MagnétoHydroDynamique (MHD)

1. Définitions et généralités:

La **magnétohydrodynamique** (MHD en abrégé)) concerne la description du comportement d'un fluide susceptible à conduire de l'électricité une fois soumis à l'action de champs électromagnétiques. Elle s'applique, en particulier aux plasmas. C'est une généralisation de l'hydrodynamique (appelée dynamique des fluides, définie par les équations de Navier-Stokes) couplée à l'électromagnétisme (équations de Maxwell). Entre la mécanique des fluides « classique » et la magnétohydrodynamique, se situe l'**électro-hydrodynamique** ou mécanique des fluides ionisés en présence de champs électriques (électrostatiques) mais sans champ magnétique.

Pour un dernier mot sur une telle discipline scientifique, c'est le physicien Hannes Alfen qui fut le premier à employer le terme MHD en 1942 pour l'impliquer à l'étude de la propagation des ondes dites d'Alfvén dans le plasma de la magnétosphère.

Il existe deux types de la MHD : (i) idéale et (ii) résistive qui se distinguent selon le nombre de Reynolds noté $R_m >>1$, et $R_m \leq 1$ respectivement.

Pour se fixer une idée, le noyau fluide de la terre est considéré comme étant une gigantesque dynamo MHD qui génère le champ magnétique terrestre (géomagnétisme) orienté entre les pôles du globe terrestre.

Ondes Alfen : constituées par une oscillation (de propagation transversale) des ions et du champ magnétique. La vitesse de propagation, v_A de ce type d'onde se calcule par

$$v_A = B \Big/ \sqrt{\mu_0 \rho}$$

où ρ désigne la masse volumique totale des particules chargées du plasma.

2. Caractéristiques fondamentales

D'une manière générale, un milieu matériel décrit comme un conducteur parfait, sa conductivité tend vers l'infini. Le milieu contenant des charges libres (électrons dans les métaux, les ions dans les substances électrolytes), l'application d'un champ électrique crée une force sur chacune des charges (q) exprimée par F= qE, tel que le conducteur est caractérisé par une conductivité, σ et une vitesse v relative à toute position r de l'espace au cours du temps.

a) Potentiel vecteur

Soit une région de l'espace où règne un champ d'induction magnétique variable B qui dérive du potentiel vecteur A (→r , t). Selon la relation divB = 0 qui entraîne l'existence d'un vecteur A, tel que :

$B=Rot\ A$

b) Loi d'Ohm

La loi d'Ohm pour un conducteur en mouvement dans un champ magnétique dans le cas général est donnée par:

$j= \sigma(\vec{E} + E_m)$

E :

E_m :

c) Dépendance entre vecteur densité et champ électrique

Lorsqu'on néglige l'existence éventuelle du gradient de potentiel électrique, c'est à dire le courant n'est pas provoqué par un gradient de potentiel (pas par un champ macroscopique E), le champ électrostatique devient nul car $E= -gradV$, ainsi $j = \sigma E_m$ et le courant qui se crée est un courant électrostatique

d) Un conducteur parfait

C'est un milieu dont la conductivité tend vers l'infini.

Toujours en négligeant l'existence du gradient de potentiel (E=0), du fait que σ est infinie $E_m=j/\sigma$ et donc $E_m= 0$

Si E_m est nul, on obtient la relation qui lie les trois grandeurs vectorielles :v(vitesse) , B(champ magnétique) et A(potentiel associé à B) et on écrit :

$v \wedge B=\partial A/\partial t$

D'autre part, sachant que B= Rot (A), il vient :

$\partial B/\partial t=Rot (\partial A/\partial t)=Rot (v \wedge B)$

Rappels et hypothèses sur les plasmas

Le plasma représente un ensemble d'atomes ou de molécules partiellement ou totalement ionisés et tel que l'ensemble reste électriquement neutre. Pour la création d'un plasma, l'apport d'une énergie importante est nécessaire. Dans un plasma, les effets produits par interactions individuelles peuvent être négligés par rapport aux effets collectifs. Ainsi, il est possible de décrire la dynamique d'un plasma en supposant que les ions et les électrons pris séparement se déplacent indépendamment dans des champs macroscopiques, lentement variables. Ces champs, créés ou modifiés par l'ensemble de toutes les charges au cours de leurs mouvements, devrons donc satisfaire aux équations de Maxwell et d'hydrodynamiques.

e) La relation fondamentale de la dynamique

Le plasma est supposé infiniment conducteur et parfaitement compressible si bien que chaque élément de matière n'est soumis qu'à la force de Laplace :

$df/dt=j \wedge B$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique on obtient :

$\rho dv/dt = \rho_0 g - \text{grad } p + j \wedge B$

Etant donné que le plasma est électriquement neutre ($\rho_0 = 0$) alors :
$\rho_0 g = 0$

Et qu'aucune forces de pression n'est appliquée :
grad $p = 0$
Donc on aura la relation qui lie v ,j et B de la forme :
$\rho_0 dv/dt = j \wedge B$
Compte tenu de l'équation de Maxwell-Ampère et en négligeant le terme
$\partial E/\partial t$ on obtient, une deuxième relation qui lie v ,j et B :
$\text{rot}B = \mu_0 j$

A partir de cette relation, on peut écrire aussi en multipliant par le terme $\wedge B$ à droite et à gauche :

$\text{rot}B \wedge B = \mu_0 j \wedge B$

D'où, on écrit

$\rho_0 dv/dt = 1/\mu_0 (\text{rot}B) \wedge B$
Alors il vient :
$\mu_0 \rho_0 dv/dt = - B \wedge \text{rot}B$

f) Equation d'induction

L'équation d'induction met en évidence le couplage entre le champ magnétique B et le champ de vitesse v, elle est déduite à partir de l'équation d'Ohm . Dans le cas général
$j = \sigma E + v \wedge B$

où σ est la conductivité électrique du plasma.
D'après l'équation de Maxwell-Ampére $\text{rot}B = \mu 0 j$, il en découle l'équation qui définit l'évolution du champ magnétique dans un plasma.

$\text{rot}B = \mu_0 j$

$\text{rot}(\text{rot}B) = \mu_0 \text{Rot} j$

$\text{grad}\,\text{div}B - \Delta B = \mu_0 \sigma(\text{rot}E + \text{rot}(v \wedge B))$

$-\Delta B = \mu_0 \sigma(-\partial B/\partial t + \text{rot}(v \wedge B))$

Cela donne l'équation

$\partial B/\partial t = Rot(v \wedge B) + \eta \Delta B$

tel que $\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ défini le coefficient de diffusion magnétique, μ : perméabilité magnétique.

Les deux termes de droite de $\partial B/\partial t$ décrivent deux mécanismes differents qui font évoluer le champ B en tout point donné : $Rot(v \wedge B)$ dépend de la vitesse du fluide, et le terme $\eta \Delta B$ est proportionnel à la résistivité.

$Rot(v \wedge B)$ est appelé terme de convection,

$\eta \Delta B$ est le terme de diffusion.

Supposition :
Pour un terme de diffusion nul, ceci donne :

$\partial B/\partial t = Rot(v \wedge B)$
Ce cas limite est obtenu en considerant la conductivité infinie, pour que la densité j et le champ B restent finis on doit avoir :

$E + v \wedge B = 0$

Ceci permet de déduire que le champ magnétique est entrainé par la matière. Une telle interprétation résultante a été annoncée par Alfen en 1942. Son résumé est que le champ magnétique et la matière constituent deux fluides gelés l'un dans l'autre. On se retrouve alors dans le cadre de la MHD idéale.

Considérons maintenant le cas limite opposé où le deuxième mécanisme d'évolution temporelle de B est dominant. Il vient dans ce cas :

$\partial B/\partial t = \eta \Delta B$
Une telle relation exprime le fait que toute perturbation locale de B tend à s'atténuer par le mécanisme de diffusion.

Formulation des Equations de base de la MHD

Les équations de la MHD sont constituées les des équations de Maxwell et les équations de conservation que nous résumons ci-dessous:

$\vec{Rot}\,(B) = \mu_0 j$ Loi d'Ampère
$E + v \times B = 0$ pour le cas de la MHD idéale Loi d'Ohm
$E + v \times B = \eta j$ pour le cas de la MHD resistive
$\partial B/\partial t = Rot(v \wedge B)$ Equation d'induction
$\partial \rho/\partial t + div(\rho v) = 0$ Equation de conservation de charges (continuité)
$\rho(\partial/\partial t + v \cdot \nabla)v = \rho g - grad\, p + j \wedge B$ Fluide(Newton)

$(\partial/\partial t + v.\nabla) p/\rho^{\gamma} = 0$ Equation d´etat

Pour l'écriture de ces équations, les hypothèses suivantes ont été appliquées:
i)Le plasma est traité comme un fluide unique neutre
ii)Le plasma est considéré comme un milieu continu, c'est à dire que les échelles de

longueur caractérisant l'évolution des grandeurs considérées (pression, densité,...) sont très grandes devant les échelles de longueur interne au plasma comme le rayon de giration ionique;

iii)Le plasma est en équilibre thermodynamique avec une fonction de distribution proche d'une Maxwellienne. Les temps caractéristiques d'évolution du plasma sont plus grandes que le libre parcours moyen entre les collisions de deux particules (temps de vol)

iV)La viscosité est négligée. Les effets relativistes (théorie d'Einstein) sont aussi négligés en supposant que les vitesses de propagation soient inférieures à la vitesse de la lumière.