Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen **Semestre 2**

Module : ***Contrôle Optimal***
Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

T. D. : THÉORIE LINÉAIRE-QUADRATIQUE

EXERCICE 1 : Minimiser la fonctionelle

$$x^2(1) + \int_0^1 u^2(t)\,dt,$$

sous la contrainte dynamique

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t),\ x(0) = 1.$$

EXERCICE 2 : (contrôle optimal d'un tram)
Soit $T > 0$. Considérons le problème du véhicule se déplaçant en ligne droite, modélisé par le système de contrôle

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = u(t),\ t \in [0,T], \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$

On souhaite, pendant le temps T , maximiser la distance parcourue tout en minimisant l'énergie fournie. On choisit critère

$$C(u) = -x(T) + \int_0^T u^2(t)\,dt.$$

Montrer l'existence d'une trajectoire optimale et la caractériser.

EXERCICE 3 :
Soit $T > 0$. Considérons, le système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_2(t), \\ \dot{x_2}(t) = -10x_2(t) + u(t), \\ x_1(0) = a \in \mathbb{R}, x_2(0) = b \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $x(.)$ et $u(.)$ sont deux applications définies sur $[0;T]$et à valeurs réelles.
Soit le coût C défini par

$$C(u) = \int_0^T \left(x^2(t) + u^2(t)\right) dt.$$

1) Montrer l'existence d'une trajectoire optimale minimisant le coût et la caractériser. Quelle est la valeur optimale du coût ?
2) Résoudre l'equation de Riccati, écrire le contrôle optimal comme un feedback et déterminer (à nouveau) la valeur minimale atteinte par le critère.

EXERCICE 4 : Contrôle de la vitesse avec critère quadratique.

Soit $T > 0$. Considérons, le système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $x(.)$ et $u(.)$ sont deux applications définies sur $[0;T]$et à valeurs réelles. et on veut minimiser le coût C défini par

$$C(u) = \int_0^T \left(x^2(t) + u^2(t)\right) dt.$$

1) Déterminer la trajectoire optimale, le contrôle optimal et la valeur minimale atteinte par le critère.

2) Résoudre l'equation de Riccati, écrire le contrôle optimal comme un feedback et déterminer (à nouveau) la valeur minimale atteinte par le critère.

EXERCICE 5 : On considère le système contrôlé :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) = u(t), \\ x(0) = 0, x'(0) = 1. \end{cases}$$

1) Quel est le comportement de la solution en l'absence de contrôle ?

2) On désire stabiliser la solution de ce système vers l'origine par la méthode de Riccati stationnaire, en minimisant le coût

$$C(u) = \int_0^{+\infty} \left(x^2(t) + x'^2(t) + u^2(t)\right) dt.$$

2.1) Montrer que la solution de l'équation de Riccati stationnaire est

$$E = \begin{pmatrix} -\alpha\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

où $\alpha = \sqrt{2\sqrt{2}-1}.$

2.2) Donner l'expression du contrôle optimal.

2.3) Montrer que la solution du système bouclé est

$$x(t) = \frac{2}{\beta} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin\left(\frac{\beta t}{2}\right),$$

où $\beta = \sqrt{2\sqrt{2}+1}.$

EXERCICE 6 : Montrer que la solution de l'équation de Riccati stationnaire pour le problème LQ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = u(t), \end{cases}$$

$$C(u) = \int_0^{+\infty} \left(x^2(t) + y^2(t) + u^2(t)\right) dt,$$

est

$$E = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen A.U. : 2019-2020.

Module : Contrôle optimal.

Niveau : Première Année Master Biomathématiques et Modélisation.

T.D. : Théorie Linéaire quadratique.

(Corrigé).

Exercice 1 : On a le problème suivant

$$(P1) \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \\ x(0) = 1, \\ \min\limits_{u \in \mathbb{R}} \left(x^2(1) + \int_0^1 u^2(t)\, dt \right). \end{cases}$$

Pour cet exercice, on a $A(t) = B(t) = 1$

$Q = 1$, $W(t) = 0$ et $U(t) = 1$.

D'après le cours de la théorie linéaire quadratique la trajectoire x, associé au contrôle u, est optimale pour le problème LQ (P1) si et seulement s'il existe un vecteur adjoint $\lambda(t)$ vérifiant pour tout $t \in [0,1]$

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda(t)A(t) + x(t)W(t)$$

et la condition finale

$$\lambda(1) = -x(1)\,Q.$$

De plus le contrôle optimal u s'écrit, pour tout $t \in [0,1]$,

$$u(t) = \frac{B(t)\lambda(t)}{U(t)}.$$

C'est-à-dire, on a :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\lambda(t), \quad t \in [0,1], \\ \lambda(1) = -x(1), \\ u(t) = \lambda(t). \end{cases}$$

Alors on a, $\lambda(t) = -x(1)\,e^{1-t}$ (Après calcul),

et $u(t) = \lambda(t) = -x(1)\,e^{1-t}$.

En remplace dans l'équation dans P1 avec la condition initiale, on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - x(1)\, e^{1-t} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Ce qui donne,

$$x(t) = e^{t} + \frac{e^{2-t}}{1+e^{2}} - \frac{e^{2+t}}{1+e^{2}}$$ La trajectoire optimale.

Par suite,

$$\begin{aligned} u(t) &= -x(1)\, e^{1-t} \\ &= -\left[e + \frac{e}{1+e^{2}} - \frac{e^{3}}{1+e^{2}}\right] e^{1-t} \\ &= \boxed{-\left[e^{2} + \frac{e^{2}}{1+e^{2}} - \frac{e^{4}}{1+e^{2}}\right] e^{-t}} \end{aligned}$$

Exercice 2 : Contrôle optimal d'un tram.

On a le problème suivant

$$(P2) \begin{cases} \ddot{x}(t) = u(t), \; t \in [0,T], \\ x(0) = 0, \; \dot{x}(0) = 0, \\ \min\limits_{u \in \mathbb{R}} C(u), \end{cases}$$

avec $T > 0$ et $C(u) = -x(T) + \int_0^T u^2(t)\,dt$.

On pose $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x}, \end{cases}$

on obtient : $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$

Pour cet exemple, on a :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } U(t) = 1.$$

On a donc le problème de contrôle optimal suivant :

$$(P3)\begin{cases} \dot{X} = A.X + Bu, & t \in [0,T], \\ X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \min\limits_{u \in \mathbb{R}} C(u), \end{cases}$$

avec
$$C(u) = g(X(T)) + \int_0^T u^2(t)\,dt$$
$$= -x_1(T) + \int_0^T u^2(t)\,dt.$$

La trajectoire X, associée au contrôle u, est optimale pour le problème (P3), s'il existe un vecteur adjoint $\lambda(t)$ tq

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda(t)\,A(t),$$

et la condition finale

$$\lambda(T) = -\frac{1}{2}\nabla g(X(T)).$$

1.5°

De plus le contrôle optimal u s'écrit

$$u(t) = U^{-1}(t)\; B^{T}(t)\, \lambda^{T}(t)$$

$$= 1.\ (0 \;\; 1)\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_2(t).$$

Alors on a

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = \left(\dot{\lambda}_1(t) \;\; \dot{\lambda}_2(t)\right) = -\left(\lambda_1(t) \;\; \lambda_2(t)\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda(T) = \left(\lambda_1(T) \;\; \lambda_2(T)\right) = -\frac{1}{2}(-1 \;\; 0) \\ u(t) = \lambda_2(t). \end{cases}$$

C'st-à-dire
$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = 0, \quad t \in [0,T], \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t), \quad t \in [0,T], \\ \lambda_1(T) = \frac{1}{2} \\ \lambda_2(T) = 0 \\ u(t) = \lambda_2(t), \quad t \in [0,T] \end{cases}$$

Ce qui donne,

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{2}, \quad t \in [0, T],$$

$$\lambda_2(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{T}{2}, \quad t \in [0, T],$$

et

$$u(t) = \lambda_2(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{T}{2}.$$

Comme

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = u(t), \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{T}{2}, \quad t \in [0, T], \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\dot{x}(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{T}{2}t$$

Par suite

$$\boxed{x(t) = -\frac{t^3}{12} + \frac{T}{4}t^2}$$ La trajectoire optimale.

$$\boxed{u(t) = -\frac{t}{2} + \frac{T}{2}}$$ Le contrôle optimal.

Exercice 04 : Contrôle de la vitesse avec critère quadratique.

Soit $T>0$. Considérons le système de contrôle

$$(P4)\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On veut minimiser le coût C défini par

$$C(u) = \int_0^T \left(x^2(t) + u^2(t)\right) dt.$$

1°)

1.1°) Détermination de la trajectoire optimale.

Pour cet exercice on a :

$$A(t) = 0, \; B(t) = 1, \; Q = 0, \; W(t) = U(t) = 1.$$

D'après le cours de la théorie linéaire quadratique la trajectoire x, associée au contrôle u, est optimale pour le problème LQ (P4) si et seulement s'il existe un vecteur adjoint $\lambda(t)$ vérifiant pour tout $t \in [0,T]$

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda(t) A(t) + x(t) W(t),$$

et la condition finale

$$\lambda(T) = -x(T) Q.$$

De plus le contrôle optimal u s'écrit, pour tout $t \in [0,T]$

$$u(t) = \frac{B(t)\lambda(t)}{U(t)}.$$

C'est-à-dire,

$$\text{I} \quad \begin{cases} \dot{\lambda}(t) = x(t), & t \in [0,T] \\ \lambda(T) = 0 \\ u(t) = \lambda(t), & t \in [0,T]. \end{cases}$$

Comme
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \ddot{\lambda}(t) = \lambda(t), \; t \in [0, T] \\ \dot{\lambda}(0) = x_0, \; \lambda(T) = 0. \end{cases}$$

Alors,

$$\lambda(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t},$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

Maintenant comme $\lambda(T) = 0$ et $\dot{\lambda}(0) = x_0$, on obtient

$$\begin{cases} C_1 e^{T} + C_2 e^{-T} = 0 \\ C_1 - C_2 = x_0. \end{cases}$$

Comme $C_1 = C_2 + x_0$, on remplace dans la 1ère équation on obtient

$$(C_2 + x_0) e^{T} + C_2 e^{-T} = 0.$$

C'st-à-dire,

$$(2 \operatorname{ch} T) . C_2 + x_0 e^{T} = 0.$$

Ce qui donne,
$$C_2 = -\frac{e^{T}}{2 \operatorname{ch} T} x_0.$$

Comme $C_1 = C_2 + x_0$, on obtient

$$C_1 = -\frac{e^T}{2\operatorname{ch}T} x_0 + x_0$$

$$= \frac{2\operatorname{ch}T - e^T}{2\operatorname{ch}T} x_0$$

$$= \frac{e^{-T}}{2\operatorname{ch}T} x_0.$$

En conclusion

$$\lambda(t) = \frac{e^{-T}}{2\operatorname{ch}T} x_0 e^t - \frac{e^{+T}}{2\operatorname{ch}T} x_0 e^{-t}$$

$$= \boxed{\frac{\operatorname{sh}(t-T)}{\operatorname{ch}T} x_0}$$

La trajectoire optimale x est donnée par

$$x(t) = \dot{\lambda}(t) \quad (\text{voir } \mathrm{I})$$

$$= \boxed{\frac{\operatorname{ch}(t-T)}{\operatorname{ch}T} x_0}$$

1.11°

1.2°) Détermination du contrôle optimal

On a,

$$u(t) = \lambda(t) \quad (\text{Voir } \text{I})$$

$$= \boxed{\frac{Sh(t-T)}{Ch\,T} x_0}$$

1.3°) La valeur minimale atteinte par le critère.

On a,

$$\min_{u \in \mathbb{R}} C(u) = \min_{u \in \mathbb{R}} \left(\int_0^T (x^2(t) + u^2(t))\,dt \right)$$

$$= \int_0^T \left(\frac{Ch^2(t-T)}{Ch^2 T} x_0^2 + \frac{Sh^2(t-T)}{Ch^2 T} x_0^2 \right) dt$$

$$= \frac{x_0^2}{Ch^2(T)} \int_0^T \left(Ch^2(t-T) + Sh^2(t-T) \right) dt$$

$$= \frac{x_0^2}{Ch^2 T} \left(\int_0^T (2\,Ch^2(t-T) - 1)\,dt \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{car} \\ Ch^2 y - Sh^2 y \\ = 1,\ \forall y \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

1.12°

$$= \frac{x_0^2}{ch^2 T}\left(\int_0^T 2\left(\frac{e^{t-T}+e^{T-t}}{2}\right)^2 dt - T\right)$$

$$= \frac{x_0^2}{ch^2 T}\left(\int_0^T \frac{e^{2(t-T)}+2+e^{2(T-t)}}{2}\, dt - T\right)$$

$$= \frac{x_0^2}{ch^2 T}\left(\left[\frac{e^{-2T}}{4}\left(e^{2T}-1\right)+T \cancel{+} \frac{e^{2T}}{4}\left(e^{-2T}-1\right)-T\right]\right)$$

$$= \frac{x_0^2}{ch^2 T}\left(\frac{e^{2T}-e^{-2T}}{4}\right)$$

$$= \frac{x_0^2\, sh(2T)}{2\, ch^2 T}$$

$$= \frac{x_0^2\, 2\, ch(T)\, sh(T)}{2\, ch^2(T)}$$ (car $sh(2\alpha) = 2\, ch\alpha\, sh\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$).

$$= \boxed{x_0^2\, th(T)}$$

1.13°

2°)

2.1°) La résolution de l'équation de Riccati.

L'équation de Riccati avec la condition finale sont données par

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = W(t) - A^T(t)E(t) - E(t)A(t) - E(t)B(t)U^{-1}(t)B^T(t)E(t), \\ \\ E(T) = -Q. \end{cases}$$

Pour notre exercice, on a

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = 1 - E^2(t), \\ E(T) = 0. \end{cases}$$

On a,
$$\frac{dE}{1-E^2} = dt.$$

Alors,
$$\int_{E(t)}^{0} \frac{dE}{1-E^2} = T - t.$$

C'est-à-dire,

$$\frac{1}{2}\int_{E(t)}^{0}\left(\frac{1}{1-E}+\frac{1}{1+E}\right)dE = T-t.$$

C'est-à-dire,

$$\frac{1}{2}\left[\Big[-\ln|1-E|\Big]_{E(t)}^{0}+\Big[\ln|1+E|\Big]_{E(t)}^{0}\right]=T-t.$$

C'est-à-dire,

$$\ln\left|\frac{1-E(t)}{1+E(t)}\right| = 2(T-t).$$

C'est-à-dire,

$$\frac{1-E(t)}{1+E(t)} = +e^{2(T-t)} \qquad (\text{car } E(T)=0)$$

C'est-à-dire

$$1-E(t) = e^{2(T-t)} + e^{2(T-t)}E(t).$$

C'st-à-dire,

$$E(t) = \frac{1 - e^{2(T-t)}}{1 + e^{2(T-t)}}$$

C'st-à-dire,

$$E(t) = \frac{e^{t-T} - e^{T-t}}{e^{t-T} + e^{T-t}}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{Sh}(t-T)}{2\,\mathrm{ch}(t-T)} = \boxed{\mathrm{th}(t-T)}$$

2.2°) Le contrôle optimal comme un feedback.

D'après le cours, on a

$$u(t) = U(t)^{-1} B(t)^{T} E(t) x(t)$$

$$= E(t) x(t)$$

$$= \mathrm{th}(t-T)\, x(t)$$

2.3°) La valeur minimale atteinte par le critère.

On a, $S_T(x_0) = -x_0 E(0) x_0$ ($S_T(x_0)$: La valeur minimale atteinte par le critère). Voir le cours.

$$= \boxed{\mathrm{th}(T)\, x_0^2}$$

1.16°

Exercice 05 : On considère le système contrôlé

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) = u(t), \\ x(0) = 0, \ \dot{x}(0) = 1. \end{cases}$$

1°) Le comportement de la solution si $u \equiv 0$.

Si $u \equiv 0$, on a

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) = 0, \\ x(0) = 0, \ \dot{x}(0) = 1. \end{cases}$$

On a, $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, avec $C_1 \in \mathbb{R}$ et $C_2 \in \mathbb{R}$.

Comme $x(0) = 0$, on obtient $C_1 = 0$.

D'autre part comme $\dot{x}(0) = 1$, on obtient $C_2 = 1$.

Alors,

$$\boxed{x(t) = \sin t}$$

2°) On considère le coût

$$C(u) = \int_0^{+\infty} \left(x^2(t) + \dot{x}^2(t) + u^2(t) \right) dt.$$

2.1°) Montrons que la solution de l'équation de Riccati stationnaire est

$$E = \begin{pmatrix} -\alpha\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

où $\alpha = \sqrt{2\sqrt{2}-1}$.

On pose $\begin{cases} x_1 = x, \\ x_2 = \dot{x}, \end{cases}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Alors, on a

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

De plus

$$C(u) = \int_0^{+\infty} \left(X^T(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(t) + u(t) \underbrace{U(t)}_{1} u(t) \right) dt.$$

Pour cet exercice, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et $U = 1$.

D'après le cours l'équation de Riccati stationnaire est donnée par

$$A^T E + E A + E B U^{-1} B^T E = W$$

Si on pose $E = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1) \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'st-à-dire

1.19°

$$\begin{pmatrix} -c & -b \\ a & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & a \\ -b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'st-à-dire,

$$\begin{pmatrix} -c & -b \\ a & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & a \\ -b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'st-à-dire.

$$\begin{pmatrix} -c & -b \\ a & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & a \\ -b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^2 & cb \\ cb & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.20°

C'st-à-dire

$$\begin{pmatrix} -2c+c^2 & -b+a+cb \\ a-b+cb & 2c+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} -2c+c^2 = 1 & (*) \\ 2c+b^2 = 1 & (**) \\ a-b+cb = 0. & (***) \end{cases}$$

D'après $(*)$, on a :

$$c-1 = \pm\sqrt{2}$$

C'st à-dire, $c = 1 \pm \sqrt{2}$.

Si $c = 1+\sqrt{2}$, alors $b^2 = 1-2c$
$= 1-2-2\sqrt{2} = -1-2\sqrt{2} < 0.$
imposible.

Par suite $c = 1-\sqrt{2}$.

1.21°

Donc d'après (**), on a :

$$b^2 = 1 - 2c$$
$$= -1 + 2\sqrt{2}$$

Alors,
$$b = \pm\sqrt{-1+2\sqrt{2}}$$

Maintenant si $b = +\sqrt{-1+2\sqrt{2}}$.

Alors d'après (***), on a :

$$a = (1-c)b$$
$$= \sqrt{2}\sqrt{-1+2\sqrt{2}}.$$

Par suite,
$$E = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sqrt{-1+2\sqrt{2}} & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & \sqrt{-1+2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

a

On a : $a>0$ et $ab - c^2 = \sqrt{2}(-1+2\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2})^2$
$$= -\sqrt{2} + 4 - 3 + 2\sqrt{2}$$
$$= 1 + \sqrt{2} > 0.$$

Alors la matrice E est définie positive contradiction

1.22°

car la matrice A doit être définie négative.

Alors $b = -\sqrt{-1+2\sqrt{2}}$,

et d'après (***), on a

$$a = (1-c)\,b$$
$$= -\sqrt{2}\,\sqrt{-1+2\sqrt{2}}.$$

En conclusion

$$E = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,\sqrt{-1+2\sqrt{2}} & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & -\sqrt{-1+2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

2.2°) L'expression du contrôle optimal.

On a, $$u(t) = U^{-1} B^T E . X(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,\sqrt{-1+2\sqrt{2}} & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & -\sqrt{-1+2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & -\sqrt{-1+2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

1.23°

2.3°) Montrons que la solution du système bouclé est :

$$x(t) = \frac{2}{\beta} e^{-\alpha/2\, t} \sin\left(\frac{\beta}{2} t\right),$$

avec $\beta = \sqrt{2\sqrt{2}+1}$.

On a,

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) = u(t) \\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1. \end{cases}$$

Comme $u(t) = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & -\sqrt{-1+2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$,

on obtient l'équation différentielle

$$\ddot{x}(t) + x(t) = (1-\sqrt{2})\,x(t) - \sqrt{-1+2\sqrt{2}}\,\dot{x}(t).$$

C'est-à-dire,

$$\ddot{x}(t) + \sqrt{-1+2\sqrt{2}}\,\dot{x}(t) + \sqrt{2}\,x(t) = 0.$$

C'est-à-dire,

$$\ddot{x}(t) + \alpha\,\dot{x}(t) + \sqrt{2}\,x(t) = 0 \qquad (\Sigma)$$

1.24°

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle Σ est

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \sqrt{2} = 0.$$

Alors
$$\Delta = \alpha^2 - 4\sqrt{2}$$
$$= (2\sqrt{2} - 1) - 4\sqrt{2}$$
$$= -2\sqrt{2} - 1 < 0.$$

Par suite les solutions de Σ sont :

$$x(t) = k_1 e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin\left(\frac{\beta}{2}t\right) + k_2 e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos\left(\frac{\beta}{2}t\right),$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles

et $\beta = \sqrt{2\sqrt{2} + 1}$.

Comme $x(0) = 0$, alors $k_2 = 0$.

Maintenant $\dot{x}(0) = 1$ entraîne que $\frac{k_1 \beta}{2} = 1$,

C'st-à-dire, $k_1 = \frac{2}{\beta}$.

1.25°

Alors
$$x(t) = \frac{2}{\beta} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin\left(\frac{\beta t}{2}\right).$$

<u>Exercice 6</u> : Déterminons la solution de l'équation de Riccati stationnaire pour le problème LQ
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = u(t), \end{cases}$$

$$C(u) = \int_0^{+\infty} \left(x^2(t) + y^2(t) + u^2(t)\right) dt.$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Alors, on a
$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t),$$

$$C(u) = \int_0^{+\infty} \left(X^T(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(t) + u(t)\, U\, u(t) \right) dt$$

1.26°

Pour cet exemple, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $U = 1$.

D'après le cours l'équation de Riccati stationnaire est donnée par

$$A^T E + EA + EBU^{-1}B^T E = W$$

Si on pose $E = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$,

on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^2 & cb \\ cb & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} c^2 & a+cb \\ a+cb & 2c+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par identification, on a

$$\begin{cases} c^2 = 1 & (*) \\ a+cb=0 & (**) \\ 2c+b^2=1 & (***) \end{cases}$$

1.28°

D'après $(*)$, on a

$$c = \pm 1.$$

Si $c = +1$, alors d'après $(***)$, on obtient

$b^2 = -1$ impossible.

Par suite $c = -1$.

Alors d'après $(***)$, on a $b = \pm\sqrt{3}$.

Si $b = \sqrt{3}$, alors d'après $(**)$, on a

$$a = -cb = \sqrt{3}.$$

Par suite,

$$E = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est définie positive car $a = \sqrt{3} > 0$

et $\det E = 3 - 1 = 2 > 0$

Contradiction car la matrice E doit être

négative.

Par suite $b = -\sqrt{3}$ et d'après $(**)$, $a = -cb = -\sqrt{3}$.

En conclusion

$$E = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

1.30