

# *Théorie de l'Elasticité*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

**Chap. 2**

## **La théorie des contraintes**

# Introduction

## Forces extérieures et intérieures

**Efforts  
extérieurs**

**Efforts  
intérieurs**

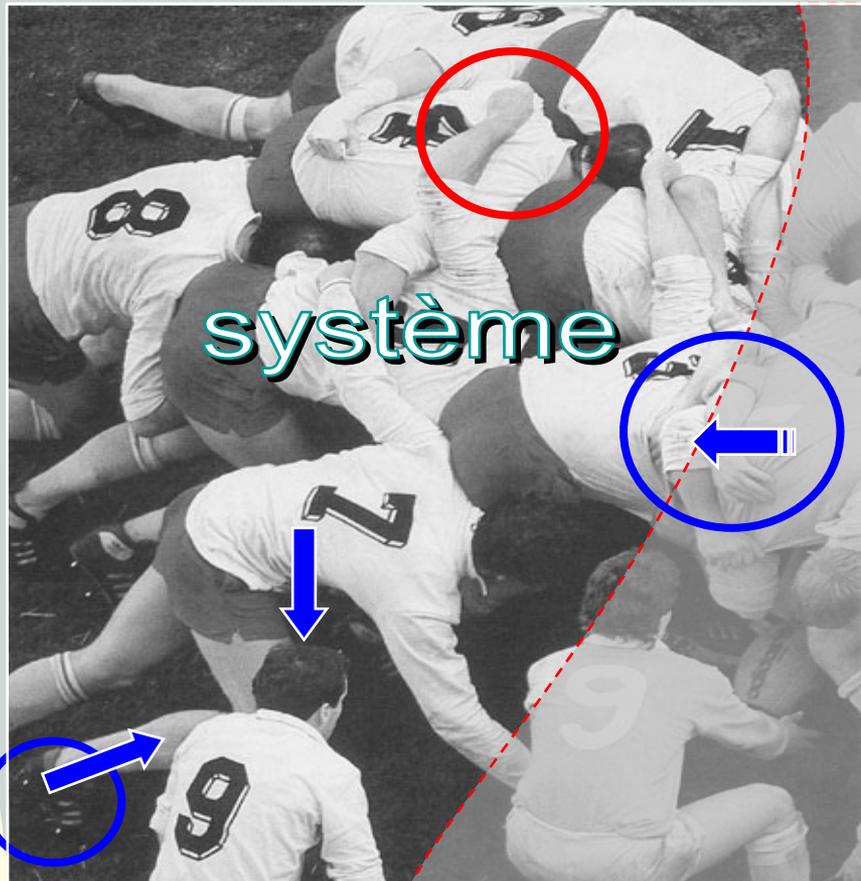
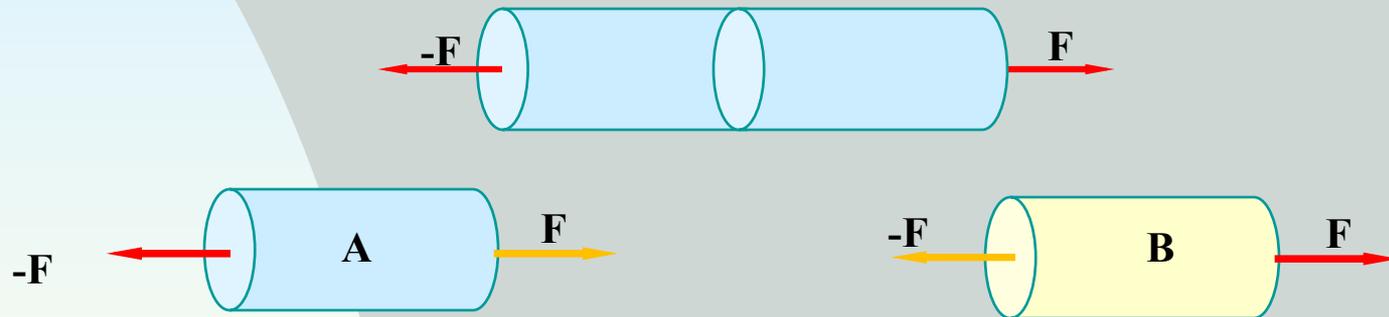


Photo extraite  
de *Le Rugby*  
P. VILLEPREUX  
Cours de J.Salençon  
Polytechnique

# 1. Principe de la Coupe

## 2.1 Forces internes. Action-réaction

- ❖ Si on considère un milieu de section constante et on lui applique une coupe qlq pour le diviser en 02 parties « A » et « B ».



L'action de « A » sur « B » est notée  $F(A/B)$

L'action de « B » sur « A » est notée  $F(B/A)$

Alors:

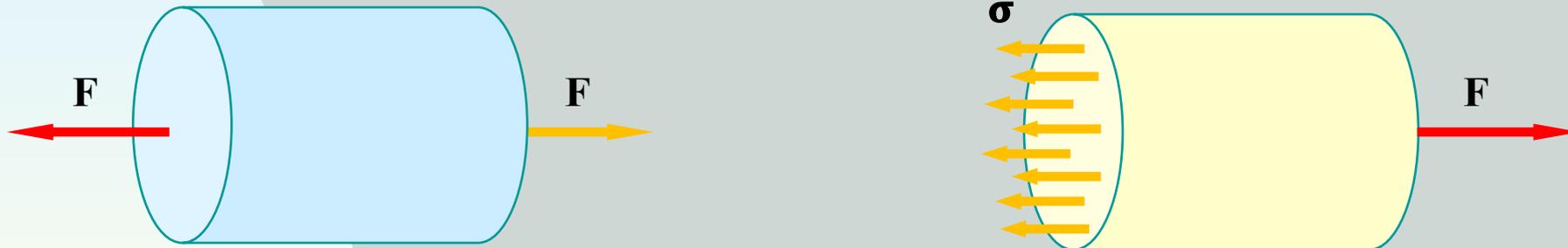
$$F(A/B) = - F(B/A) \quad (2.1)$$

La résultante des forces internes est toujours nulle.

## Principe de la coupe (suite)

### 2.2 Forces internes. Répartition homogène

- ❖ Le milieu est divisé en 02 parties et l'effort interne est supposé uniforme



Le vecteur « $\sigma$ » représente la résultante des efforts internes.  
On peut l'exprimer par unité de surface. C'est une contrainte

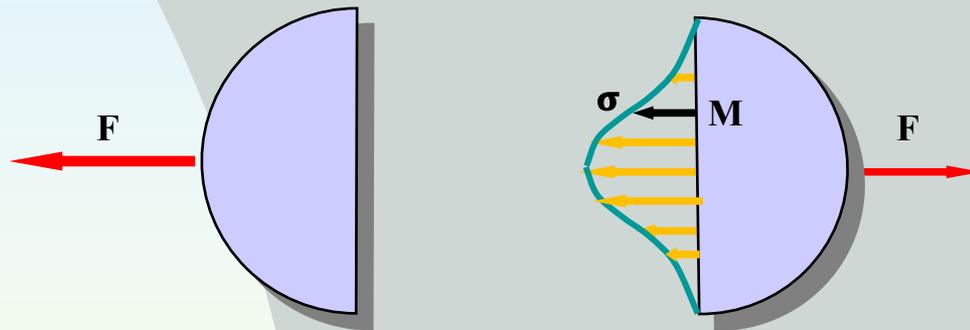
$$\sigma = F/S \quad (2.2)$$

Il est indépendant du point de la surface

## Principe de la coupe (suite)

### 2.3 Forces internes. Répartition non homogène

- ❖ Le milieu est divisé en 02 parties et l'effort interne est supposé non uniforme



La répartition n'étant pas homogène, Le vecteur contrainte dépend du point M de la section droite.

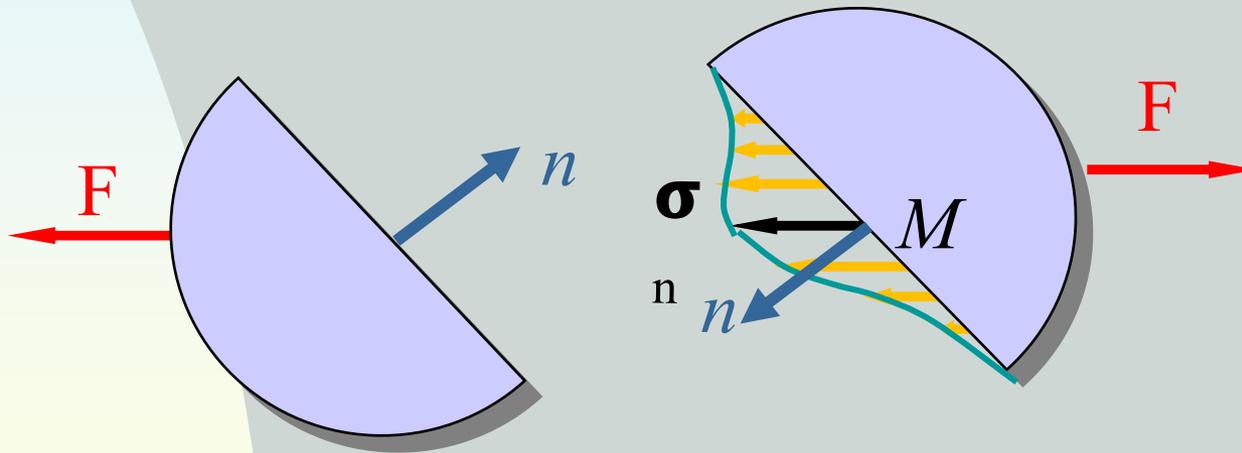
$$\vec{F} = \iint_S \vec{\sigma}(M) dS \quad (2.3)$$

## Principe de la coupe (suite)

### 2.4 Vecteur contrainte

- ❖ Le milieu est divisé en 02 parties et l'effort interne est supposé non uniforme

La répartition n'étant pas homogène, Le vecteur contrainte dépend du point M de la section droite.

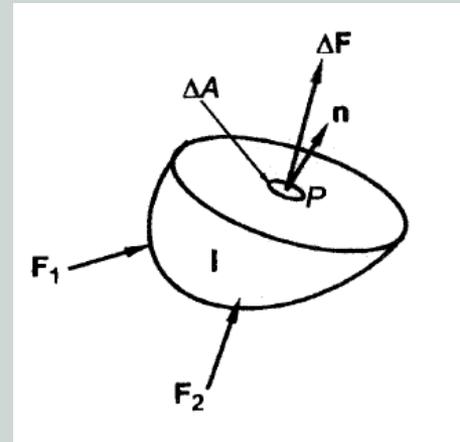
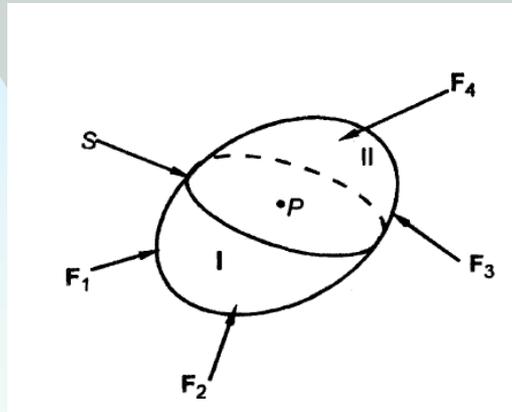


Le vecteur contrainte dépend du point M de la surface et de l'orientation de la section de coupe définie par sa normale.

$$\vec{F} = \iint_S \vec{\sigma}_n(M, \vec{n}) dS \quad (2.4)$$

## Principe de la coupe (suite)

Dans un cas général, considérons le milieu que l'on a divisé en 02 parties (I) et (II).



La contrainte au point « P », appartenant au plan est définie par:

$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2.5)$$

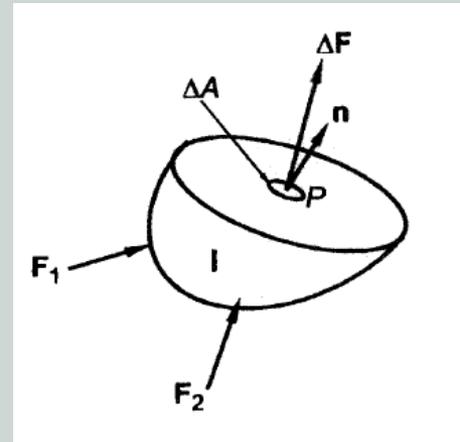
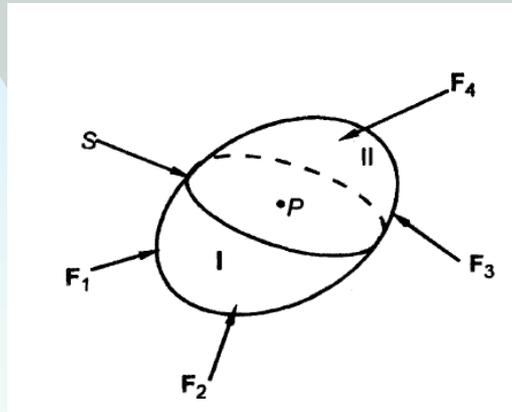
Appelée vecteur **contrainte de Cauchy**

Si on considère l'action de « I » sur « II » par principe de l'action et de la réaction, on aura:

$$\sigma_n = -\sigma_{-n} \quad (2.6)$$

## Principe de la coupe (suite)

Si « S » est une surface (au lieu d'un plan) passant par « P », alors le vecteur contrainte de Cauchy sera défini par:



La contrainte de Cauchy au point « P », est définie par:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} \quad (2.7)$$

Où:  $\Delta \mathbf{F}$ : force résultante sur l'élément de surface  $\Delta S$

## Principe de la coupe (suite)

### Principe de la contrainte de Cauchy

*La grandeur des forces intérieures réparties sur la surface de la coupe est définie par leur intensité.*

L'intensité représente la quantité des forces agissant sur l'unité de surface.

Lorsqu'il s'agit d'efforts internes (comme l'effort normal, l'effort tranchant, le moment flechissant,...) (par surface) cette intensité s'appelle **Contrainte**.

Par définition:

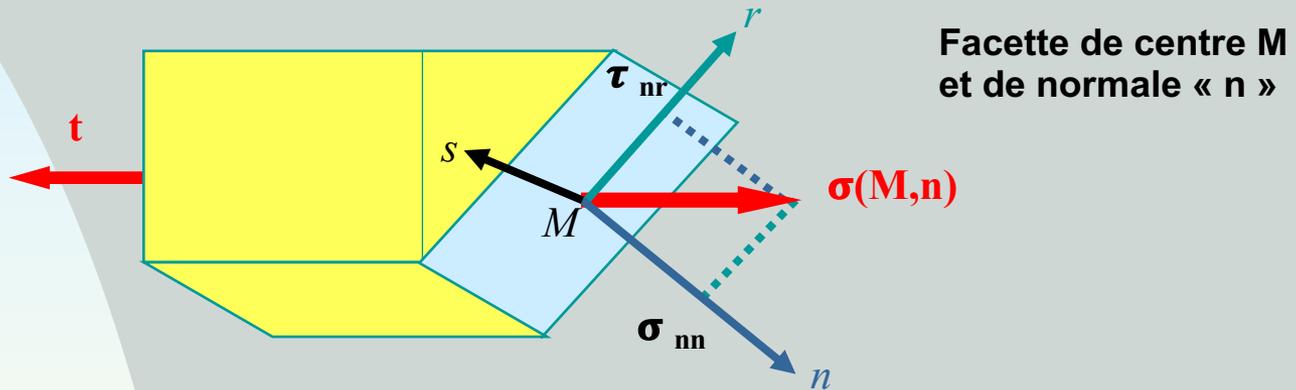
**Une contrainte est une distribution d'efforts internes par unité de surface.**



## Principe de la coupe (suite)

### Contrainte normale et tangentielle

Le vecteur contrainte peut être décomposé en deux parties: une normale et une tangentielle.



$n, r$  et  $t$  sont coplanaires

Trièdre local **direct**  $n, r, s$

$$\sigma_{nn} = \sigma \cdot n \quad \text{Traction} > 0 \quad \text{Compression} < 0$$

$$\tau_{nr} = \sigma \cdot r \quad \text{Cisaillement}$$

$$\tau_{ns} = \sigma \cdot s = 0$$

Contrainte normale

1<sup>ère</sup> Contrainte tangentielle

2<sup>ème</sup> Contrainte tangentielle

$$\sigma_n = \vec{\sigma}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

(2.8)

$$\vec{\tau}_{nr} = \vec{n} \wedge \vec{\sigma}(M, \vec{n}) \wedge \vec{n} = \vec{\sigma}(M, \vec{n}) - \sigma_n \vec{n}$$

# 2. Notations et Conventions de signes

Ceux de  
Timoshenko

## Forces extérieures

### 1 sollicitations appliquées sur la frontière

- ❖ Appelées **forces de surface** ( $\vec{f}_s$ ) : forces réparties par unité de surface qui s'appliquent sur tout ou partie de la surface extérieure du milieu. Elles ont pour composantes ( $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ ) exprimées par unité de surface.
- ❖ Elle a un module constant ou variable. Ex: la pression d'un liquide.
- ❖ Il peut arriver que sur une surface  $dS_e$  très petite s'applique une force

$$\vec{F}_s = \int_{dS_e} \vec{f}_s dS$$

de valeur finie. C'est la force **concentrée**

### 2 sollicitations appliquées au volume

- ❖ Appelées **forces de volume** ( $\vec{f}_v$ ) : appliquées en tout point du volume «  $dv$  » occupé par le milieu.
- ❖ Ces forces sont réparties par **unité de volume**. Exemple: la pesanteur, les forces d'accélération... Elle est notée par ( $X, Y$  et  $Z$ )
- ❖ De même on peut parler de force concentrée

$$\vec{F}_v = \int_{dv} \vec{f}_v dv$$

## 2. Notations et Conventions de signes

### Contraintes

#### Conventions de signes

«  $\sigma$  » désigne contrainte normale.  
L'indice représente la direction de la normale.

Ex:  $\sigma_y$  : contrainte normale suivant « y »

**Traction : «  $\sigma$  » > 0**

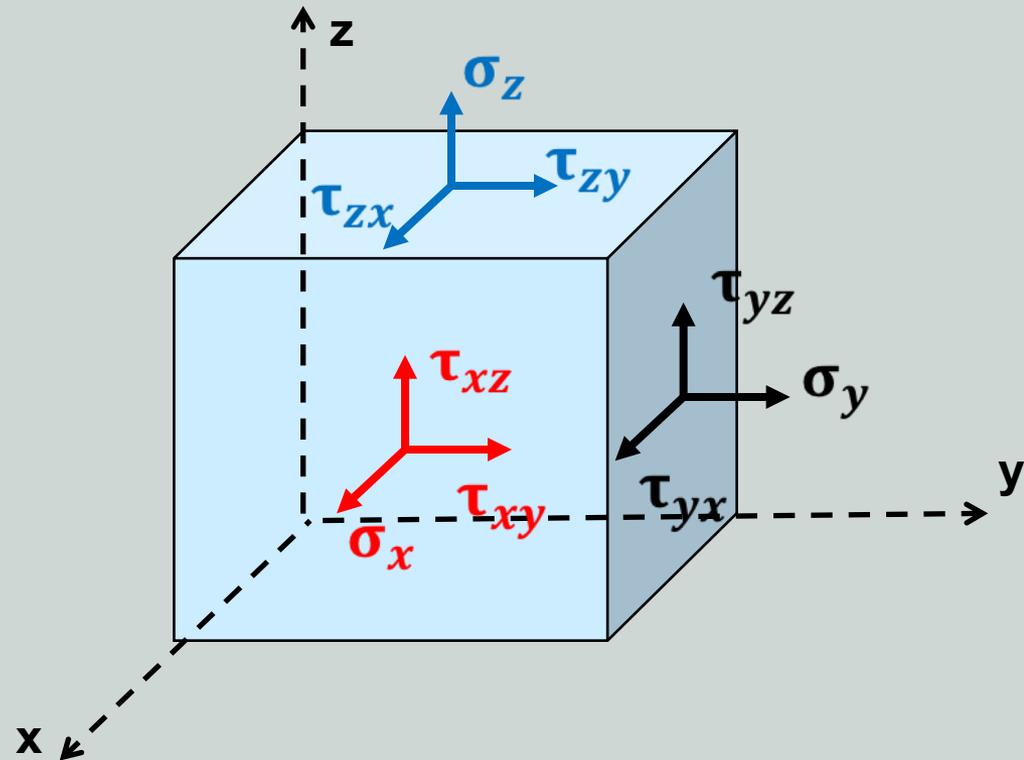
**Compression : «  $\sigma$  » < 0**

$\tau_{ij}$  : contrainte tangentielle.

« i » : direction de la normale de la face « j » direction de «  $\tau$  »

$\tau_{ij} > 0$  dans la direction positive de l'axe, si l'effort normale de traction est dans le sens positif de l'axe de la face.

Sinon, on inverse



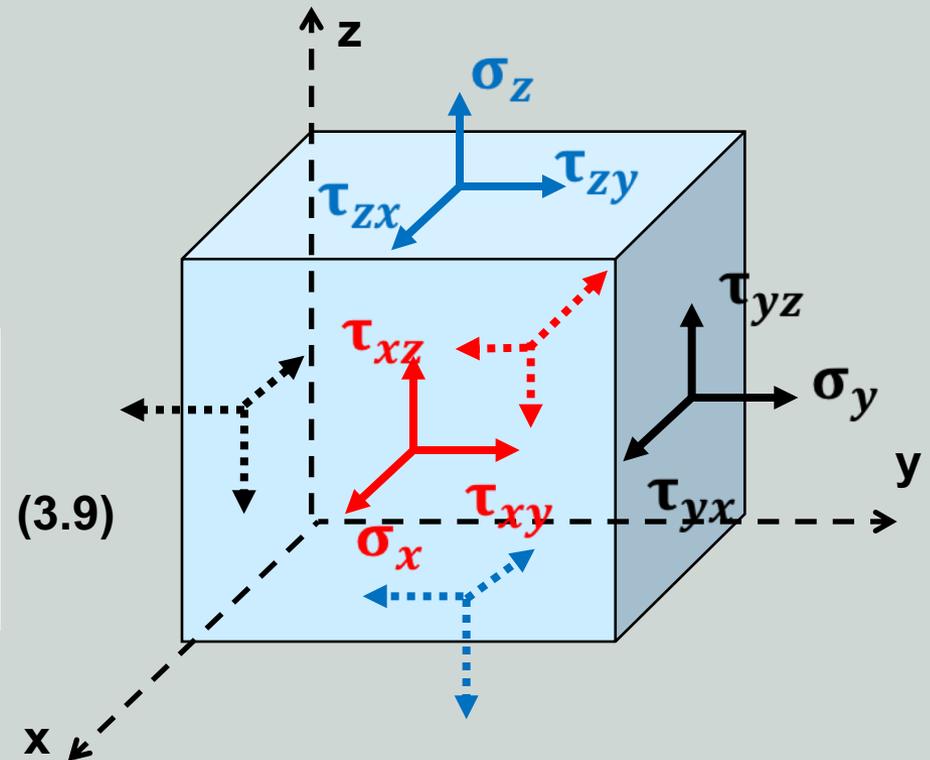
## 2. Notations et Conventions de signes

Avec toutes ces composantes, on aura dans un même point la distribution des contraintes suivantes (toutes sont positives)

On peut représenter es composantes sur une matrice:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

**Tenseur des contraintes**



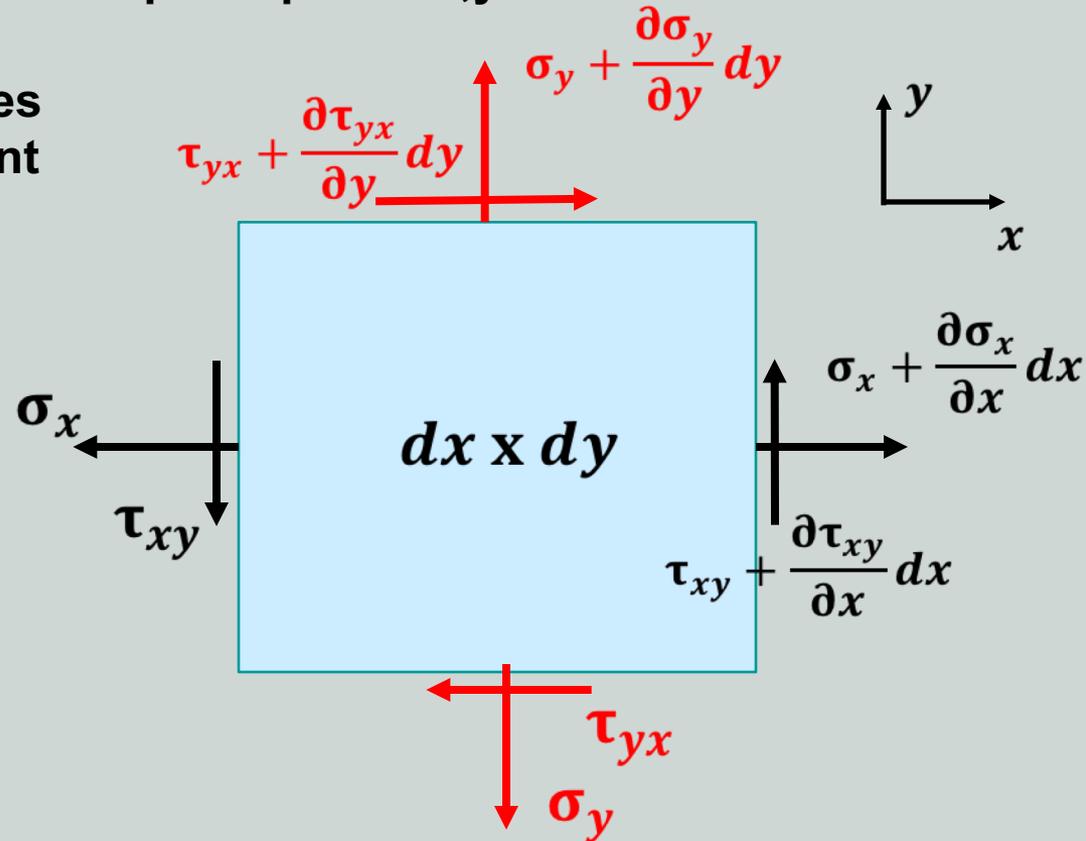
# 3. Réciprocité des contraintes tangentielles

On veut démontrer que le tenseur de contraintes est **symétrique**.

Considérons un plan quelconque. Exemple le plan « x,y »

Déterminons le moment de toutes les forces autour de l'axe passant par le centre et // à z.

$$\begin{aligned} & \tau_{xy} dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \\ & dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} \\ & - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \\ & dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned}$$



Toutes les autres composantes n'ont pas de moment suivant l'axe « z », y compris les composantes de la force de volume qui sont appliquées au centre.

### 3. Réciprocité des contraintes tangentielles

Ainsi

$$\tau_{xy} dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

Or les dimensions de l'éléments « dx, dy et dz » sont très petits, donc leurs carrés sont encore plus petits. On va négliger les carrés.

On aura

$$\tau_{xy} dx \cdot dy \cdot dz + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \left( \frac{dx^2}{2} \right) dy \cdot dz \right) - \tau_{yx} dx \cdot dy \cdot dz - \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx \cdot \left( \frac{dy^2}{2} \right) \cdot dz \right) = 0$$

Après simplification, on aura

$$\tau_{xy} dx \cdot dy \cdot dz - \tau_{yx} dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

Par simplification de l'élément de volume, on aura

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = 0$$

D'où:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  (2.10)

De façon similaire on peut démontrer :

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

(2.11)

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

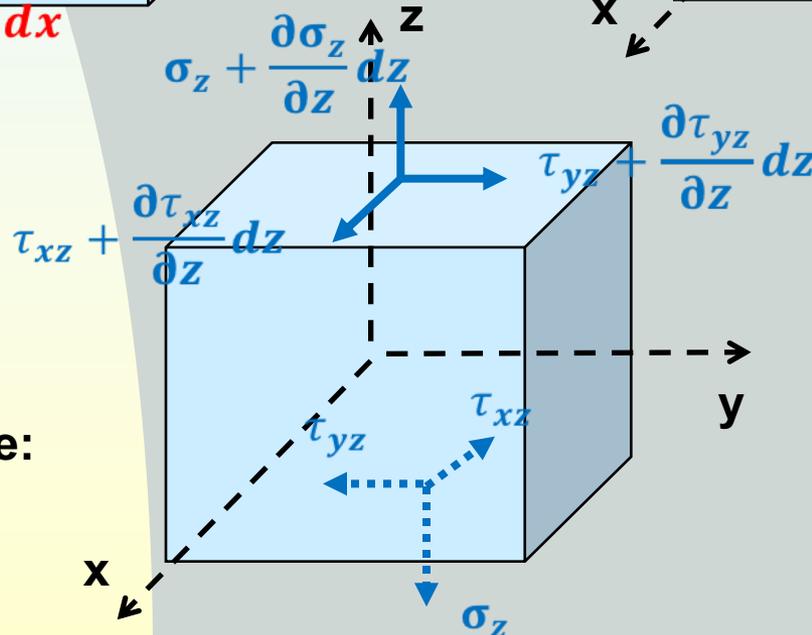
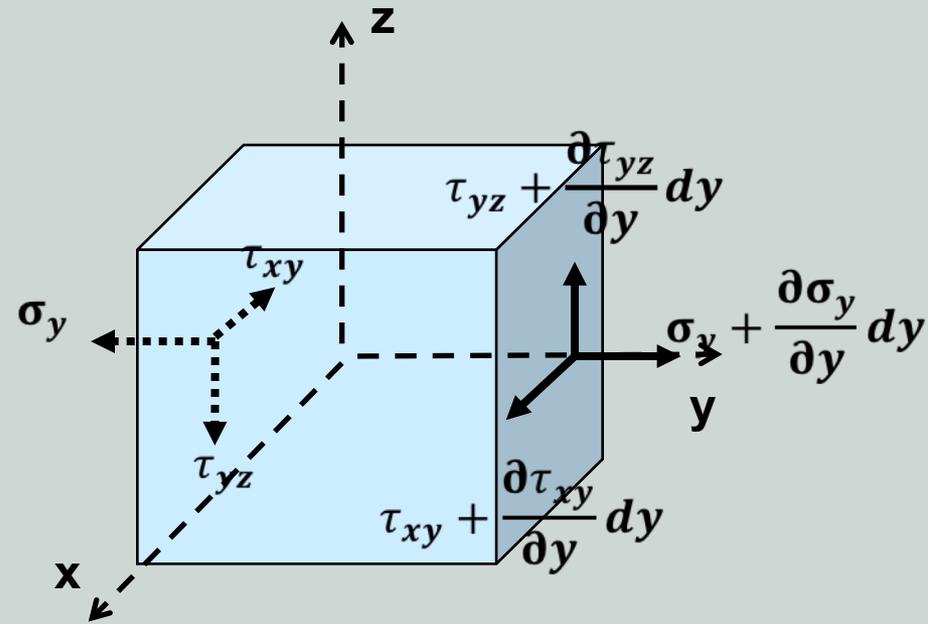
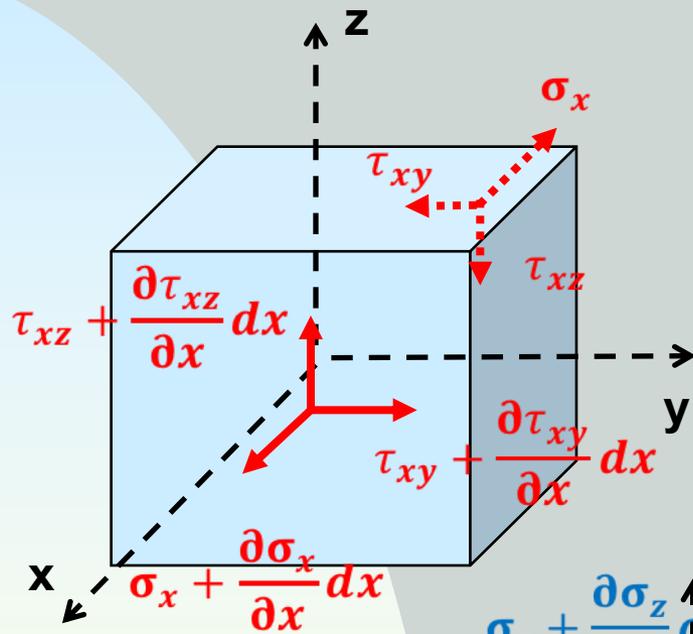
### 3. Réciprocité des contraintes tangentielles

Avec ces égalités, le tenseur des contraintes devient

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

**Tenseur des contraintes symétrique**

# 4. Equations du mouvement (Eq. Déséquilibre)



Composantes des forces de volume:  
X, Y et Z

Ces 03 cubes  
doivent représenter  
un seul point

## 4. Equations du mouvement (Eq. Déséquilibre)

Pour un petit élément on considère l'équilibre des forces suivant les 03 axes:

La force est obtenue en multipliant la contrainte avec la surface correspondante

Posons la force de volume (X,Y,Z).

Considérons comme exemple, l'équilibre suivant l'axe « x ». On aura:

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz \\ & - \tau_{xy} dx dz + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy + X \cdot dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz dx dy + X \cdot dx dy dz = 0 \quad (2.14)$$

L'élément de volume « dx dy dz » est différent de zéro, on peut simplifier pour obtenir la 1<sup>ère</sup> équation d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (2.15)$$

## 4. Equations du mouvement (Eq. Déquilibre)

De façon similaire, on peut obtenir les 02 autres équations en considérant l'équilibre suivant « y » et suivant « z ». On obtient:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0\end{aligned}\tag{2.25}$$

Soit

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\tag{2.26}$$

Les équations (2.25) ou (2.26) sont appelées **équations d'équilibre** et doivent être satisfaites quelque soit le point considéré du **volume**. Les contraintes varient à l'intérieur du volume mais à la surface elles doivent équilibrer les forces extérieures de surface.

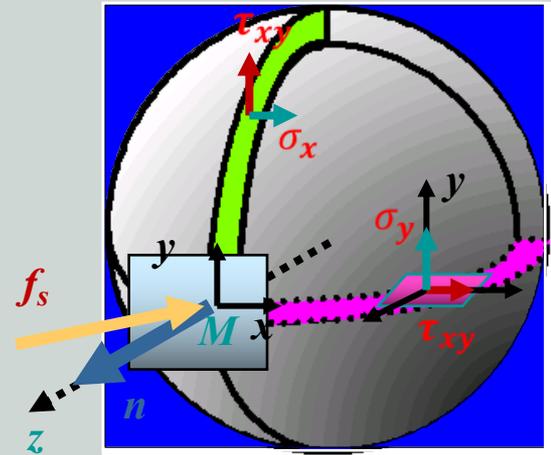
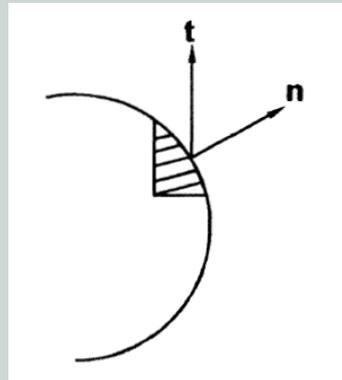
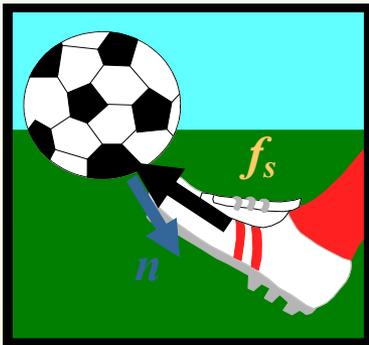
# 5. Conditions aux limites d'un tenseur de contraintes

Pour un point appartenant à la surface du milieu, le tenseur des contraintes doit équilibrer les forces de surface.

Ce sont les **conditions aux limites de chargement**.

Les forces de surface sont notées (par unité de surface):

$$f_s = (\bar{X}, \bar{Y}, \text{et } \bar{Z})$$



## 5. Conditions aux limites d'un tenseur de contraintes

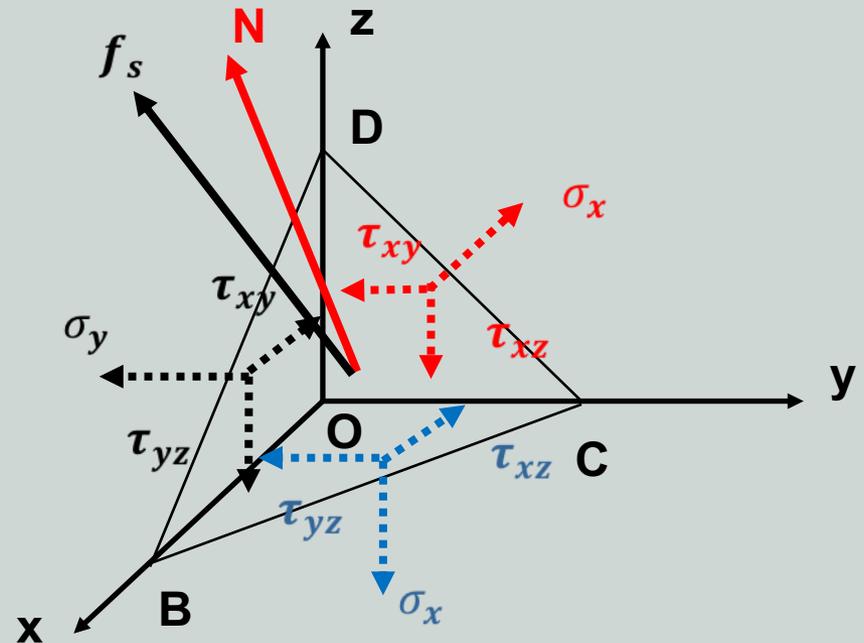
Considérons un petit tétraèdre coupé de la frontière où sa face inclinées coïncide avec la frontière. Les forces de volume de ce tétraèdre sont négligées

«  $N$  » est la normale de la face inclinée «  $BCD$  ».

$f_s$ : est la force de surface appliquée sur la face inclinée «  $BCD$  ».

$$f_s = (\bar{X}, \bar{Y}, \text{et } \bar{Z})$$

Le tenseur des contraintes est appliqué sur les faces d'origine «  $OBC$  », «  $OBD$  » et «  $OCD$  ».



## 5. Conditions aux limites d'un tenseur de contraintes

En faisant l'équilibre statique suivant les 03 axes, on obtient les équations de conditions aux limites.

Suivant « x, y et z », on aura

La force = La contrainte  $\times$  La surface

$$\bar{X}(BCD) - \sigma_x(OCD) - \tau_{xy}(OBD) - \tau_{xz}(OBC) = 0$$

$$\bar{Y}(BCD) - \sigma_y(OBD) - \tau_{xy}(OCD) - \tau_{yz}(OBC) = 0$$

$$\bar{Z}(BCD) - \sigma_z(OBC) - \tau_{xz}(OCD) - \tau_{yz}(OBD) = 0$$

Si on note la surface (BCD)=dA; on aura:

$$(BCD) = dA$$

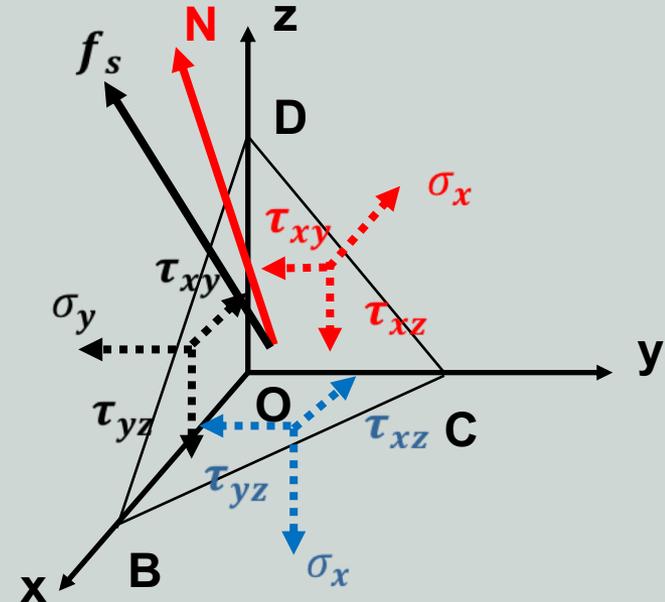
$$(OCD) = dA \cos(N,x) = l.dA$$

$$(OBD) = dA \cos(N,y) = m.dA$$

$$(OBC) = dA \cos(N,z) = n.dA$$

l, m et n sont appelés cosinus directeurs de la face BCD.

$$\text{Avec : } l^2 + m^2 + n^2 = 1$$



## 5. Conditions aux limites d'un tenseur de contraintes

$$\begin{aligned}\bar{X}(BCD) - \sigma_x(OCD) - \tau_{xy}(OBD) - \tau_{xz}(OBC) &= 0 \\ \bar{Y}(BCD) - \sigma_y(OBD) - \tau_{xy}(OCD) - \tau_{yz}(OBC) &= 0 \\ \bar{Z}(BCD) - \sigma_z(OBC) - \tau_{xz}(OCD) - \tau_{yz}(OBD) &= 0\end{aligned}$$

$$(BCD) = dA$$

$$(OCD) = dA \cos(N,x) = l.dA$$

$$(OBD) = dA \cos(N,y) = m.dA$$

$$(OBC) = dA \cos(N,z) = n.dA$$

En remplaçant, on aura:

$$\bar{X}dA - \sigma_x l.dA - \tau_{xy}m.dA - \tau_{xz}n.dA = 0$$

$$\bar{Y}dA - \sigma_y m.dA - \tau_{xy}l.dA - \tau_{yz}n.dA = 0$$

$$\bar{Z}dA - \sigma_z n.dA - \tau_{xz}l.dA - \tau_{yz}m.dA = 0$$

L'élément de surface est différent de zéro, on peut le simplifier

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy}l + \sigma_y m + \tau_{yz}n$$

$$\bar{Z} = \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_z n$$

(2.27)

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

(2.28)

## Equations de conditions aux limites de chargement

Ainsi, pour déterminer un état de contraintes d'un corps soumis à l'action de forces extérieures, il est nécessaire de résoudre les équations d'équilibre (2.25) ou (2.26) et que les solutions trouvées doivent satisfaire aux équations de limites (2.27) ou (2.28)

# 6. Composantes de Contraintes en un point

Le vecteur contrainte ne suffit pas à lui seul pour caractériser l'état de contrainte en un point. Puisqu'il dépend de la normale « N », il faut donc une autre représentation.

Considérons un tétraèdre petit représentant un point du milieu « P ».

Il est tellement petit, que le volume est presque zéro et que sa surface inclinée passe par « P »

En posant les cosinus directeurs :

$$l = \cos (N,x)$$

$$m = \cos (N,y)$$

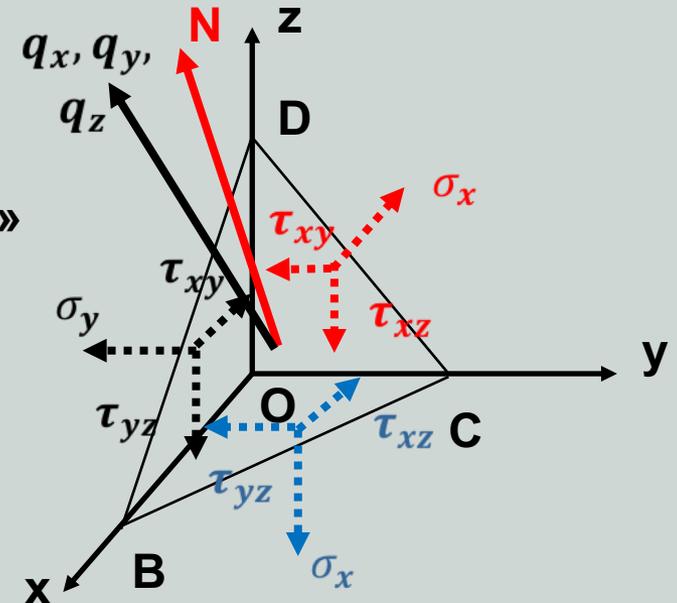
$$n = \cos (N,z)$$

Les composantes  $(q_x, q_y, q_z)$  du vecteur contrainte sur une facette inclinée quelconques s'écrivent:

$$q_x = l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy} + n \cdot \tau_{xz}$$

$$q_y = l \cdot \tau_{xy} + m \cdot \sigma_y + n \cdot \tau_{yz} \quad (2.29)$$

$$q_z = l \cdot \tau_{xz} + m \cdot \tau_{yz} + n \cdot \sigma_z$$



## Composantes du tenseur des Contraintes (suite)

02 contraintes tangentielles sur chaque face. On peut calculer leur résultante. Ex. selon «  $e_1$  »

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_{yx}m + \boldsymbol{\tau}_{zx}n \quad (2.30)$$

Dont la magnitude sera:

$$|\boldsymbol{\tau}_1| = \sqrt{\boldsymbol{\tau}_{yx}^2 + \boldsymbol{\tau}_{zx}^2} \quad (2.31)$$

De même suivant  $e_2$  et  $e_3$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\tau}_{xy}l + \boldsymbol{\tau}_{zy}n \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}_3 = \boldsymbol{\tau}_{xz}l + \boldsymbol{\tau}_{yz}m \quad (2.32)$$

Ainsi, les composantes de «  $\sigma$  » sont reliées à «  $T$  » et «  $n$  » par

$$t_i = T_{ij}n_j \quad \text{ou} \quad [t] = [T][n] \quad (2.33)$$

«  $T$  » est un **tenseur de second ordre** de contraintes.

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_x & \boldsymbol{\tau}_{xy} & \boldsymbol{\tau}_{xz} \\ \boldsymbol{\tau}_{yx} & \boldsymbol{\sigma}_y & \boldsymbol{\tau}_{yz} \\ \boldsymbol{\tau}_{zx} & \boldsymbol{\tau}_{zy} & \boldsymbol{\sigma}_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

Par réciprocité :  $\boldsymbol{\tau}_{xy} = \boldsymbol{\tau}_{yx}$ ;

$\boldsymbol{\tau}_{xz} = \boldsymbol{\tau}_{zx}$ . et  $\boldsymbol{\tau}_{yz} = \boldsymbol{\tau}_{zy}$

**Le tenseur est alors symétrique**

## Composantes du tenseur des Contraintes (suite)

### Exemple

Dans un système d'axes  $(x, y, z)$  la matrice d'un état de contrainte à un certain point d'un milieu est donnée par:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} MPa$$

Déterminer le vecteur contrainte et l'intensité de la contrainte normale dans un plan passant par le point et // au plan  $x+2y+2z-6=0$

## Composantes du tenseur des Contraintes (suite)

### Solution

a) La normale du plan  $x + 2y + 2z - 6 = 0$  est donnée par:

$$\mathbf{N} = 1/3 (1 + 2m + 2n)$$

Le vecteur contrainte sera alors:

$$[\mathbf{t}] = [\mathbf{T}][\mathbf{n}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = 1/3 (16.l + 4m + n) \text{ MPa}$$

La contrainte normale sera:

$$\sigma_n = \{t_1 \quad t_2 \quad t_3\} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad \sigma_n = \frac{1}{3} \{16 \quad 4 \quad 1\} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{9} (16 + 8 + 2) = 2.89 \text{ MPa}$$

# 7. Contraintes principales

Lorsque le vecteur contrainte est dans la direction de la contrainte normale, les **contraintes tangentielles sont nulles**. Dans ce cas, les normales des 03 plans définissent les directions principales et les valeurs ont les **contraintes principales**.

On a vu que les composantes d'une contrainte sur une face quelconque sont données par (éq. 2.29):

$$\begin{aligned}q_x &= l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy} + n \cdot \tau_{xz} \\q_y &= l \cdot \tau_{xy} + m \cdot \sigma_y + n \cdot \tau_{yz} \\q_z &= l \cdot \tau_{xz} + m \cdot \tau_{yz} + n \cdot \sigma_z\end{aligned}$$

Comme les contraintes tangentielles sont nulles et que la contrainte est principale, on aura les composantes de la contrainte principale:

$$q_x = l \cdot \sigma; \quad q_y = m \cdot \sigma; \quad q_z = n \cdot \sigma \quad (2.34)$$

Par équilibre, on doit avoir:

$$\begin{aligned}l \cdot \sigma &= l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy} + n \cdot \tau_{xz} \\m \cdot \sigma &= l \cdot \tau_{xy} + m \cdot \sigma_y + n \cdot \tau_{yz} \\n \cdot \sigma &= l \cdot \tau_{xz} + m \cdot \tau_{yz} + n \cdot \sigma_z\end{aligned} \quad (2.35)$$

## 7. Contraintes principales

$$\begin{aligned}l. \sigma &= l. \sigma_x + m. \tau_{xy} + n. \tau_{xz} \\m. \sigma &= l. \tau_{xy} + m. \sigma_y + n. \tau_{yz} \\n. \sigma &= l. \tau_{xz} + m. \tau_{yz} + n. \sigma_z\end{aligned}$$

Le système (3.35) admet 03 équations et 04 inconnues « l, m, n et  $\sigma$  ». C'est un problème propre.

Il ne donne des solutions différentes de zéro que si son déterminant est nul. Les 03 solutions obtenues seront les contraintes principales.

Supposons que «  $\sigma$  » est connue, on aura:

$$\begin{aligned}l. (\sigma_x - \sigma) + m. \tau_{xy} + n. \tau_{xz} &= 0 \\l. \tau_{xy} + m. (\sigma_y - \sigma) + n. \tau_{yz} &= 0 \\l. \tau_{xz} + m. \tau_{yz} + n. (\sigma_z - \sigma) &= 0\end{aligned} \quad (2.36)$$

$$([\sigma] - \sigma. [I]). \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

D'où:

$$\det \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.37)$$

$$\det([\sigma] - \sigma. [I]) = 0 \quad (2.38)$$

## 7. Contraintes principales

$$\det = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

La résolution de ce déterminant nous donne l'équation caractéristique du problème propre suivante:

$$\begin{aligned} \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot \sigma^2 + (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2) \cdot \sigma \\ - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

On peut écrire l'équation (3.39) sous la forme:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0 \quad (2.40)$$

Avec:

$$I_1 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$I_2 = (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2).$$

$$I_3 = (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2)$$

## 7. Contraintes principales

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot \sigma^2 + (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2) \cdot \sigma - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0 \quad (2.39)$$

Les trois solutions de l'équation (3.38) donnent les valeurs des 03 contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$ . En portant des valeurs successivement dans les équations (3.36) et en faisant usage de la relation  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , on trouvera 03 groupes de cosinus directeurs pour les 03 plans principaux

Les contraintes principales sont indépendantes de l'orientation du trièdre de référence Oxyz.

Alors les valeurs de  $I_1, I_2$  et  $I_3$  restent constantes quand on modifie les axes de coordonnées. On les appelle les **Invariants du tenseur des contraintes**

$$\begin{aligned} I_1 &= (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \text{Cte} \quad \textit{Invariant linéaire} \\ I_2 &= (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2) = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 = \text{Cte} \\ &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad \textit{Invariant Quadratique} \quad (3.40) \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \text{Cte.} \quad \textit{Invariant Cubique} \end{aligned}$$

# 8. Tenseurs sphérique et Déviatorique

Chaque tenseur peut être décomposé en partie sphérique et déviatorique

$$[\sigma] = [\sigma_s] + [\sigma_d] \quad (2.41)$$

Tenseur sphérique

Où  $\sigma_m$  est la contrainte normale moyenne:

$$[\sigma_s] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} \quad (2.42)$$

Tenseur Déviatorique

$$[\sigma_d] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

**Rem:**

La trace (somme des éléments de la diagonale) du déviatorique est nulle.

$[\sigma_d]$  et  $[\sigma_d]$  ont les mêmes directions principales

Les valeurs propres de  $[\sigma_d]$  sont définies par  $\sigma_{di} = \sigma_i - \sigma_m$

# 9. Représentation des contraintes

## 9.1 Contrainte de cisaillement maximale.

Soient  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  les directions principales et  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  les contraintes principales. Si  $N=l.e_1+m.e_2+n.e_3$  est la normale au plan, les composantes du vecteur contrainte sur le plan seront:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cdot \sigma_1 \\ m \cdot \sigma_2 \\ n \cdot \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$q = l \cdot \sigma_1 \cdot e_1 + m \sigma_2 \cdot e_2 + n \cdot \sigma_3 \cdot e_3$$

La contrainte normale sera:

$$\sigma_n = n \cdot \sigma = l^2 \cdot \sigma_1 + m^2 \cdot \sigma_2 + n^2 \cdot \sigma_3 \quad (2.45)$$

## Représentation des contraintes (Suite) Contrainte de cisaillement maximale.

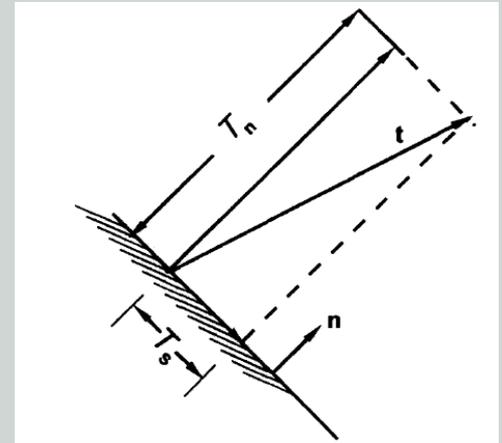
$\sigma$  est la résultante de  $\sigma_n$  et  $\tau_s$  ( $\tau_s$ : la contrainte de cisaillement totale sur le plan), on aura

$$|\sigma|^2 = \sigma_n^2 + \tau_s^2 \quad (2.46)$$

D'où

$$\tau_s^2 = |\sigma|^2 - \sigma_n^2$$

$$\tau_s^2 = \sigma_1^2 \cdot l^2 + \sigma_2^2 \cdot m^2 + \sigma_3^2 \cdot n^2 - (l^2 \cdot \sigma_1 + m^2 \cdot \sigma_2 + n^2 \cdot \sigma_3)^2 \quad (2.47)$$



Pour des valeurs connues de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ , on remarque que  $\tau_s(l, m, n)$

$$\tau_s^2 = f(l, m, n) \quad (2.48)$$

On peut donc déterminer les valeurs maximales de « f » tout en sachant que:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Il faut dériver l'équation (2.47).

$$\tau_s^2 = \sigma_1^2 \cdot l^2 + \sigma_2^2 \cdot m^2 + \sigma_3^2 \cdot n^2 - (l^2 \cdot \sigma_1 + m^2 \cdot \sigma_2 + n^2 \cdot \sigma_3)^2$$

## Représentation des contraintes (Suite) **Contrainte de cisaillement maximale.**

La dérivée totale de la fonction sera:

$$d(\tau_s^2) = \frac{\partial \tau_s^2}{\partial l} dl + \frac{\partial \tau_s^2}{\partial m} dm + \frac{\partial \tau_s^2}{\partial n} dn = 0 \quad (2.49)$$

Soit

$$\frac{\partial \tau_s^2}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial \tau_s^2}{\partial m} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tau_s^2}{\partial n} = 0$$

En remplaçant l'expression de « $\tau_s$ », on aura:

$$\begin{aligned} 2 \cdot l [\sigma_1^2 - 2(l^2 \cdot \sigma_1 + m^2 \cdot \sigma_2 + n^2 \cdot \sigma_3) \sigma_1] &= 0 \\ 2 \cdot m [\sigma_2^2 - 2(l^2 \cdot \sigma_1 + m^2 \cdot \sigma_2 + n^2 \cdot \sigma_3) \sigma_2] &= 0 \\ 2 \cdot n [\sigma_3^2 - 2(l^2 \cdot \sigma_1 + m^2 \cdot \sigma_2 + n^2 \cdot \sigma_3) \sigma_3] &= 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Sachant que  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$  on aura 06 solutions:

$$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

## Représentation des contraintes (Suite) **Contrainte de cisaillement maximale.**

Les 03 premières solutions donnent « $\tau_s = 0$ » valeur minimale. Ce sont les plans principaux.

Les 03 dernières valeurs donnent dans valeurs maximales de « $\tau_s$ ».

Pour	$n = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e_2$	;	$\tau_s^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4}$	
Pour	$n = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e_3$	;	$\tau_s^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4}$	(2.51)
Et pour	$n = \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e_3$	;	$\tau_s^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{4}$	

Ainsi la contrainte tangentielle maximale est donnée par le max des 03 contraintes  $\tau_s$  obtenues.

$$\tau_{S_{max}} = \max \left( \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}; \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}; \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \right) \quad (2.52)$$

Ou bien

$$\tau_{S_{max}} = \frac{\sigma_{n_{max}} - \sigma_{n_{min}}}{2} \quad (2.53)$$

$\sigma_{n_{max}}, \sigma_{n_{min}}$ : Contrainte normale max et Min

## Représentation des contraintes (Suite)

### 9.2 Contraintes octaédriques.

Considérons un plan dont la normale fait des angles égaux avec les directions principales.

Le plan ABC est un plan **octaédrique** où  $PA=PB=PC$ .

Dans ce cas, on:

(2.54)

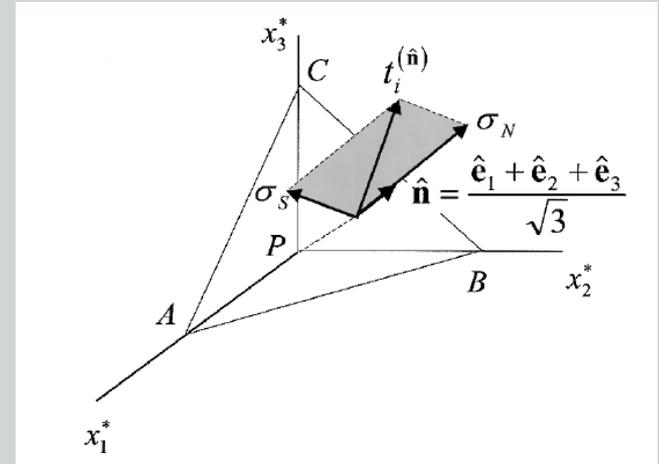
$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3) \quad l = m = n = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Le vecteur contrainte «  $t_n$  » dans le repère local de la face sera:

$$t_n = T^* \cdot n = \frac{\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3}{\sqrt{3}} \quad (2.55)$$

Dont la composante suivant la normale sera:

$$\sigma_n = t_n \cdot n = \frac{1}{3}[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3] = \frac{1}{3} \cdot I_1 \quad (2.56)$$



## Représentation des contraintes (Suite) Contraintes octaédriques

Or de la géométrie, on a:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma}|^2 &= \boldsymbol{\sigma}_n^2 + \boldsymbol{\tau}_s^2 \\ \boldsymbol{\tau}_s^2 &= |\boldsymbol{\sigma}|^2 - \boldsymbol{\sigma}_n^2 \end{aligned} \quad (2.57)$$

or  $\sigma_{e1} = \sigma_1 \cdot l \quad \sigma_{e2} = \sigma_2 \cdot m \quad \sigma_{e3} = \sigma_3 \cdot n$

D'où 
$$\sigma^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \quad (2.58)$$

Ainsi, la contrainte tangentielle dans le plan principal sera:

$$\boldsymbol{\tau}_s^2 = \boldsymbol{\tau}_{oct}^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (2.59)$$

Cette contrainte est appelée **contrainte octaédrique**, qui peut s'écrire:

$$t_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)^2 + (\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_3)^2 + (\boldsymbol{\sigma}_3 - \boldsymbol{\sigma}_1)^2} \quad (2.60)$$

## Représentation des contraintes (Suite)

### 9.3 Cercles de Mohr (Tricercle).

Considérons un point « P » du plan principal, ces contraintes principales seront  $(\sigma_1)$ ,  $(\sigma_2)$  et  $(\sigma_3)$  rangées selon  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Alors on a :

$$|\sigma|^2 = \sigma_n^2 + \tau_s^2 \quad |\sigma|^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \quad (2.61)$$

Avec :

$$\sigma_n = n \cdot \sigma = l^2 \cdot \sigma_1 + m^2 \cdot \sigma_2 + n^2 \cdot \sigma_3 \quad (2.62)$$

De plus,

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

03 équations à 03 inconnues, nous donnent :

$$\begin{aligned} l^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) + \tau_s^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ m^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) + \tau_s^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) + \tau_s^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{aligned} \quad (2.63)$$

## Représentation des contraintes (Suite) Cercles de Mohr (Tricercle).

On peut réécrire le numérateur sous une autre forme. Soit:

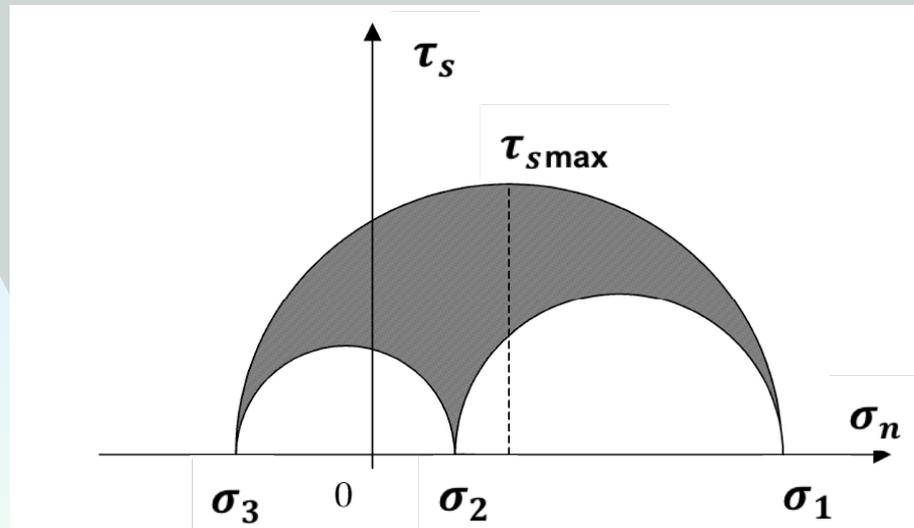
$$\begin{aligned}
 l^2 &= \frac{\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\right]^2 + \tau_s^2 - \left[\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)\right]^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} && \geq \\
 m^2 &= \frac{\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\right]^2 + \tau_s^2 - \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\right]^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} && \leq \\
 n^2 &= \frac{\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\right]^2 + \tau_s^2 - \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\right]^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} && \geq
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

On remarque que les numérateurs représentent les équations de cercles dans le plan  $(\sigma_n, \tau_s)$ . Puisque  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , on aura

$$\begin{aligned}
 \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\right]^2 + \tau_s^2 &\geq \left[\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)\right]^2 \\
 \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\right]^2 + \tau_s^2 &\leq \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\right]^2 \\
 \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\right]^2 + \tau_s^2 &\geq \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\right]^2
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

## Représentation des contraintes (Suite) Cercles de Mohr (Tricercle).

Représentation:



Les cercles ont pour centres et rayons respectivement:

$$\left[ \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] ; \left[ \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \right]$$

$$\left[ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] ; \left[ \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \right]$$

$$\left[ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] ; \left[ \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right]$$

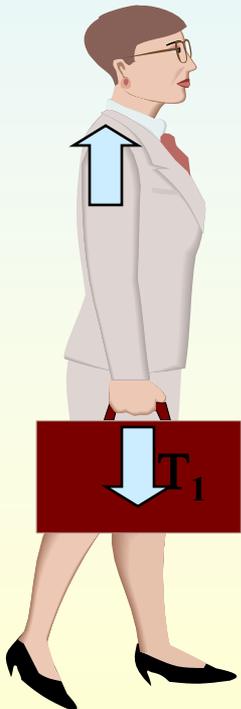
(2.66)

# Représentation des contraintes (Suite) Cercles de Mohr (Tricercle).

## Exemples

Uniaxiale

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



Biaxiale

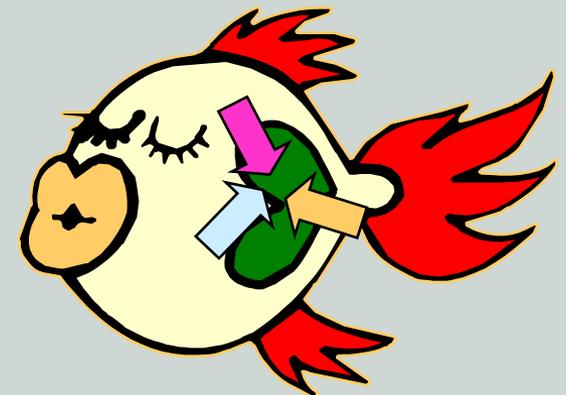
$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$$\sigma_1 = \sigma_2 = T$$

Triaxiale

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$



$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$$

*Hydrostatique*

$$\begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix}$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p \bar{\bar{\delta}}$$

## Représentation des contraintes (Suite)

### 9.4 Ellipsoïde des contraintes

Considérons un point « P » du plan principal, ses contraintes principales seront  $(\sigma_1)$ ,  $(\sigma_2)$  et  $(\sigma_3)$  Alors on a:

$$q_x = \sigma_1 l ; q_y = \sigma_2 m ; q_z = \sigma_3 n \quad (2.67)$$

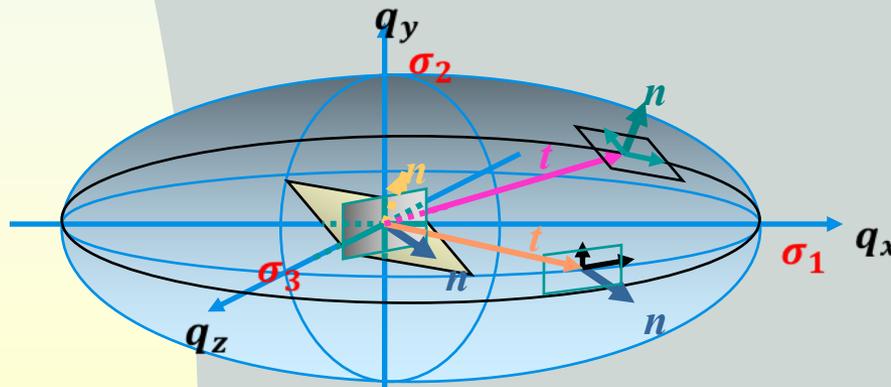
Or

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

D'où

$$\left(\frac{q_x}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{q_y}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{q_z}{\sigma_3}\right)^2 = 1 \quad (2.68)$$

C'est l'équation d'une ellipsoïde de demi axes les contraintes principales



## Représentation des contraintes (Suite)

### 9.4 Ellipsoïde des contraintes

$$\left(\frac{q_x}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{q_y}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{q_z}{\sigma_3}\right)^2 = 1$$

#### Etats de Contraintes Particuliers

i) Une des contraintes principales est nulle . (exemple.  $\sigma_1=0$ )

L'ellipsoïde devient une **ellipse**.

C'est un état de **contrainte plane**.

ii) Si les 03 contraintes principales sont numériquement égales

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

L'ellipsoïde devient une **Sphère**.

C'est un état de **contrainte Uniforme ou Sphérique**.

Dans ce cas 03 directions quelconques mais perpendiculaires entre elles sont les axes principaux

## Représentation des contraintes (Suite)

### 9.4 Ellipsoïde des contraintes

$$\left(\frac{q_x}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{q_y}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{q_z}{\sigma_3}\right)^2 = 1$$

#### Etats de Contraintes Particuliers

iii) Si 02 des 03 contraintes principales ont la même valeur.  
(exemple.  $\sigma_1 = \sigma_2$ )

L'ellipsoïde devient une **ellipsoïde de révolution**.

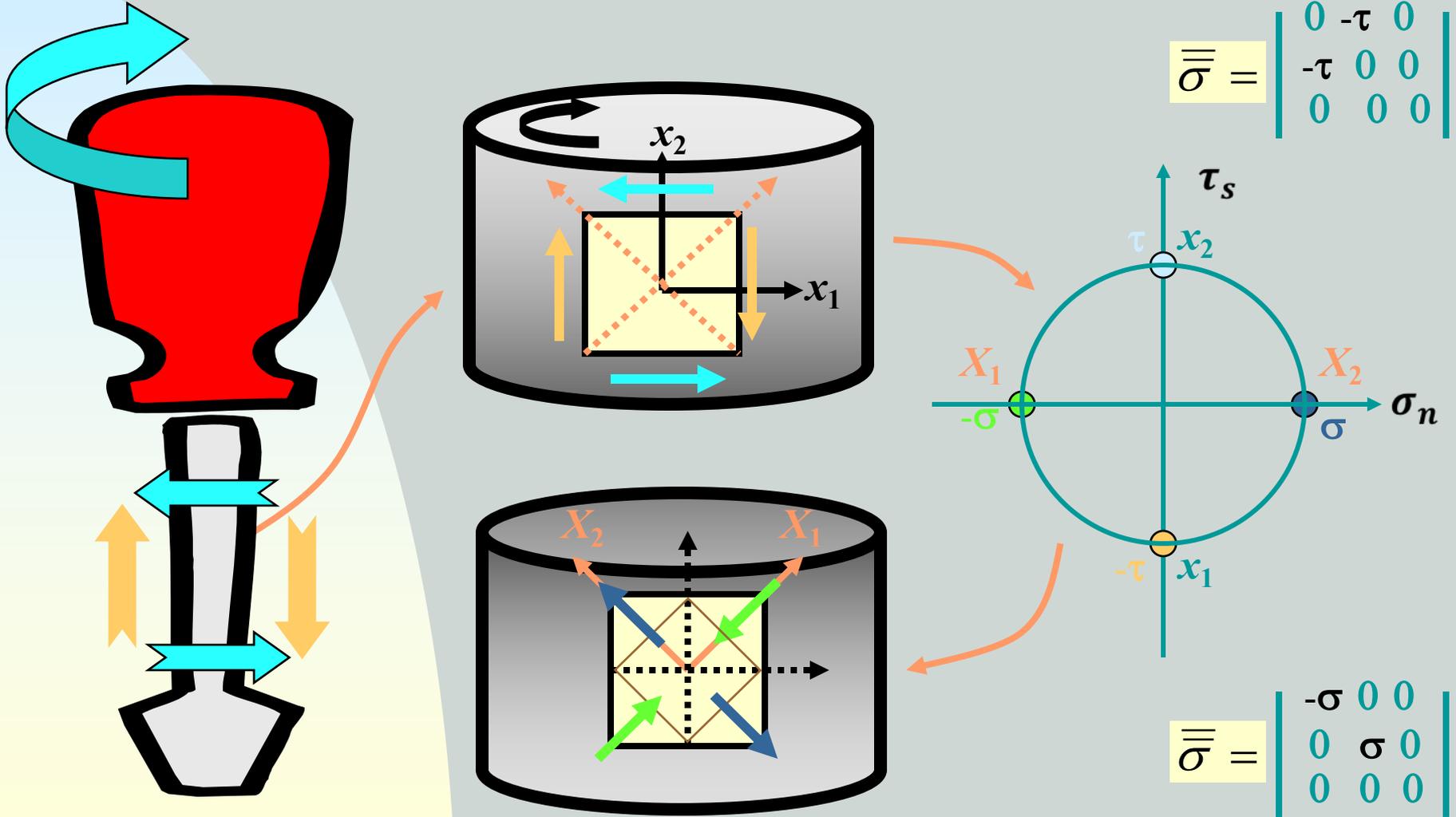
iv) Si 02 des 03 contraintes principales sont nulles (exemple.  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ )

L'ellipsoïde devient une **droite**.

C'est un état de **Traction/Compression**

# Représentation des contraintes (Suite)

## 9.5 Cisaillement simple



Le cisaillement est maximal sur les facettes orientées à  $45^\circ$  des facettes principales



**Merci. Fin du chapitre 2**

# *Théorie de l'Elasticité*

**Abdellatif MEGNOUNIF**

**Semaine Prochaine**

**Chap. 3**

**Déformations**