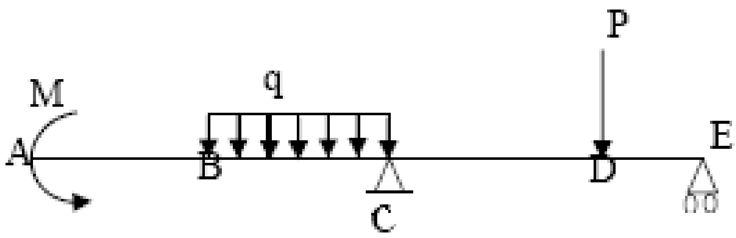
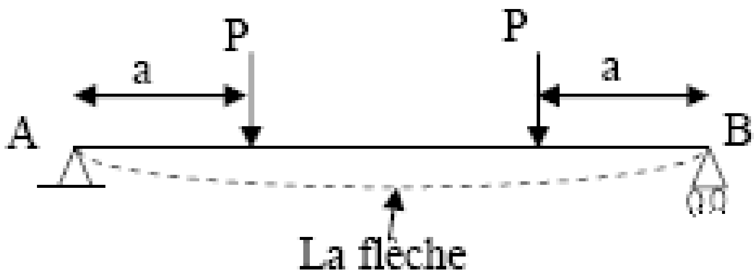
Définition

Une poutre est dite en flexion lorsqu'elle est soumise à des forces ainsi que des moments se trouvant dans un plan contenant l'axe longitudinal de la poutre.

Ces forces agissent perpendiculairement à l'axe longitudinal et le plan contenant les forces est un plan de symétrie de la poutre

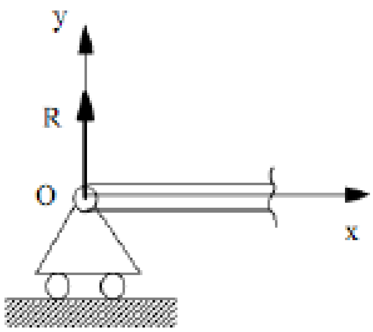




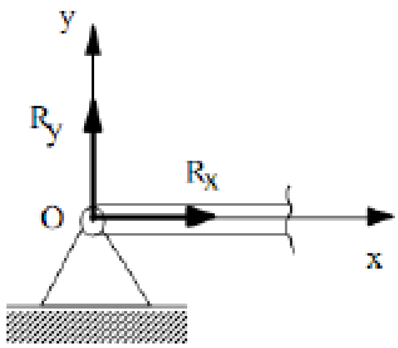
Réactions d'appuis

Dans le cas des problèmes plans, la schématisation des liaisons et des efforts exercés se ramène à trois cas types : appui simple (ponctuel ou plan sans frottement), articulation (pivot) et encastrement.

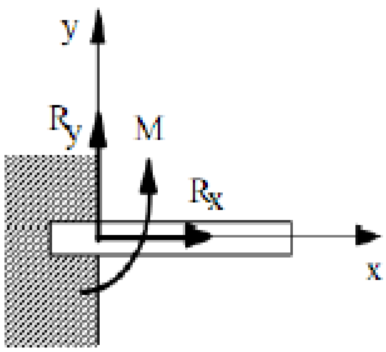
1) Appui simple : Ce type d'appui, laisse à la structure toute liberté de pivoter autour de O (extrémité de la poutre) et de se déplacer perpendiculairement à la droite joignant les points de contact. Si on néglige les frottements, la réaction d'appui a la direction de la droite précitée, et introduit une seule inconnue dans l'étude de la poutre.



2) Appui double (articulation) : Matérialisé par une rotule. Cet appui autorise les rotations d'une extrémité de la poutre ou d'un des éléments constituant la structure. La direction de la réaction R est inconnue, mais la ligne d'action passe par le centre de l'articulation. L'articulation introduit 2 inconnues, par exemple les projections sur deux directions du plan moyen.



3) Encastrement : L'encastrement interdit tout déplacement de la section droite de l'appui. Sa réaction est une force de densité variable répartie sur toute l'étendue de la section. En vertu du principe de Saint Venant, ces forces peuvent être remplacées par leur résultante générale R, et leur moment M rapportés au centre de gravité G. Ce type d'appui introduit donc 3 inconnues, les deux projections de R sur deux axes du plan moyen et l'intensité du moment M qui est perpendiculaire au plan moyen.

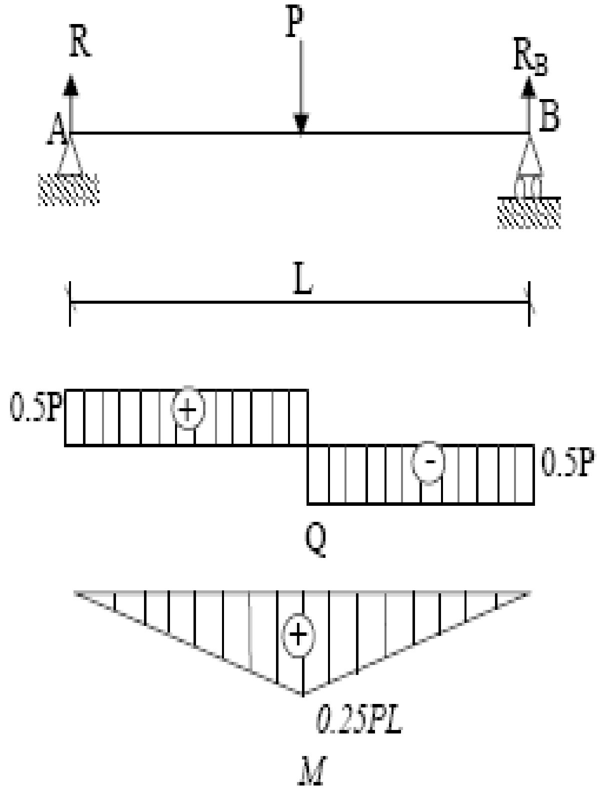


a) **Cas d'une force concentré à mi-travée**

Détermination des réactions :

$\sum M/_A = 0 \Rightarrow R_B = 0.5P$

$\sum F = 0 \Rightarrow R_A = 0.5P$



Expressions des efforts internes :

<u>Tronçon I</u> : $0 \le x \le L/2$

$N = 0$

$Q - 0,5P = 0 \Rightarrow Q = 0,5P$

$M - 0,5Px = 0 \Rightarrow M = 0,5Px$

$M(0) = 0$ et $M(0,5L) = \frac{PL}{4}$

<u>Tronçon II</u> : $L/2 \le x \le L$

$N = 0$

$Q + P - 0,5P = 0 \Rightarrow Q = -0,5P$

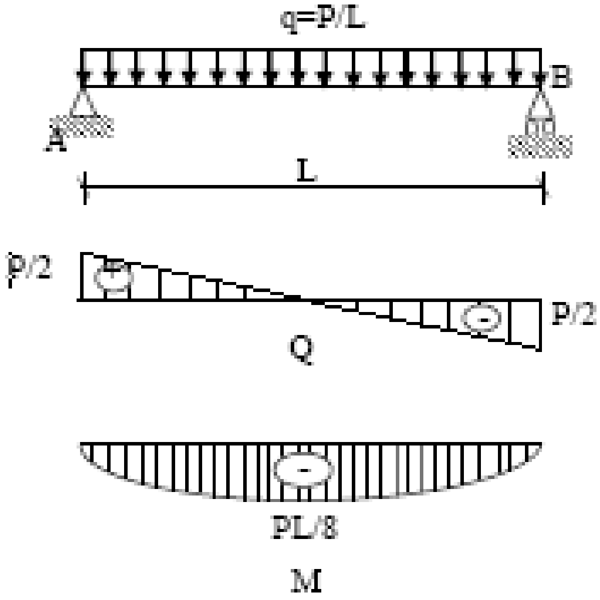
$$M - 0,5Px + P\left(x - \frac{L}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow M = 0,5Px - P\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$M(0) = 0$, $M(L) = 0$ et $M_{max} = M(0,5L) = \frac{PL}{4}$

b) Cas d'une charge uniformément répartie avec q=P/L

Détermination des réactions



$$\sum M/_A = 0 \;\Rightarrow R_B L - (P/L)L(L/2) = 0$$
$$\Rightarrow R_B = 0.5P$$
$$\sum F = 0 \;\Rightarrow R_A + R_B - (P/L)L = 0$$
$$\Rightarrow R_A = 0.5P$$

Expression des efforts internes :

$N = 0$

$$Q - 0,5P + \left(\frac{P}{L}\right)x = 0$$

$$\Rightarrow Q = 0,5P - \left(\frac{P}{L}\right)x = 0$$

$Q(0) = 0,5P$, $Q(0) = -0,5P$

Et $Q(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{L}{2}$

$$M - 0,5Px + 0,5\left(\frac{P}{L}\right)x^2 = 0$$

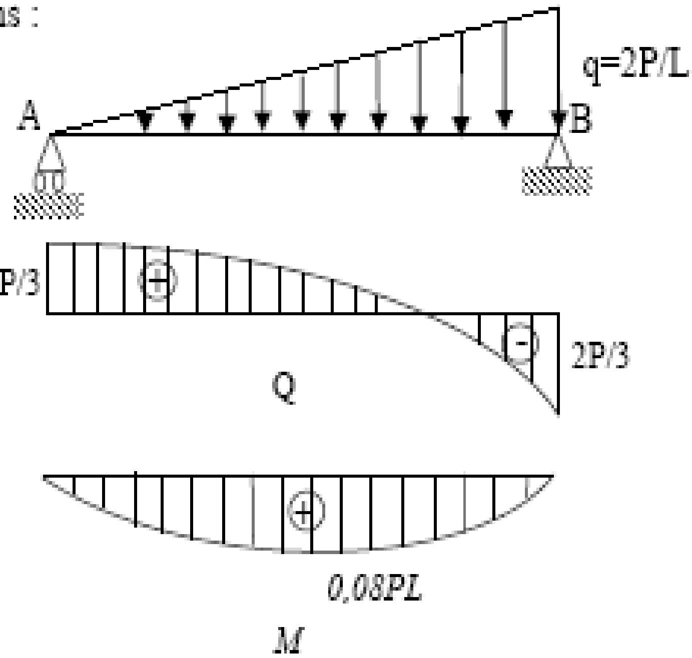
$$\Rightarrow M = 0,5Px - 0,5\left(\frac{P}{L}\right)x^2 = 0$$

$M(0) = 0$, $M(L) = 0$

$$M_{max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL}{8}$$

c) Cas d'une charge triangulaire répartie q=2P/L

Détermination de réactions :



$$\sum M/_A = 0 \;\Rightarrow R_B L - q\left(L/2\right)\left(2L/3\right) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = qL/3 = \left(2/3\right)P$$

$$\sum F = 0 \;\Rightarrow R_A + R_B - qL/2 = 0$$

$$\Rightarrow R_A = qL/6 = P/3$$

Expression des efforts internes :

$$N = 0$$

$$Q - \frac{P}{3} + q\frac{x}{L}\frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow Q = \frac{P}{3} - \frac{qx^2}{2L} = \frac{P}{3} - \frac{Px^2}{L^2}$$

$$Q\left(0\right) = P/3,\;\; Q\left(L\right) = -2P/3$$

$$\Rightarrow Q\left(x\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

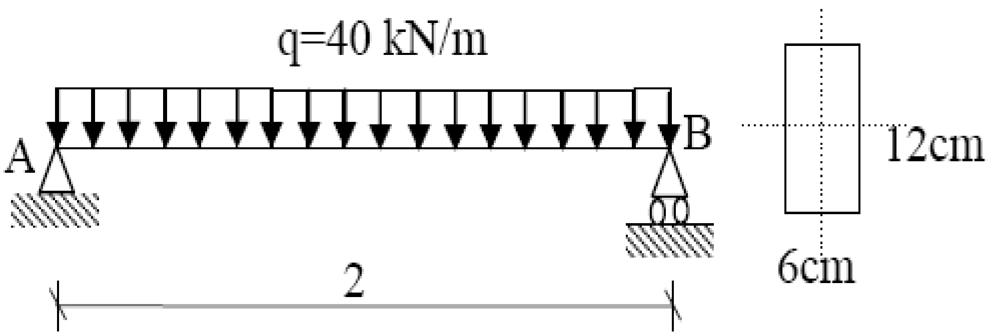
$$M - \frac{P}{3}x + qx\frac{x}{L}\frac{x}{2}\frac{x}{3} = 0$$

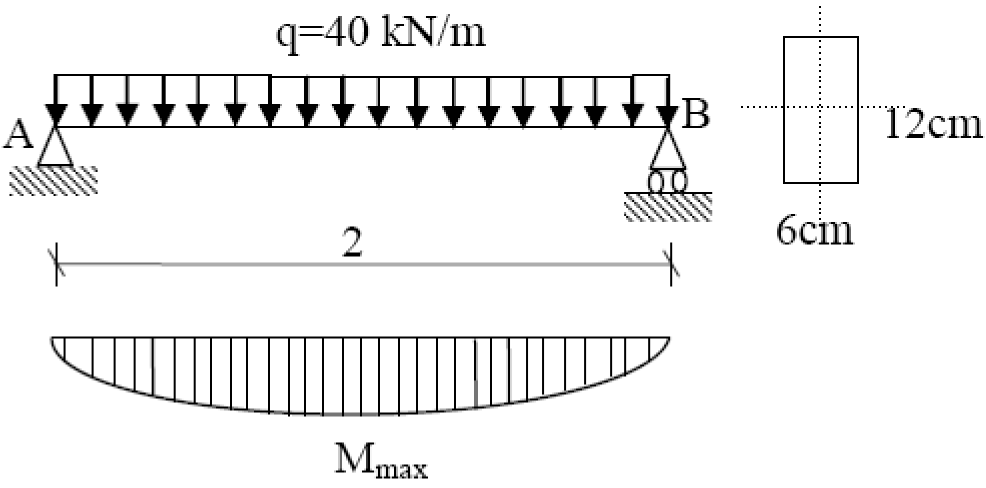
$$\Rightarrow M = \frac{P}{3} - \frac{qx^3}{6L} = \frac{P}{3}x - \frac{Px^3}{3L^2}$$

$$M\left(0\right) = 0,\;\; M\left(L\right) = 0,\;\; M_{max}\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = 0.08PL$$

Exercice 1 :

1) Vérifier la résistance de la poutre ci-dessous si la contrainte admissible [σ]=160 N/mm².
2) Construire le diagramme des moments
3) Déterminer la section dangereuse
4) calculer la contrainte maximale
5) comparer cette contrainte avec [σ]





Solution

Le moment maximal est à mi-travée :

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = 20kNm$$

$$I_z = \frac{60*120^3}{12} = 860*10^4 mm^2$$

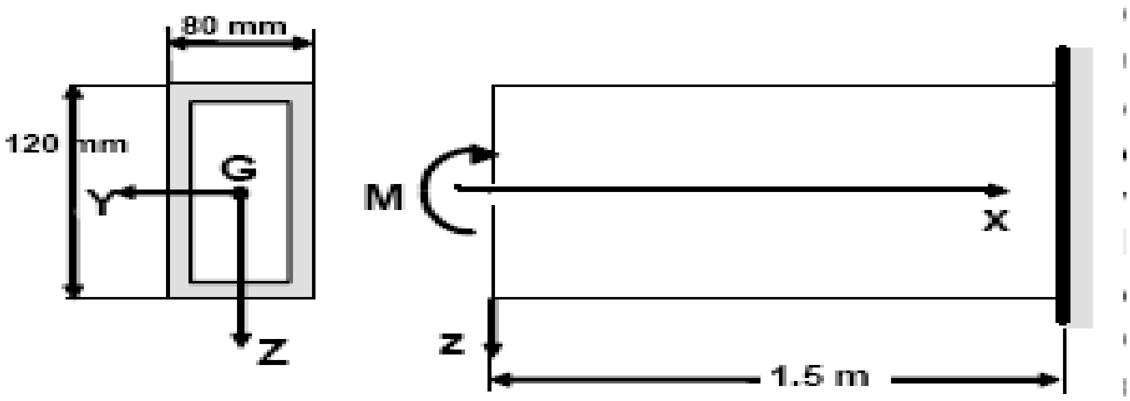
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{2*10^6*60}{864*10^4} = 138,8N/mm^2 < 160N/mm^2$$

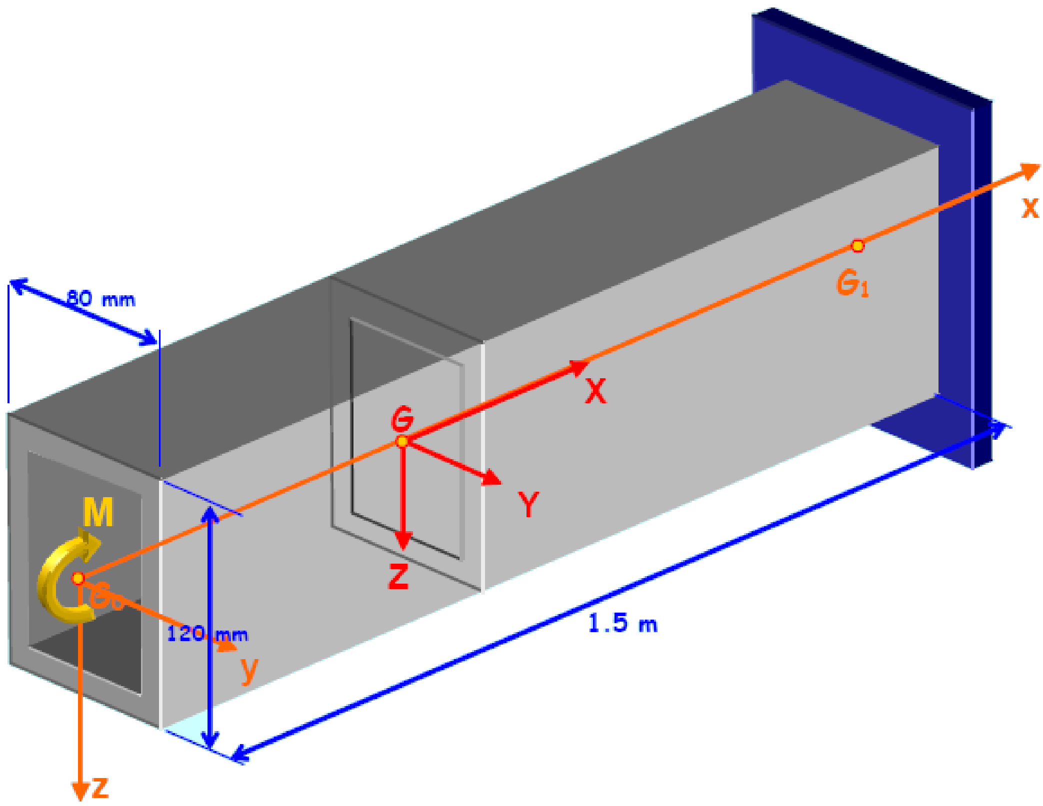
Exercice 2 :

Considérons la poutre ci-contre soumise à un moment de flexion M. La section droite de la poutre est un tube rectangulaire en aluminium d'épaisseur 8 mm.

1) Calculer la valeur du moment M que peut supporter la poutre, sachant que $s_e = s'_e$ = 200 MPa et que le coefficient de sécurité vaut 1,25.

2) Calculer la flèche maximale sachant que E=70 GPa et que la longueur de la poutre est de 1.5 m.

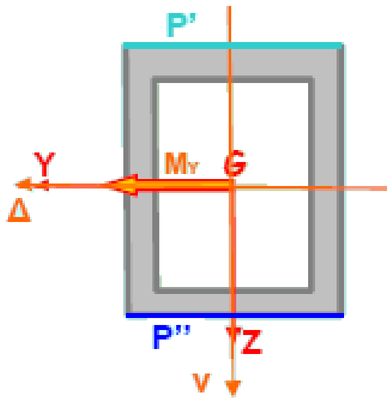




Le moment de flexion My=+M est constant tout au long de la poutre G0G1. Toutes les sections sont donc équidangereuses. Considérons une section quelconque G. les axes ,Y et Z sont principaux d’inertie pour la section tubulaire G (axes de symétrie).
Le moment de flexion MY=+M est porté par l’axe principal Y : Nous sommes donc en présence de flexion pure plane. L’axe neutre « Δ » est donc confondu avec celui qui porte le moment fléchissant Y.
L’ensemble des points P’ et P’’ qui sont les plus éloignés de l’axe neutre (Vmaxi) sont les points les plus contraints.
Les points P’ sont comprimés et P’’ tendus.

$$\sigma_{xx}^{P'} = \frac{M_Y}{I_Y} Z^{P'} = \left| \frac{M}{\frac{80.120^3}{12} - \frac{64.104^3}{12}} (-60) \right| \leq \frac{\sigma_{e'}}{\alpha} \; ;$$

$$\sigma_{xx}^{P''} = \frac{M_Y}{I_Y} Z^{P''} = \frac{M}{\frac{80.120^3}{12} - \frac{64.104^3}{12}} 60 \leq \frac{\sigma_e}{\alpha}$$



D'où : $\frac{M}{\frac{80.120^3}{12} - \frac{64.104^3}{12}} 60 \leq \frac{200}{1{,}25}$ **M≤14,7 kNm**

L'équation de la déformée est donnée par : $w'' = -\frac{M_Y}{EI_Y} = -\frac{M}{EI_Y} \Rightarrow w'' EI_Y = -M$

In tégrons 2fois : $w'' EI_Y = -M$ $w' EI_Y = -Mx + C_1$

$$wEI_Y = \frac{-Mx^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Conditions limites pour calculer les constantes d'intégration : en G_1 :

$$\begin{cases} x = l \rightarrow w = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{Ml^2}{2} \\ x = l \rightarrow w' = 0 \Rightarrow C_1 = Ml \end{cases}$$

L'équation de la déformée est donc : $w = \frac{1}{EI_Y}\left(\frac{-Mx^2}{2} + Mlx - \frac{Ml^2}{2} \right)$

La flèche maximum a lieu en G_0, pour x=0 :

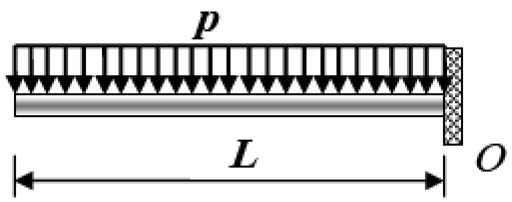
$$w_{max} = -\frac{Ml^2}{2EI_Y}$$

$$w_{max} = -\frac{14{,}7 \times 10^6 \times (1{,}5 \times 10^3)^2}{2 \times 70000 \times \left(\frac{80 \times 120^3}{12} - \frac{64 \times 104^3}{12} \right)}$$

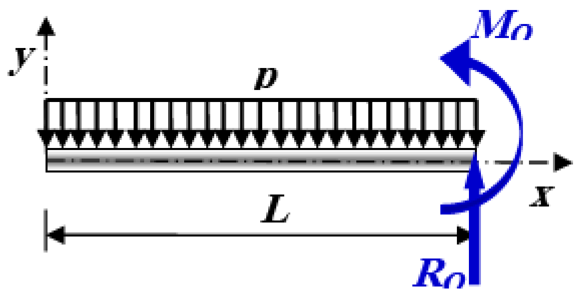
w_{max}=-42,79mm

Exercice 3 :

Pour la poutre console schématisée par la figure ci-dessous, exprimer et tracer la variation de l'effort tranchant et du moment fléchissant le long de la poutre.



Solution



On a, pour $0 \leq x \leq L$:

$$T(x) = -p.(x)$$

$$M(x) = -\frac{p.(x)^2}{2}$$

Ces expressions montrent la variation de l'effort tranchant et du moment fléchissant en fonction de l'abscisse x. Leurs tracés sont montrés sur la figure