

# *Théorie de l'Elasticité*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

E-mail: [abdellatif\\_megnounif@yahoo.fr](mailto:abdellatif_megnounif@yahoo.fr)

**Chap. 1**

**Introduction**

# OBJECTIFS

**Ce cours est destiné à aider les futurs ingénieurs et mastérants à poser les différentes équations régissant un problème de mécanique en général en considérant un milieu continu élastique isotrope et linéaire. A la fin du cours, les étudiants seront capables de:**

- ❖ Pouvoir définir les équations d'équilibre dans le cas de forces extérieures de volume et de surface à partir des composantes des contraintes .**
- ❖ Pouvoir définir les équations de compatibilité à partir des composantes de déformations.**
- ❖ Pouvoir définir les équations liant les composantes de contraintes aux composantes de déformations.**
- ❖ D'appliquer les différentes équations de l'élasticité à des cas simples tels que l'élasticité classique.**
- ❖ De définir et de décrire les méthodes de résolution de l'élasticité en déplacements ou bien en contraintes.**
- ❖ D'appliquer les équations des milieux continus au cas des problèmes plans.**

# STRUCTURE DU COURS

## Première Partie: Elasticité Tridimensionnelle

### 1. Introduction

- Historique.
- Hypothèses.
- Classification des corps

### 2. La théorie des contraintes.

- Introduction.
- Principe de la coupe.
- Notations et conventions de signes.
- Réciprocité des contraintes tangentielles.
- Equations d'équilibre ou équations de mouvement
- Conditions aux limites d'un tenseur de contraintes
- Composantes de contrainte en un point
- Contraintes principales.

- Tenseurs sphérique/déviatorique.
- Représentation des contraintes. Octaédriques, tricerple, ellipsoïde.

### 3. Les déformations

- Description des mouvements d'un MC.
- Définitions et Notations.
- Définition de la déformation.
- Composantes de déformations.
- Tenseur de déformation.
- Tenseur de rotation.
- Equations de compatibilité.
- Dilatation volumique
- Ellipsoïde des déformations.
- Applications.

## 4. Relations Physiques entre Contraintes et Déformations

- Introduction.
- Comportement d'une structure.
- Solides élastiques linéaires – Loi de Hooke
- Loi de Hooke sous forme volumique.
- Loi de Hooke sous forme de Lamé.
- Loi de Hooke sous la forme la plus générale.
- Notation matricielle : Loi de Hooke pour les solides élastiques linéaires.
- Relations entre tenseurs déviatoriques des contraintes et des déformations.
- Influence de la température.
- Lois de comportement ou lois contraintes déformations des milieux continus.
- Applications
- Extension simple
- Flexion pure d'une poutre
- Torsion d'un cylindre à section circulaire.

## 5. Equations Générales de l'Elasticité

- Généralités
- Récapitulatif des principales équations de la théorie d'élasticité.
- Equations de l'étude statique (Navier)
- Equations de l'étude géométrique.
- Equations de l'étude physique.
- Résolution des équations de l'élasticité en déplacements (Solution de Lamé).
- Résolution des équations de l'élasticité en contraintes (Solution de Beltrami-Michel)
- Notation indicielle des équations de Lamé et de Beltrami-Michel.

# STRUCTURE DU COURS

## Deuxième Partie: Elasticité Plane

### 6. Elasticité plane en coordonnées cartésiennes

- Déformation plane.
- Contrainte plane.
- Equations fondamentales exprimées en déplacements.
- Equations fondamentales exprimées en contraintes.
- Fonction de contraintes ou Fonction d'Airy
- Solution du problème plan par les polynômes

# BIBLIOGRAPHIE

1. S. Timoshenko, « **Théorie de l'élasticité** », Mc Graw Hill, 1959.
2. J. Courbon, « **Résistance des Matériaux II** » Dunod 1971.
3. C. T. Wang, « **Applied Elasticity** » Mc Graw Hill 1953.
4. Y. Bamberger, « **Mécanique de l'ingénieur I. Milieux déformables** » Herman 1981.
5. A. Megnounif & M. Djafour, « **Elasticité Générale** », OPU 1994.
6. Salomoh, « **Elasticité linéaire** », Masson et Cte
7. Caignart & J. P Henry , « **Exercices de l'élasticité** » Ed Dunod.
8. S. Forest et al. **Mécanique des Milieux Continus**, Cours de école des mines Paris, 2007-2008
9. M. Maya, **Cours de Mécanique des Milieux Continus**, École nationale supérieures des arts et métiers, 2005-2006
10. Germain P, « **Mécanique des milieux continus** » Masson et , 1962.
11. François D et al, « **Comportement mécanique des matériaux** », (Cote LR 06.37)



# 1 Historique

La théorie d'élasticité est l'étude mathématique des **milieux continus homogènes isotropes et parfaitement élastiques**.

On considère les parties de milieu déformable de forme quelconque mais dont la structure est considérée comme continu.

Sous l'action de forces **extérieures**, une structure se **déforme** et les déformations produites si elles sont petites ne dépassent pas une certaine limite bien définie.

Le corps est dit **parfaitement élastique**, si les déformations disparaissent après enlèvement de la charge extérieure.

# Historique

Cette partie de l'histoire a été traduite du du livre « A treatise on the mathematical theory of elasticity » de A. E. H. Love

**Le développement de la théorie d'élasticité à travers le temps est du essentiellement à deux (02) phénomènes importants:**

- a) Le progrès qu'a connu le monde de l'expérimentation sur le comportement des corps en déformations.**
- b) Le développement rapide des théories mathématiques qui ont permis de passer des principes physiques aux méthodes analytiques.**

# Historique

Tout a commencé par l'étude de Galilei Galileo qui, en 1638 pour la 1<sup>ère</sup> fois a considéré la nature de la résistance des solides à la rupture. Bien qu'on a traité les solides comme corps inélastiques, son idée a largement servi comme point de départ pour les futurs chercheurs.

**Expérience de Galileo:** résistance d'une poutre dont une extrémité est encastree dans un mur, sous l'action de son poids propre ou bien d'un poids quelconque.

Il constata que la poutre tournait autour d'un axe perpendiculaire à sa longueur et appartenant au mur.



# Historique

**Après Galileo, les 02 plus grandes découvertes qui ont beaucoup contribué au développement de la théorie de l'élasticité:**

- a) La découverte de la Loi de HOOKE en 1660**
- b) La formulation des équations générales par NAVIER en 1821 qui permettaient de réduire tous les problèmes des petites déformations des corps élastiques en un calcul mathématique.**

# Historique

La loi de Hooke découverte en 1660 fut publiée en 1678 traduisant la proportionnalité entre les contraintes et les déformations.

En 1680, MARIOTTE essaya de reprendre le problème de Galileo en tenant compte de la loi de Hooke.

Il remarqua que la résistance de la poutre à la flexion se traduit par la compression (de moitié) et la traction (de moitié) de ses filaments longitudinaux. C'est le principe de **l'axe neutre**.

# Historique

Entre la loi de Hooke (1660) et les équations de Navier (1821), les chercheurs se sont surtout intéressés à la solution et l'extension du problème de Galileo et sur les théories de vibration des barres et plaques ainsi que sur la stabilité des poteaux.

En 1705 expérience de James BERNOULLI: a conclu que la résistance à la flexion des poutres n'est autre qu'un couple proportionnel à la courbure.

EULER avait supposé ce résultat par la suite dans ces travaux. C'est **l'équation de la ligne élastique**.

En considérant que le travail fourni en flexion est proportionnel au carré de la courbure et en le minimisant, EULER a abouti à l'équation différentielle de la poutre en flexion et les différentes formes qu'elle prend



# Historique

D'autres recherches l'ont conduit à la détermination de la longueur minimale d'un poteau en état de flexion sous son poids propre ou un poids quelconque. EULER et BERNOULLI ont conclu que pour de petites longueurs le poteau est comprimé, tandis que pour des longueurs importantes il est fléchi. C'est le début de la **théorie de stabilité**.

En 1776, COULOMB a étudié la flexion des poutres à petites sections pour déterminer de façon exacte la position de l'axe neutre.

C'est aussi COULOMB qui pour la 1<sup>ère</sup> fois a fait introduire la notion de cisaillement lors de son étude de la torsion des poutres. Son idée, il a relié ce type de déformation à la rupture et ne l'a pas considéré comme déformation élastique.

# Historique

**Ce n'est que par la suite que Thomas YOUNG a défini le cisaillement comme déformation élastique. Il a pu différencier entre la résistance au cisaillement et la résistance à la traction/compression, mais n'a pas pu introduire un module au cisaillement comme l'a fait pour la traction/compression.**

**En parallèle, en 1751, Euler et Bernoulli ont obtenu les équations différentielles de vibrations latérales des barres en faisant varier les fonctions énergétiques**



# Historique

La période entre 1638 et 1821 a été considérée par les historiens de ce domaine comme étant la première période de l'histoire de notre science. Après cette période, c'est la période de généralisation.

En résumé, en 1820 on avait:

- a) Une théorie de flexion inadéquate**
- b) Une théorie de torsion complètement fausse**
- c) Une théorie de vibration des barres et plaques non poussée**
- d) La définition du module de Young.**

# Historique

**Bien que ces découvertes apparaissent minimales, elles étaient d'un grand apport pour le développement rapide de la théorie d'élasticité.**

**La distinction entre une extension et un cisaillement était à l'origine de la théorie générale de déformation.**

**La transformation d'une force distribuée sur une section en une résultante était la base de la théorie des contraintes.**

**L'utilisation des équations différentielles pour l'étude de la flexion et de la vibration des barres a conduit aux équations différentielles en déplacements...**

# Historique

**C'est qu'à partir de 1820 que les travaux ont été conduits dans le but de découvrir des lois générales traduisant les phénomènes physiques réels et aussi dans le but de trouver des processus analytiques de résolution.**

**En 1821, en partant de la conception Newtonienne concernant la constitution des corps et en supposant que les réactions sont dues aux forces intermoléculaires, elles mêmes dues au changement de la configuration moléculaire, NAVIER a pu définir l'équation du mouvement.**

**Sa méthode a permis d'exprimer l'équation de mouvement de la molécule ou point matériel.**

# Historique

En 1822, CAUCHY a découvert les plus grandes lignes de la théorie pure de l'élasticité. Il a introduit la notion de contrainte en un point exprimée comme étant une traction par unité de surface.

Il a montré que la contrainte peut s'exprimer en fonction de six (06) composantes de contraintes ou en fonction de 03 contraintes normales appelées contraintes principales.

Il a aussi montré que la déformation en un point n'est autre que la résultante de 06 composantes de déformation ou bien de 03 déformations appelées principales.

Il a ensuite déterminé les **équations d'équilibre** où les composantes de contraintes sont reliées aux forces distribuées sur le volume.

# Historique

Enfin pour aboutir à la relation contrainte-déformation, il a éliminé les composantes de contraintes des équations d'équilibre et a obtenu des équations exprimées en déplacements. Cette relation l'a obtenu en considérant 02 hypothèses fondamentales:

- a) Les relations contraintes déformations sont linéaires**
- b) Les plans principaux de contraintes sont normaux aux axes principaux de déformations.**

Les équations obtenues sont maintenant les seules équations valables pour les corps solides isotropes.

# Historique

Les équations de Cauchy diffèrent de celles de Navier par le nombre de constante utilisée. Navier a utilisé une seule constante ( $E$ ) alors que Cauchy a utilisé 02 constantes ( $E$  et  $\nu$ ).

En 1837 GREEN a généralisé ces équations pour obtenir les équations les plus générales qu'on connaît aujourd'hui qui comportent 21 constantes.

Après plusieurs tentatives, POISSON a défini de façon définitive le rapport de la compression latérale sur l'extension longitudinale d'une barre soumise à la traction pure comme étant le coefficient de Poisson.

# Historique

**En 1863 AIRY a utilisé une autre méthode pour déterminer la distribution des contraintes dans un corps bidimensionnel. Il a constaté que les équations d'équilibre planes peuvent être combinées pour aboutir à une seule équation différentielle dont la variable est une fonction appelée fonction d'Airy.**

**En 1870 MAXWELL a appliqué la solution d'Airy au cas tridimensionnel mais la procédure était beaucoup plus compliquée.**

# Historique

Après la formulation des équations générales de l'élasticité une attention très particulière a été réservée aux problèmes des plaques et coques.

En 1822 Poisson et Cauchy ont formulé les équations différentielles en fonction du déplacement transversal/

En 1850 Kirchhoff critiqua les conditions aux limites de Poisson en supposant:

- a) Les filaments linéaires de la plaque qui initialement sont normaux à la surface moyenne restent droits et normaux à cette surface après déformation.
- b) La longueur de la surface moyenne reste constante avant et après déformation.



# Historique

**En 1874, H. ARON a traité pour la 1<sup>ère</sup> fois le problème des plaques courbes et des coques.**

**En 1882 L. RAYLEIGH, en supposant que la surface moyenne 'une coque en vibration reste indéformable, a pu déterminé le type de déplacement de n'importe quel point de cette surface.**

**En 1888 l'application de la méthode de Kirchhoff a conduit à une expression de l'énergie potentielle et à des équations d'équilibre et de conditions aux limites non vérifiées par la méthode de Rayleigh.**

# Historique

## En conclusion:

**L'historique de la théorie d'élasticité montre clairement que le développement de cette théorie est passé par deux étapes importantes. Il s'agit des étapes de l'avant et de l'après découverte des équations générales par Navier.**

**Actuellement, les solutions de la majorité des problèmes rencontrés sont connues et les méthodes numériques découvertes récemment avec le développement de l'outil informatique viennent que confirmer ces solutions.**

# Historique

# Résumé

Now: Méthodes numériques

1870: Maxwell: Application d'Airy pour le 3D.

1863: Airy: Notion de fonction de contraintes ou fonction d'Airy pour pb Plans

Poisson: Coefficient comme rapport de compression latérale et extension longitudinale

1837: Green: Eqs d'équilibre de contraintes (à 21 cts)

1822: Cauchy: Eqs d'équilibre de contraintes (à 02 cts)

1821: Navier: Eqs de mouvements d'un point matériel

1776: Coulomb: Début du cisaillement

1751: Euler-Bernoulli: Eqs différentielles de vibration

1750: Euler: Eq. Ligne élastique

1705: Bernoulli: Flexion ppl à la courbure

1680: Mariotte: L'axe neutre

1660: Loi de Hooke

1638: Galilei Galileo: Résistance à la rupture

# 2. Structures, microstructures, nanostructures

Cette partie est prise du livre « Mécanique des Milieux Continus » S. Forest, M. Amestoy, S. Cantournet, G. Damamme, S. Kruch & V. Maurel. Ecole des mines Paris

## Structures.

A proprement parler. Structures de génie civil, composantes et pièces industriels...

En particulier, on s'intéresse à l'équilibre des structures pour connaître les charges qu'elles supportent.

Optimiser la forme et le type de matériau en minimisant le coût et l'impact sur l'environnement. C'est le rôle de l'élasticité.

## Microstructures.

Les MEMS (micro electro-mechanical systems). Représentent ces dernières années un domaine de la mécanique des milieux continus.

S'agit d'assurer une élaboration de précision (contraintes résiduelles) et de prévoir la tenue en service de composants de l'électronique (par ex) soumises à des sollicitations de fatigue thermomécaniques sévères.

## Structures

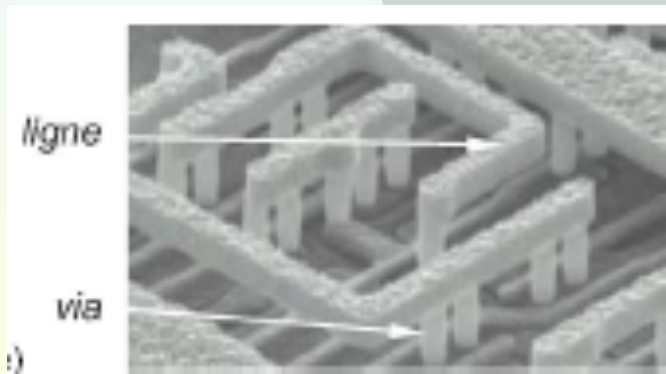


Pile du viaduc de Millau

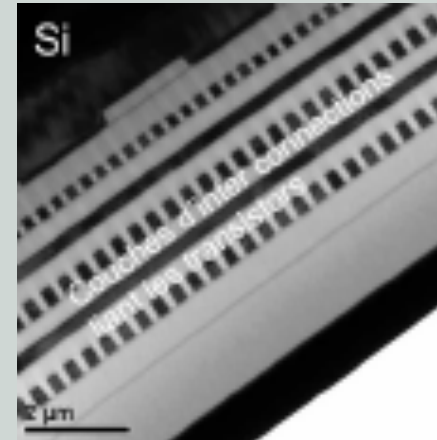


Aube de turbine haute pression de moteur d'avion

## Microstructures: Composant électronique



Réseau de connections en cuivre



Structure multicouche d'un microprocesseur

## Structures, microstructures, nanostructures (Suite)

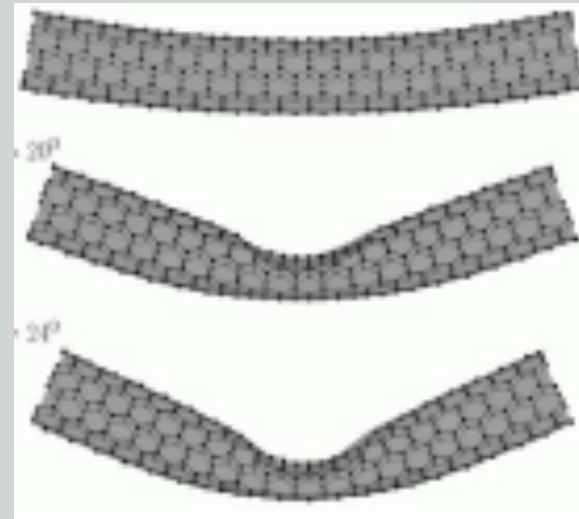
### Nanostructures.

C'est la **miniaturisation** de systèmes mécaniques.

Ex: les **nanotubes** de carbone (molécule géante) semblables à des **coques** en grandes transformations élastiques.



**NanoEngrenages en polysilicium**  
(diam des engrenages =  $7\mu\text{m}$ )



déformation en flexion de  
nanotubes de carbone.

(les points désignent les atomes  
de carbone et les traits les  
liaisons covalentes)

# 3. Définitions

Milieu continu, milieu dans lequel les propriétés **physiques** (ex: la masse volumique, la pression, la température...) varient de façon **continue** d'un point à un autre et sont **dérivables**.

(hypothèse vraie à l'échelle **macroscopique**, fausse à l'échelle **moléculaire**)

De cela, les milieux diphasiques ou bien les mélanges tels que **eau-huile** seront exclus de cette MMC

02 points **voisins** P et Q à « t » restent voisins à un instant « t' ».

Si 02 points sont **distincts** restent distincts.

Il n y a **ni mélange ni faille** dans le milieu continu.

## Définitions (Suite)

Mathématiquement:

Coordonnées de «  $P_0$  »

$$\bar{x}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \quad \text{à } t = 0$$

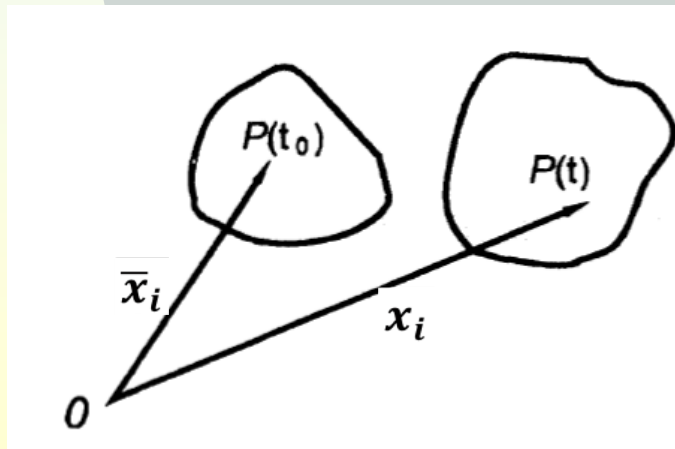
$$x_i(x_1, x_2, x_3) \quad \text{à } t$$

Le passage de la position initiale «  $P_0$  » à la position finale «  $P$  » est appelé **transformation du milieu continu**

L'hypothèse de continuité implique que les fonctions

$$\bar{x}_i \quad \text{et} \quad x_i$$

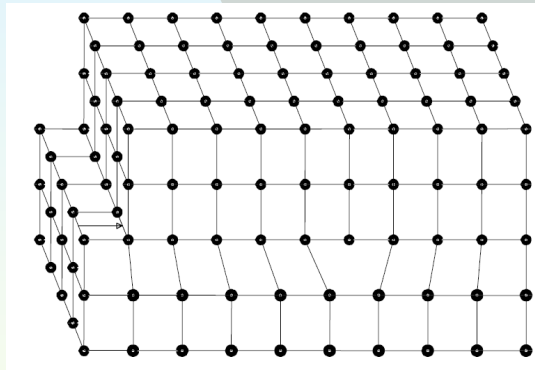
et leurs dérivées premières soient **continues et uniformes**



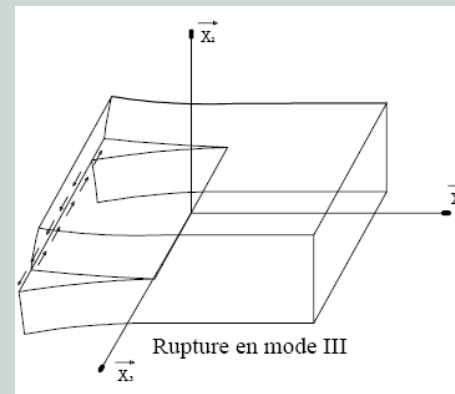
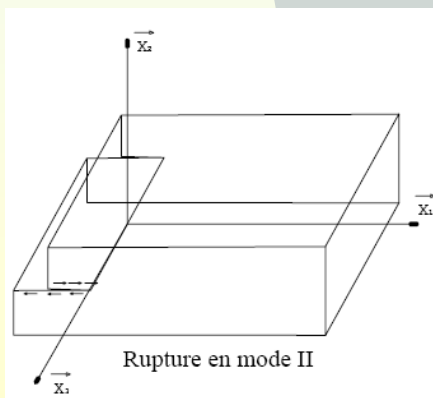
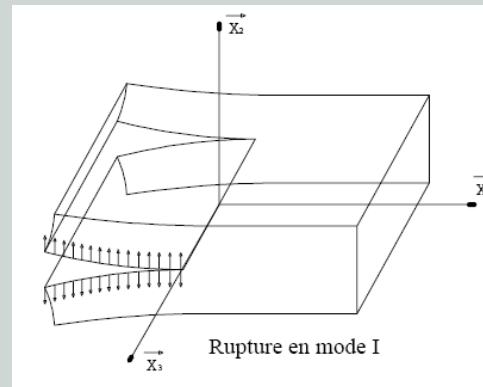


## Définitions (Suite)

- ❖ L'hypothèse de continuité touche aussi la transformation qui va être traduite par le fait que les fonctions scalaires du champ vectoriel doivent être des fonctions continues des variables d'espaces et de temps.
- ❖ L'élasticité exclut donc les transformations discontinues telles que la dislocation métallurgique, les phénomènes de cavitation dans les écoulements de domaine fluide ou bien les domaines fissurés.



**Dislocation Coin**



**Cas qui peuvent être traités en considérant la notion de continuité par sous domaines.**

# Domaine d'étude

- ❖ L'élasticité normalement applicable à tous les types de domaines matériels.
- ❖ En particulier aux corps solides et aux fluides (liquide et gaz).
- ❖ La distinction entre ces états n'est pas évidente.

## Quelques questionnements pour définir les états

- ❖ Quelle est la frontière entre un solide plus ou moins mou et un liquide plus ou moins visqueux?
  - ❖ Le sable est –il un solide ou un fluide?
  - ❖ Certaines peintures ont un comportement solide mais après brassage deviennent fluides.
  - ❖ Le verre est un solide à notre échelle de temps, mais avec les siècles, on constate que c'est un liquide à très forte viscosité.
  - ❖ Le yaourt est un fluide à mémoire
  - ❖ Etc...
- 
- ❖ La détermination de l'état n'est pas simple. Ça dépend de plusieurs paramètres (pression, température, temps...)

# 4. Hypothèses fondamentales de l'élasticité

## 1 Continuité

C'est un milieu dans lequel les propriétés physiques varient de façon continue d'un point à un autre.

## 2 Homogénéité

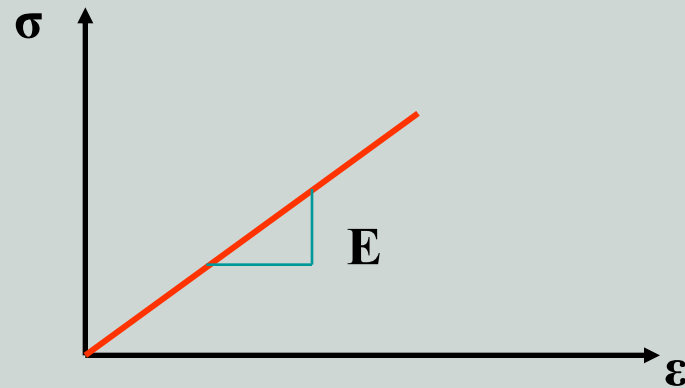
Milieu homogène s'il possède les mêmes propriétés physiques en n'importe quel point. (masse volumique, densité...)

## 3 Isotropie

Milieu isotrope s'il possède les mêmes propriétés élastiques ( $E$  et  $\nu$ ) en n'importe quelle direction. Généralement assurée qu'à l'échelle macroscopique.

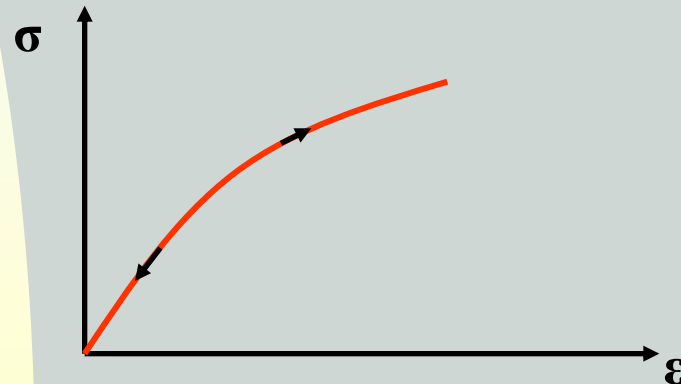
## 4 Linéarité

Relations contraintes – déformations linéaires



## 5 Élasticité

Les contraintes s'annulent avec les déformations



# 5. Classification des corps

Selon la dimension

## 1 Corps unidimensionnels

Comme les câbles, les barres, les poutres, les ressorts...

## 2 Corps à 02 dimensions

Comme les membranes, les plaques, les dalles et les coques minces, voiles minces...

## 3 Corps à 03 dimensions

Barrages, murs de soutènement, les fondations.  
Corps dont les 03 dimensions sont importantes.

**Merci. Fin du chapitre 1**

# *Théorie de l'Elasticité*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

**Prochain Cours**

**Chap. 2**

**Théorie des  
Contraintes**