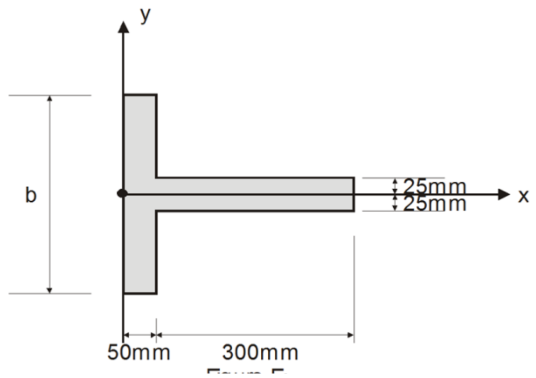
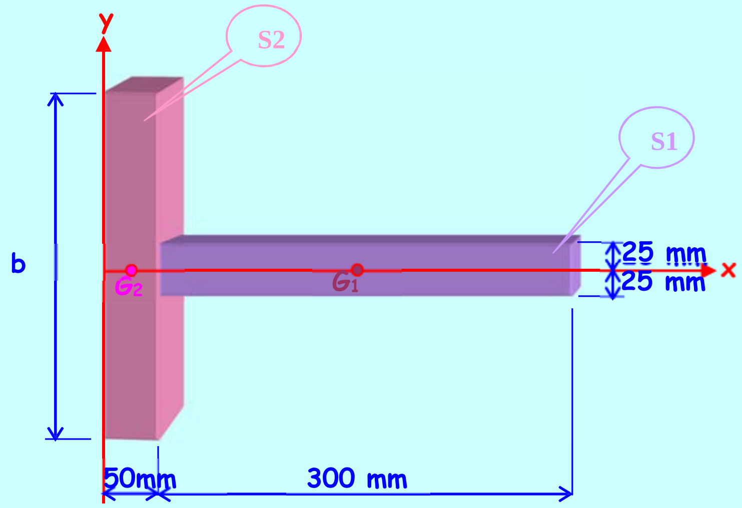
EXERCICE 01



Calculez pour la surface ci-contre:

a) I_{xx} et I_{yy} si b = 25 cm.
b) b pour que $I_{xx} = I_{yy}$.



a) b=25cm

Décomposons la surface S en deux S_1, et S_2
$$I_{xx}^{S_1} = \frac{30 \times 5^3}{12} \qquad I_{xx}^{S_2} = \frac{5 \times 25^3}{12}$$

$$I_{xx}^{S} = I_{xx}^{S_1} + I_{xx}^{S_2} = \frac{30 \times 5^3}{12} + \frac{5 \times 25^3}{12}$$

I_{xx}=6822,92 cm^4

De même après application du théorème d'Huyghens :

$$I_{yy}^{S_1} = \frac{5 \times 30^3}{12} + 20^2 \times (30 \times 5) \qquad I_{yy}^{S_2} = \frac{25 \times 5^3}{12} + 2{,}5^2 \times (5 \times 25)$$

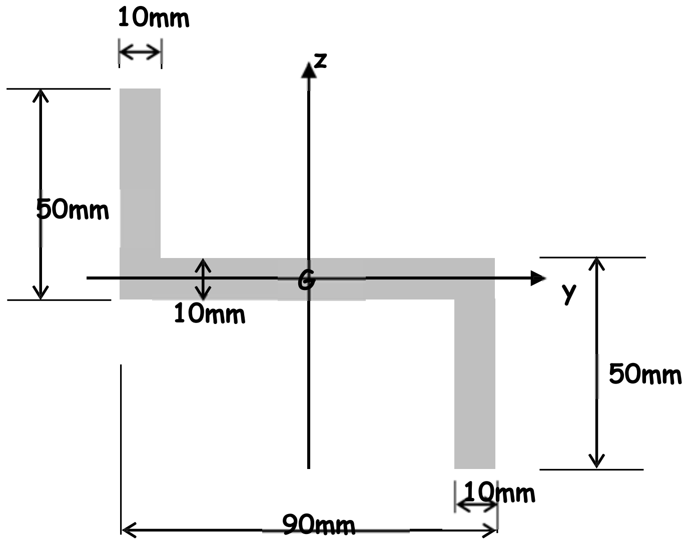
$$I_{yy}^{S} = I_{yy}^{S_1} + I_{yy}^{S_2} = \frac{5 \times 30^3}{12} + 20^2 \times 30 \times 5 + \frac{25 \times 5^3}{12} + 2{,}5^2 \times 5 \times 25$$

I_{yy}=72291,67 cm^4

b) $I_{xx} = I_{yy}$
$$\frac{30 \times 5^3}{12} + \frac{5 \times b^3}{12} = \frac{5 \times 30^3}{12} + 20^2 \times 30 \times 5 + \frac{b \times 5^3}{12} + 2{,}5^2 \times 5 \times b$$

$5b^3$-500b-851250=0 équation du 3$^{\text{èm}}$ degré admettant 2 solutions imaginaires et une solution réelle :
b=56 cm

EXERCICE 02

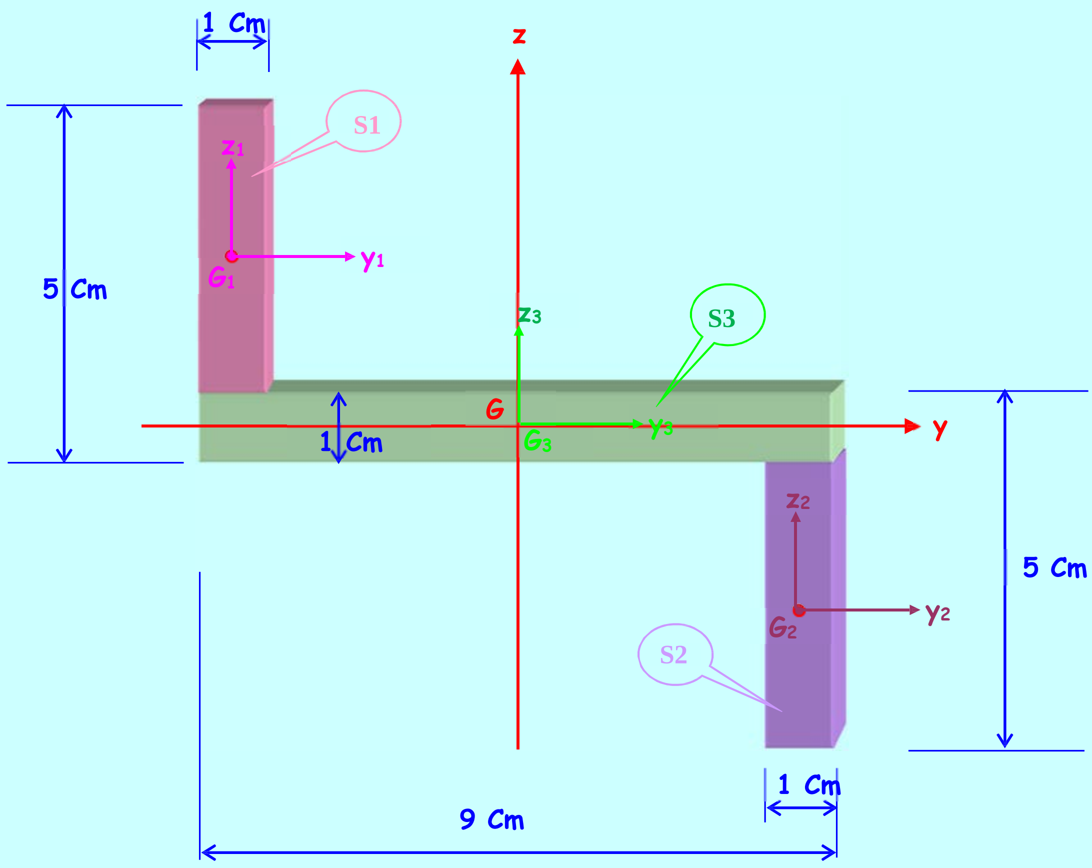


Calculez pour la surface ci-contre:

1°) Les moments et le produit d'inertie par rapport aux axes centraux y et z.

2°) La position des axes centraux principaux et les moments d'inertie principaux.

3°) Les moments et le produit 'inertie par rapport à deux nouveaux axes centraux obtenus par une rotation positive de 30° des axes y et z.



1°)

Décomposons la surface initiale S en trois surfaces S_1, S_2 et S_3 : $I^S_{yy} = I^{S_1}_{yy} + I^{S_2}_{yy} + I^{S_3}_{yy}$ avec $I^{S_1}_{yy} = I^{S_2}_{yy}$

Appliquons le théorème d'Huyghens : $I^{S_1}_{yy} = I^{S_1}_{y_1y_1} + z^2_{G1} A_1$ et $I^{S_3}_{yy} = I^{S_3}_{y_3y_3}$ $\quad G_1/_{yz}\begin{vmatrix} -4cm \\ 2,5cm \end{vmatrix}$

$$I^S_{yy} = 2\left(\frac{1\times 4^3}{12} + 2,5^2 \times 4\right) + \frac{9\times 1^3}{12}$$

I_{yy}^S=61,42 cm4

De même : $I_{zz}^{S} = 2\left(\frac{4\times 1^3}{12} + (-4)^2 \times 4\right) + \frac{1\times 9^3}{12}$ **I_{zz}^S=189,42 cm^4**

$I_{yz}^{S} = I_{yz}^{S_1} + I_{yz}^{S_2} + I^{S_3}$ avec $I_{yz}^{S_3} = 0$ (y et z sont axes de symétrie pour S$_3$) $I_{yz}^{S_1} = I_{yz}^{S_2} = I_{y_1 z_1}^{S_1} + y_{G1}\, z_{G1}$

$I_{yz}^{S} = 2\left(0 + (-4)(2,5)\times 4\times 1\right)$ car $I_{y_1 z_1}^{S_1} = 0$ (y$_1$ et z$_1$ sont axes de symétrie pour S$_1$) **I_{yz}^S=-80 cm^4**

2°)

Position des axes principaux :

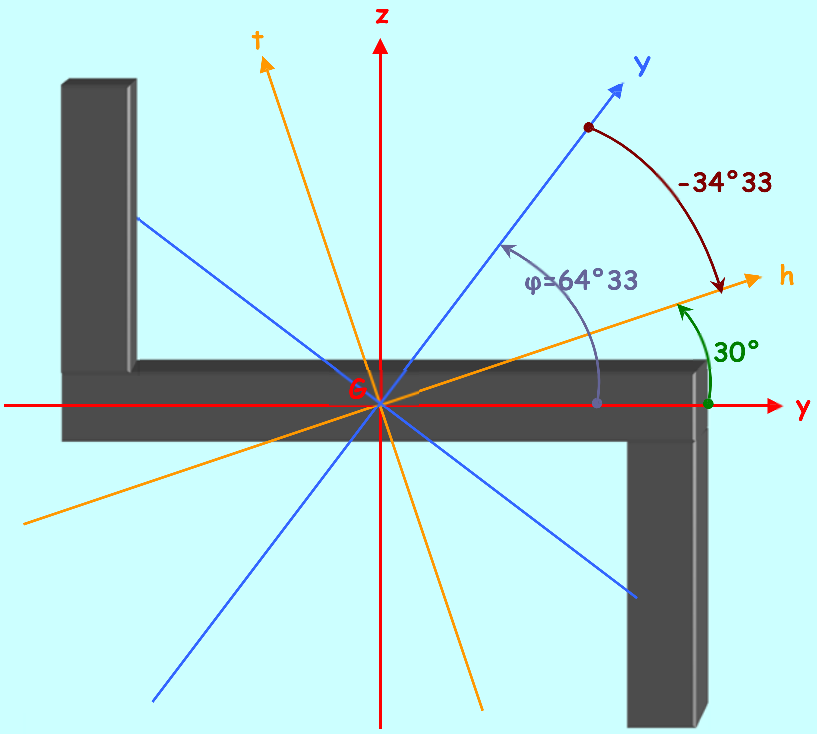
$\tan 2\varphi = \frac{-2 I_{yz}}{I_{yy} - I}$

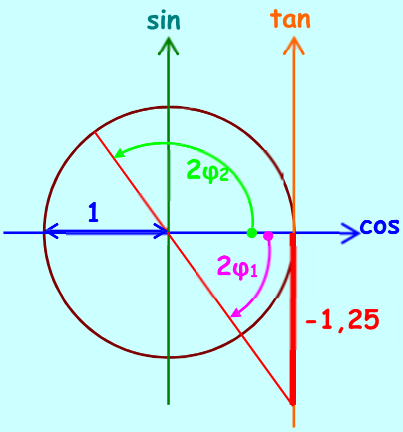
$\cos 2\varphi$ même signe que $I_{yy} - I_{zz}$

$\hat{\varphi} = (\vec{y}, \vec{Y})$

$\tan 2\varphi = \frac{-2\times(-80)}{61,42 - 189,42} \approx -1,25$

$\cos 2\varphi \langle\ 0$





Inversion trigonométrique de la tangente : $\tan 2\varphi \approx -1,25$ $\begin{cases} 2\varphi_1 = -51^\circ 34 \\ 2\varphi_2 = 128^\circ 66 \end{cases}$

Or $\cos 2\varphi \langle\ 0$ la solution φ$_1$ est donc à rejeter. **φ=64°33** avec $\hat{\varphi} = (\vec{y}, \vec{Y})$

Moments d'inertie principaux

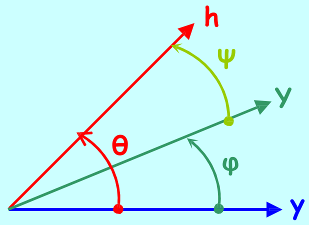
$$I_Y^Z = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4 I_{yz}^2} = \frac{61,42 + 189,42}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(61,42 - 189,42)^2 + 4(-80)^2}$$

I_Y=227,87 cm^4
I_Z=22,97 cm^4

3°)
Utilisons les formules de rotation exprimées dans les axes principaux :

$$\begin{cases} I_{hh} = \dfrac{I_Y + I_Z}{2} + \dfrac{I_Y - I_Z}{2}\cos 2\psi \\ I_{tt} = \dfrac{I_Y + I_Z}{2} + \dfrac{I_Y - I_Z}{2}\cos 2\left(\psi + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ I_{ht} = \dfrac{I_Y - I_Z}{2}\sin 2\psi \end{cases}$$

avec $\hat{\psi} = \left(\vec{Y}, h\right)$

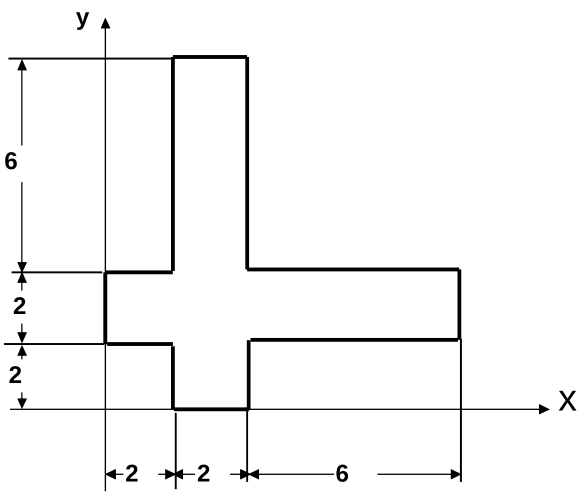


$$I_{hh} = \frac{227{,}87 + 22{,}97}{2} + \frac{227{,}87 - 22{,}97}{2}\cos 2\left(-34°33\right)$$

I_{hh}=162,7 cm^4
I_{tt}=88,14 cm^4
I_{ht}=-95,43 cm^4

Nous pouvons vérifier que : **$I_{hh}+I_{tt}$ = I_Y+I_Z = I_G = 250,84 cm^4**

EXERCICE 03



Calculez, pour la surface ci-contre (les cotes sont en cm):

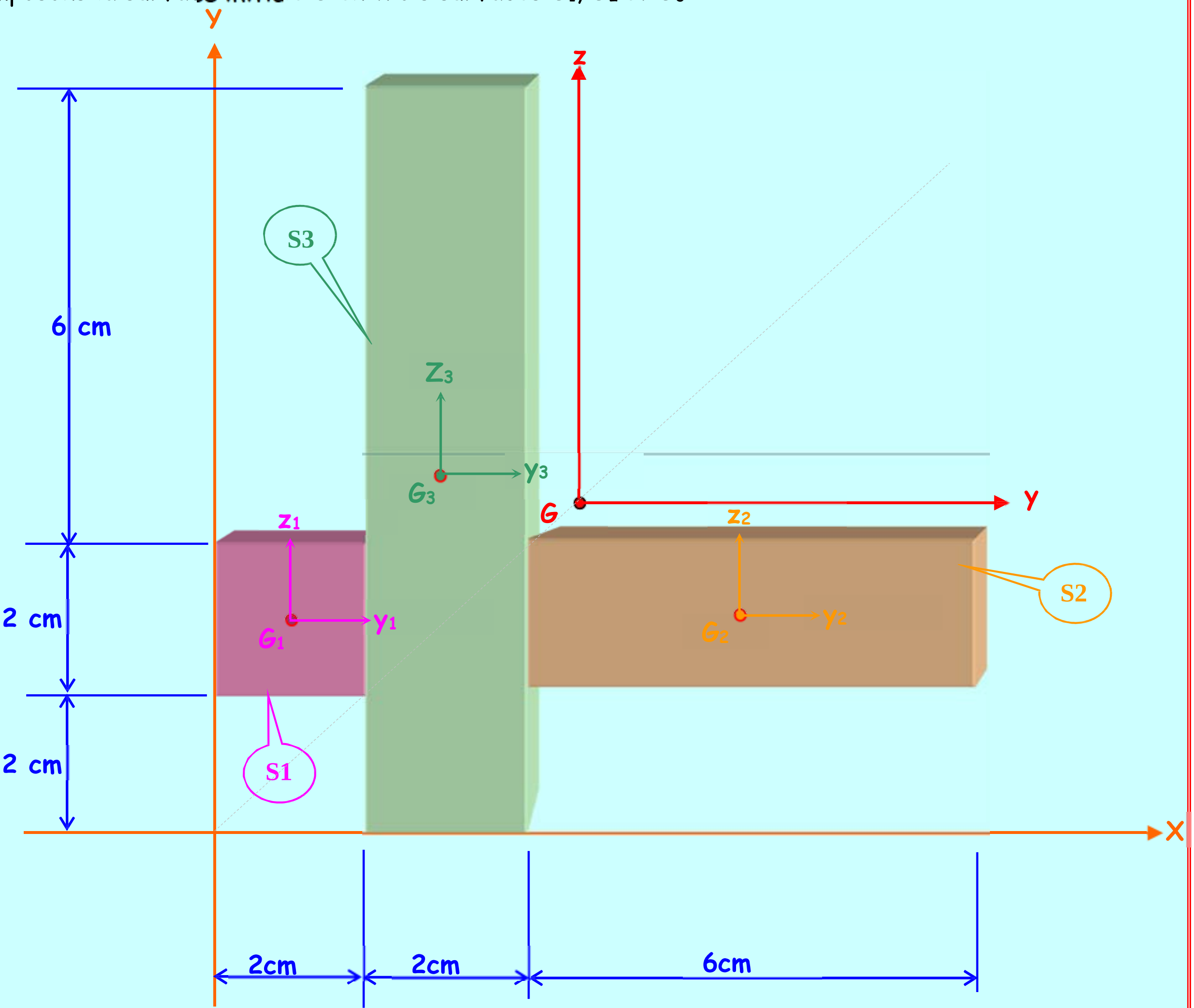
1°) La position du centre de gravité dans le repère x, y.

2°) Les moments d'inertie et le produit d'inertie par rapport aux axes centraux parallèles à x, y.

3°) La position des axes centraux principaux et les moments d'inertie principaux.

1°)

Décomposons la surface initiale S en trois surfaces S_1, S_2 et S_3



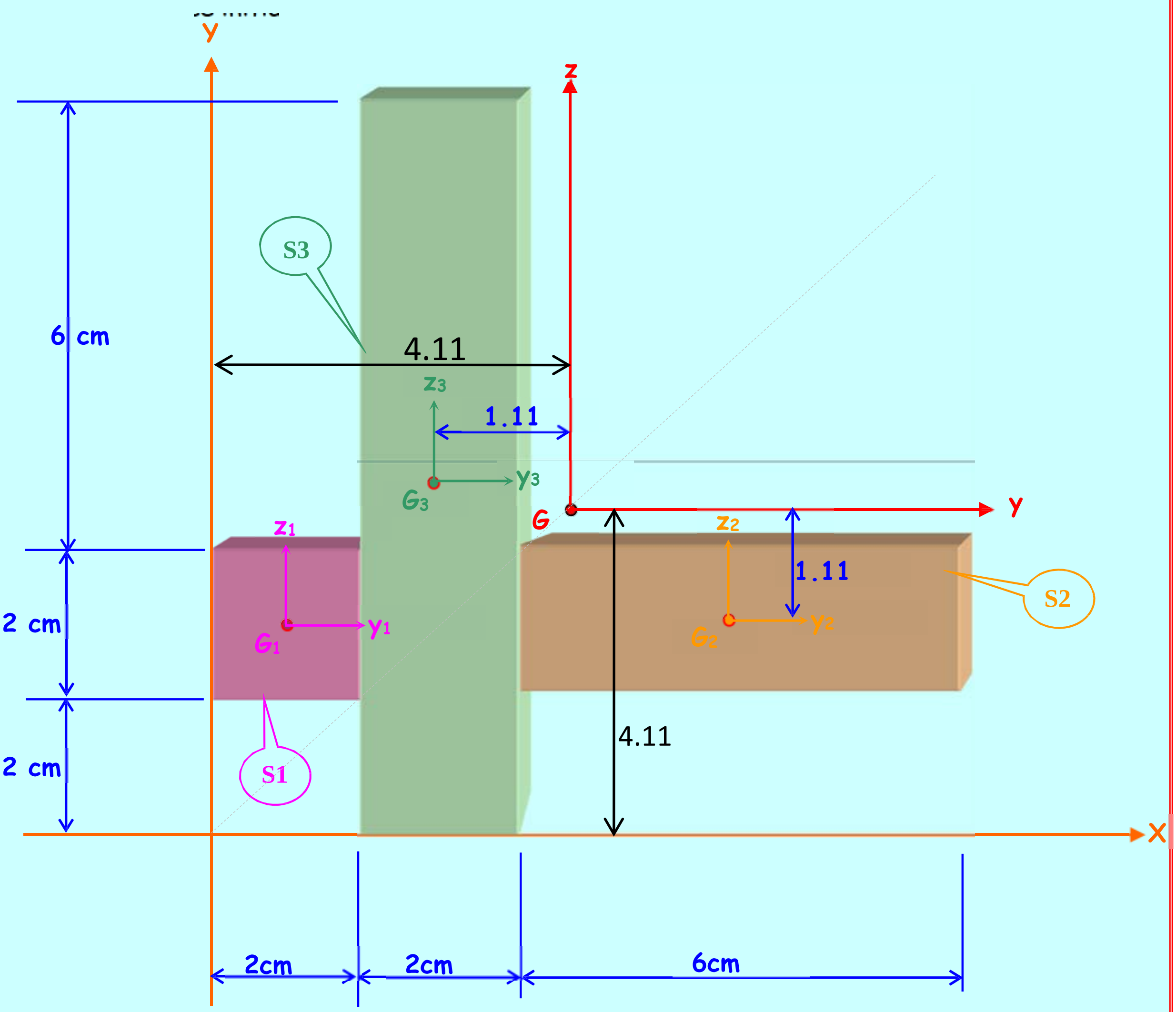
1)

$G_1/_{XY}\left|\begin{array}{l}1cm\\3cm\end{array}\right.$ $G_2/_{XY}\left|\begin{array}{l}7cm\\ \end{array}\right.$ $G_3/_{XY}\left|\begin{array}{l}3cm\\5cm\end{array}\right.$ $A_1=4cm^2$ $A_2=12cm^2$ $A_3=20cm^2$

$$X_G = \frac{X_{G1}A_1 + X_{G2}A_2 + X_{G3}A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \Rightarrow \frac{1\times4+7\times12+3\times20}{4+12+20}$$

$$Y_G = \frac{Y_{G1}A_1 + Y_{G2}A_2 + Y_{G3}A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \Rightarrow \frac{3\times4+3\times12+5\times20}{4+12+20}$$

$$G/_{XY}\left|\begin{array}{l}4{,}11cm\\4{,}11cm\end{array}\right.$$



1)

$G_{1/XY}\left|\begin{matrix}1cm\\3cm\end{matrix}\right.$ $\quad G_{2/XY}\left|\begin{matrix}7cm\\ \end{matrix}\right.$ $\quad G_{3/XY}\left|\begin{matrix}3cm\\5cm\end{matrix}\right.$ $\quad$ $A_1=4cm^2$ $\quad$ $A_2=12cm^2$ $\quad$ $A_3=20cm^2$

$$X_G=\frac{X_{G1}A_1+X_{G2}A_2+X_{G3}A_3}{A_1+A_2+A_3}\Rightarrow\frac{1\times4+7\times12+3\times20}{4+12+20}$$

$$Y_G=\frac{Y_{G1}A_1+Y_{G2}A_2+Y_{G3}A_3}{A_1+A_2+A_3}\Rightarrow\frac{3\times4+3\times12+5\times20}{4+12+20}$$

$$G_{/XY}\left|\begin{matrix}4{,}11cm\\4{,}11cm\end{matrix}\right.$$

S_i	S_1	S_2	S3
A_i (cm^2)	4	12	20
$G_{i/yz}$ (cm)	-3.11 -1.11	2.89 -1.11	-1.11 0.89
$I_{y_iy_i}$ (cm^4)	$2^4/12$	$6*2^3/12$	$2*10^3/12$
$I_{y_iz_i}$ (cm^4)	0	0	0

2)

$$I^S_{yy} = I^{S_1}_{yy} + I^{S_2}_{yy} + I^{S_3} \quad \text{avec} \quad I^{Si}_{yy} = I^{S_i}_{y_i y_i} + z^2_{Gi}$$

$$I^S_{yy} = \frac{2^4}{12} + \left(-\frac{10}{9}\right)^2 4 + \frac{6.2^3}{12} + \left(-\frac{10}{9}\right)^2 12 + \frac{2.10^3}{12} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 20$$

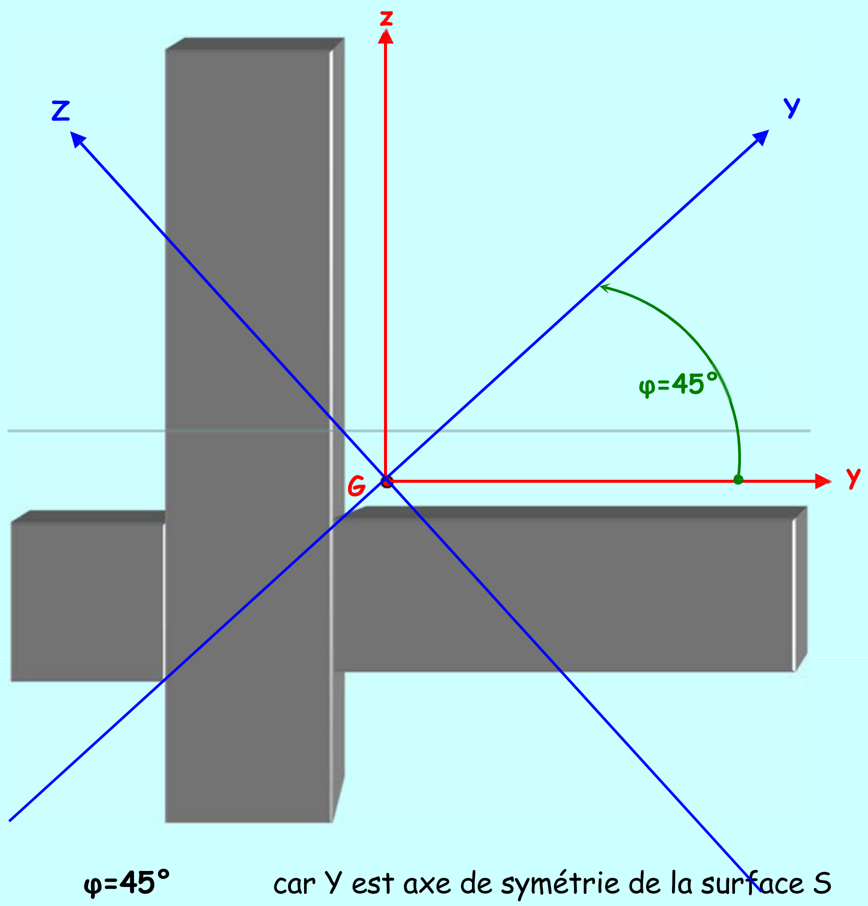
$I_{yy}^S = I_{zz}^S = 207,56$ cm4

$$I^S_{yz} = I^{S_1}_{yz} + I^{S_2}_{yz} + I^{S_3} \quad \text{avec} \quad I^{Si}_{yz} = I^{S_i}_{y_i z_i} + y_{Gi} z_{Gi}$$

$$I^S_{yz} = 0 + \left(\frac{-28}{9}\right)\left(-\frac{10}{9}\right)^2 4 + 0 + \left(\frac{26}{9}\right)\left(-\frac{10}{9}\right)^2 12 + 0 + \left(\frac{-10}{9}\right)\left(\frac{8}{9}\right)^2 20$$

$I_{yz}^S = -44,44$ cm4

<u>Eléments principaux d'Inertie :</u>



φ=45° car Y est axe de symétrie de la surface S

$$I^{Z}_{1Y} = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{yy} - I_{zz}\right)^2 + 4 I_{yz}^2} = \frac{207,56 + 207,562}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(0)^2 + 4(-44,44)^2}$$

$I_Y = 252$ cm^4

$I_Z = 163,12$ cm^4