf{T} : $\mathbf{P}' = \mathbf{T} \mathbf{P}$, $\mathbf{N}' = \mathbf{N} \mathbf{T}^{-1}$

Jusqu'ici...

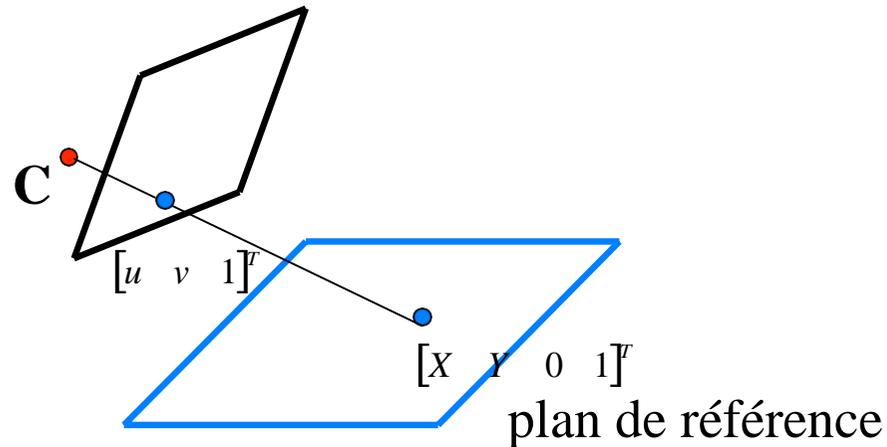
On sait mesurer

- La position sur un plan
- La hauteur
 - plus généralement, la distance entre deux plans parallèles

On dispose d'outils suffisants pour la modélisation 3D à partir d'une vue

Il reste cependant à calculer la matrice de projection de la caméra

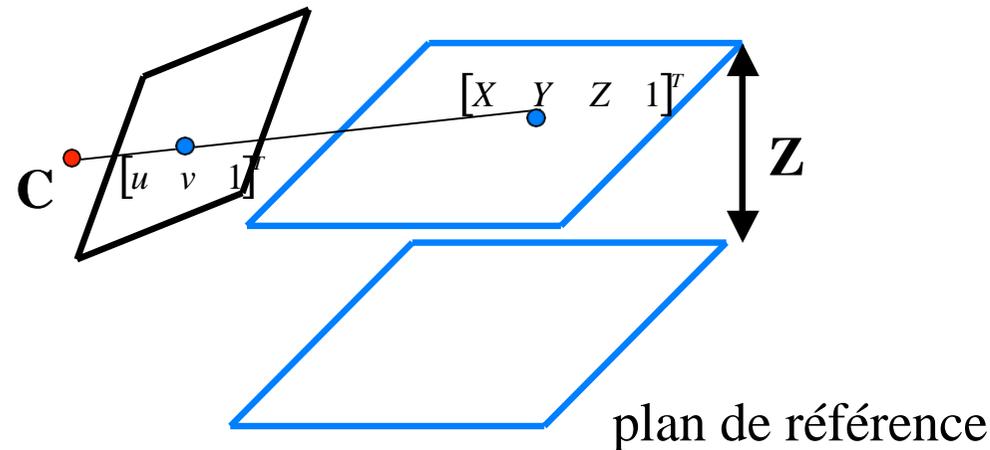
Mesures sur un plan de référence



Transformation perspective plane (*homographie*) \mathbf{H}

- \mathbf{H} transforme les coordonnées X-Y du plan en coords u-v de l'image
- Déterminée à partir de 4 points connus du plan du sol
 - Option A: mesurer physiquement 4 points du sol
 - Option B: trouver un carré, deviner sa taille
 - Option C: Noter $\mathbf{H} = [\mathbf{a}\mathbf{v}_x \ \mathbf{b}\mathbf{v}_y \ \mathbf{I}]$ (colonnes 1,2,4 de $\mathbf{\Pi}$)
 - » jouer avec les facteurs a et b jusqu'à ce que ça ait l'air correct
- Étant donné u-v, on peut calculer X-Y par \mathbf{H}^{-1}

Mesures sur un plan parallèle



Transformation perspective plane (*homographie*) \mathbf{H}_Z

- \mathbf{H}_Z transforme les coordonnées X-Y du plan en coords u-v de l'image

$$\mathbf{H}_Z = \begin{bmatrix} a\mathbf{v}_X & b\mathbf{v}_Y & !Z\mathbf{v}_Z + 1 \end{bmatrix}$$

- Étant donnés u-v, on peut calculer X-Y par \mathbf{H}_Z^{-1}
- Autre technique, transformer d'abord le plan parallèle vers le plan de référence :
 - plans parallèles reliés par une *homologie* (homog. à 5 paramètres)
 - $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_Z \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{I} + \alpha Z \mathbf{v}_Z^T \mathbf{I}$
 - va des coords u-v du plan parallèle vers les coords u-v du plan de ref.

Points de fuite et matrice de projection

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{D} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{v}_X$ (X point de fuite)
- de la même manière, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_Y$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_Z$
- $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T =$ projection de l'origine du monde

on choisit $\mathbf{v}_4 = \frac{\mathbf{v}_X \times \mathbf{v}_Y}{\|\mathbf{v}_X \times \mathbf{v}_Y\|}$, qu'on appelle \mathbf{l}

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_X & \mathbf{v}_Y & \mathbf{v}_Z & \mathbf{l} \end{bmatrix}$$

Pas si vite ! On connaît les \mathbf{v} à un facteur d'échelle

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a\mathbf{v}_X & b\mathbf{v}_Y & c\mathbf{v}_Z & \mathbf{l} \end{bmatrix}$$

- Déterminée complètement à partir de 3 longueurs de référence

Single View Metrology

A. Criminisi, I. Reid and A. Zisserman (ICCV 99)

Mesures dans la scène à partir d'une seule image

- Application: 3D à partir d'une image

Suppositions

- 1 3 ensembles orthogonaux de droites parallèles
- 2 4 points connus sur le sol
- 3 1 hauteur dans la scène

On peut obtenir une *reconstruction affine* sans 2 et 3

Criminisi et al., ICCV 99

Approche complète

- Charger une image
- Cliquer des droites parallèles définissant les directions X Y Z
- Calculer les points de fuite
- Indiquer des points sur le plan de ref. et une hauteur de ref.
- Calculer les positions 3D de plusieurs points
- Créer un modèle 3D à partir de ces points
- Extraire des cartes de texture
- Écrire un modèle VRML

Modèle 3D à partir d'une photographie



<http://www.robots.ox.ac.uk/~vgg/projects/SingleView/>

Modèle 3D à partir d'une photographie



Coniques

Conique (= courbe quadratique)

- Définie par une équation matricielle

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

- Peut aussi être définie en utilisant des birapports de droites
- “Conservée” par les transformations projectives
 - L'homographie d'un cercle est...
 - Version 3D : les surfaces quadriques sont conservées
- D'autres propriétés intéressantes
(Sec. 23.6 de Mundy/Zisserman)
 - Tangence
 - Droites bipolaires
 - Silhouettes