Chapitre II

Théorème des Quantités de Mouvement (ou Théorème d'Euler)

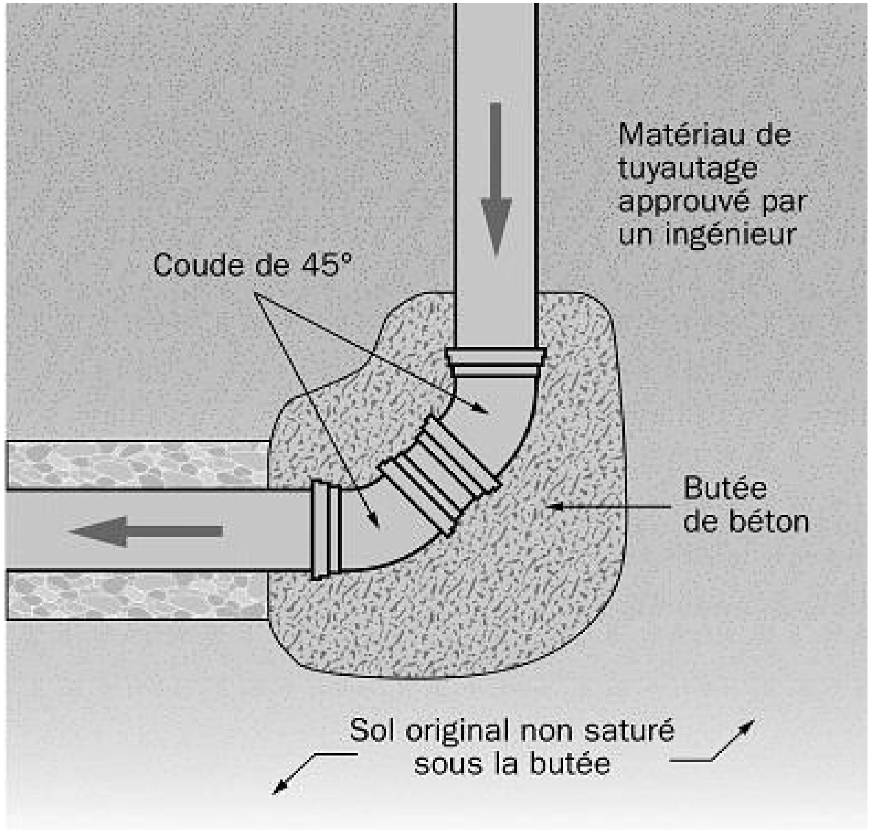
BOUCHELKIA Hamid

* S'applique aux changement de direction ou de section d'un écoulement

Calcul action eau/joint

■Norme, direction et sens

S'applique au calcul de butée



Présentation du théorème d'Euler

Il s'agit ici du théorème d'Euler, et non pas de l'équation d'Euler, vue précédemment. Que ce soit l'équation d'Euler, ou le théorème de Bernoulli qui en découle, ces relations ne nous permettent pas de comprendre pourquoi un tuyau d'arrosage se met à se tortiller lorsque l'on ouvre le robinet, ou encore d'avoir une idée des forces que subissent les canalisations lors du passage d'un fluide.

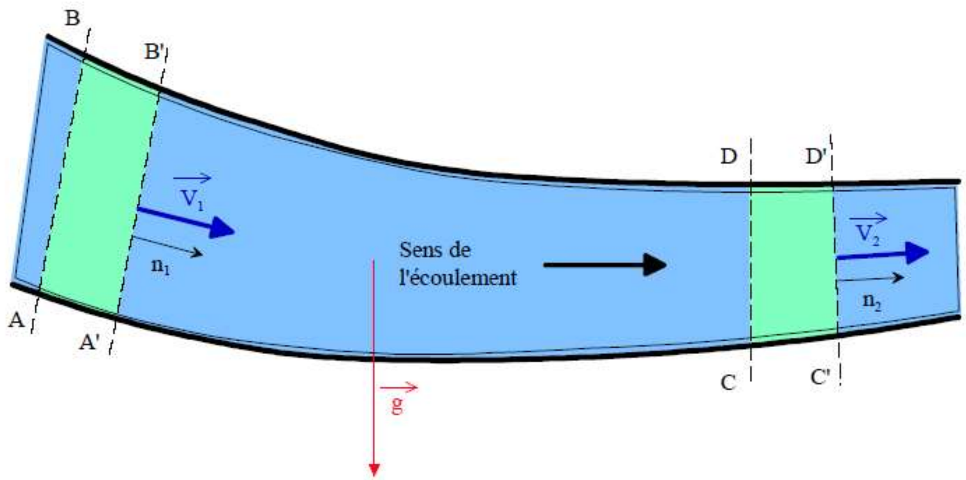
Le théorème d'Euler concerne les systèmes ouverts : il s'agit d'un système pouvant échanger de l'énergie, mais aussi de la matière avec l'extérieur. Il est délimité par une surface fermée, supposée rigide ici, appelée « surface de contrôle », et est constitué par le contenu matériel de cette surface de contrôle.

Le système ouvert est le contenu délimité par une « frontière » (par la pensée ou non).

Ce théorème, également appelé **théorème d'Euler**, s'applique aussi bien aux fluides réels qu'aux fluides parfaits. Il présente l'avantage de s'appliquer à des volumes fluides de dimensions finies sans qu'il soit nécessaire de connaître les champs de vitesse et de contrainte à l'intérieur du domaine

On appelle impulsion ou quantité de mouvement d'une masse ponctuelle m, le produit m

Considérons une surface fermée immobile (S), dessinée à l'intérieur d'un fluide en mouvement. D'après l'équation fondamentale de la dynamique, appliquée au système matériel constitué par tout le fluide contenu à
l'intérieur de la surface (S), on a, à tout instant:

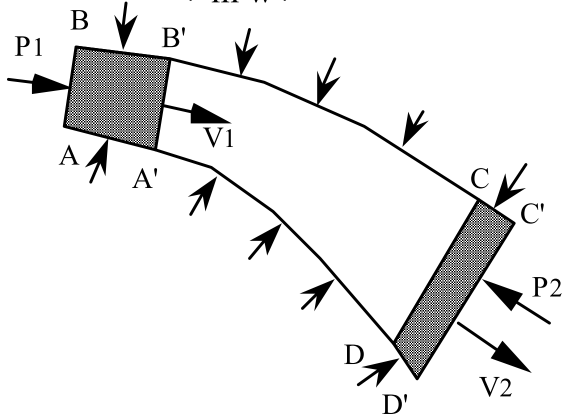


La relation fondamentale de la dynamique nous dit que pour modifier d'une petite quantité la vitesse d'un élément de masse ***m*** entre deux instants très proches ***dt***, il faut appliquer une force ***F.*** Nous obtenons . $F = m \cdot \frac{dV}{dt}$ avec $\frac{dV}{dt} = \gamma$ *(accélération)*

On appelle impulsion ou quantité de mouvement d'une masse ponctuelle m, le produit m de sa masse par sa vitesse $\left(\boldsymbol{m} \cdot \vec{V}\right)$:

$$m\vec{V} = \begin{vmatrix} m\,u \\ m\,v \\ m\,w \end{vmatrix}$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

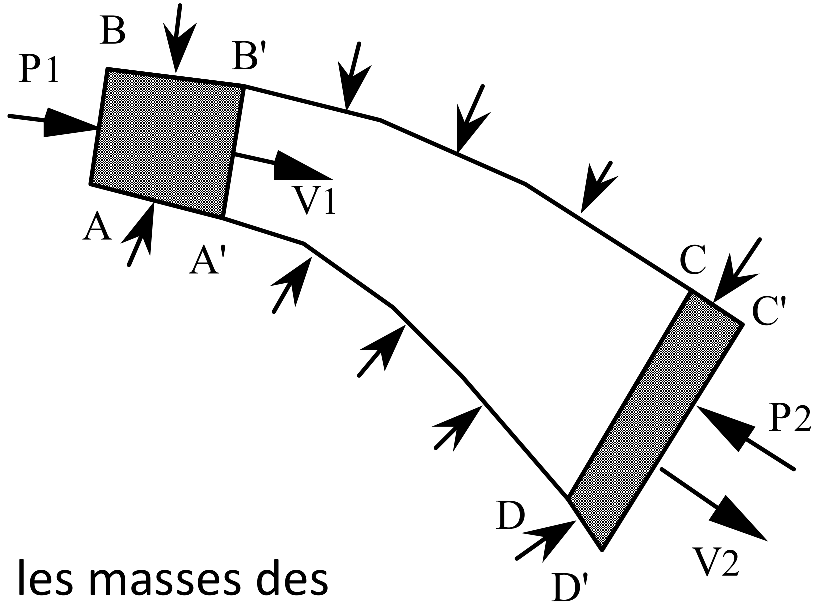


$$\partial\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma} = d\left[\frac{m \cdot \vec{V}}{dt}\right]$$

On applique alors ce principe à un tube de courant dans un écoulement *permanent* d'un fluide *incompressible* :$\sum \vec{F} \cdot dt = d(\sum m \cdot \vec{V})$

Le tube de courant est supposé suffisamment fin pour que les quantités P et $\vec{\mathrm{F}}$ puissent être considérées comme constantes dans une section.

Durant l'instant *dt*, le fluide est venu en A'B'C'D' mais le régime étant permanent, la quantité de mouvement de l'élément A'B'CD n'a pas changé.

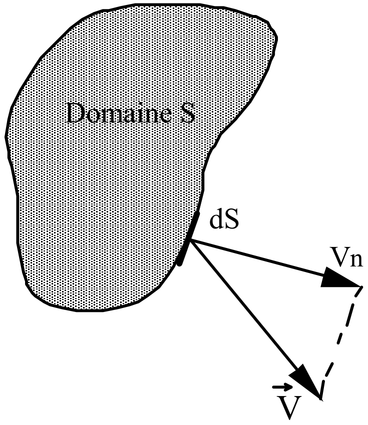


Soit q le débit en masse du tube de courant considéré, les masses des éléments ABB'A' et CDD'C' sont égales à $q \cdot dt$. La variation de quantité de mouvement durant l'intervalle de temps *dt* est donc :

$$d\left(\sum m\vec{V}\right) = q \cdot\ dt\ \cdot \left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right)\ =\ \sum \vec{F} \cdot dt$$

$\sum \vec{F}$ représente la résultante des forces extérieures qui sont :

- les forces de pression sur les parois et sur les bases du tube ;
- les forces de volume telles que la pesanteur ;
- les forces de parois exercées sur le fluide par les surfaces solides.



On peut généraliser ce théorème à une surface quelconque :
Le débit masse sortant par dS par unité de temps est :

$$dq = \rho\left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right) \cdot ds = \rho \cdot Vn \cdot ds$$

Le débit de mouvement est :

$$dq = \rho \cdot Vn \cdot ds$$

Le théorème d'Euler s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sum \vec{F} = \oiint \rho \cdot \vec{V} \cdot \left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right) \cdot ds = \oiint \rho \cdot \vec{V} \cdot Vn \cdot ds}$$

Expression du débit de quantité de mouvement traversant une surface plane normale aux lignes de courant a lorsque celles-ci sont rectilignes et parallèles entre elles.

L'expression générale des quantités de mouvement est:

$$\vec{F} = \oiint \rho \cdot \vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot ds \qquad \vec{F} = \rho \cdot \vec{n} \cdot \oiint \vec{V}^2 \cdot ds$$

si le fluide est isovolume. Soient Q, le débit volumique à travers la section (S) ; $U = \frac{Q}{S}$, la vitesse moyenne dans cette section. En introduisant ces grandeurs dans la dernière expression, on obtient :

$$\vec{F} = \rho \cdot Q \cdot \vec{U} \cdot \frac{\oiint \vec{V}^2 \cdot ds}{U^2 \cdot S}$$

$\vec{U}$ étant le vecteur, d'intensité U, de même direction et de même sens que la demi-normale $\vec{n}$ à la surface plane (S).

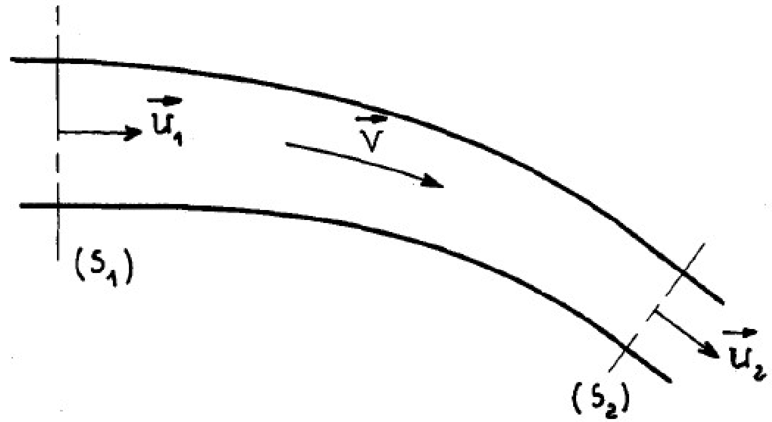
Enfin en posant: $\beta = \frac{\oiint \vec{V}^2 \cdot ds}{U^2 \cdot S}$ On aura finalement: $\boxed{\vec{F} = \beta \cdot \rho \cdot Q \cdot \vec{U}}$

Le coefficient sans dimension β - appelé "coefficient de quantité de mouvement" - serait égal à l'unité si le vecteur vitesse conservait la même valeur en tout point de (S).

Théorème d'Euler dans le cas d'un tube de courant limite par deux sections (s1), (s2) disposées normalement aux trajectoires dans les régions ou celles-ci sont rectilignes et parallèles.

Le fluide étant supposé isovolume et le mouvement permanent, l'équation de quantité de mouvement valable pour un tube de courant quelconque se réduit ici à:

$$\sum \vec{F} = \beta_2 \cdot \rho \cdot Q \cdot \vec{U}_2 - \beta_1 \cdot \rho \cdot Q \cdot \vec{U}_1$$



Utilisation des équations d'Euler pour le calcul des forces hydrauliques sur une surface

Le théorème d'Euler permet de calculer la réaction de l'eau sur un élément. En raisonnant, suivant un tube de courant en régime permanent, les forces qui agissent sur cet élément sont :

- Les forces de volumes:
  - les forces de pesanteur provenant de la gravité : $\rho \cdot g \cdot v$
  - les forces d'inertie :
    - les forces d'accélération pure : 0
    - les forces d'accélération convective :

$$\oiint \rho \cdot \vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot ds$$

Les forces de surfaces :

- les forces de pression sur les surfaces Si : $P \cdot S$
- les forces de frottement de viscosité : 0
- les forces de frottement de turbulence : 0
- l'action du fluide sur l'élément : R

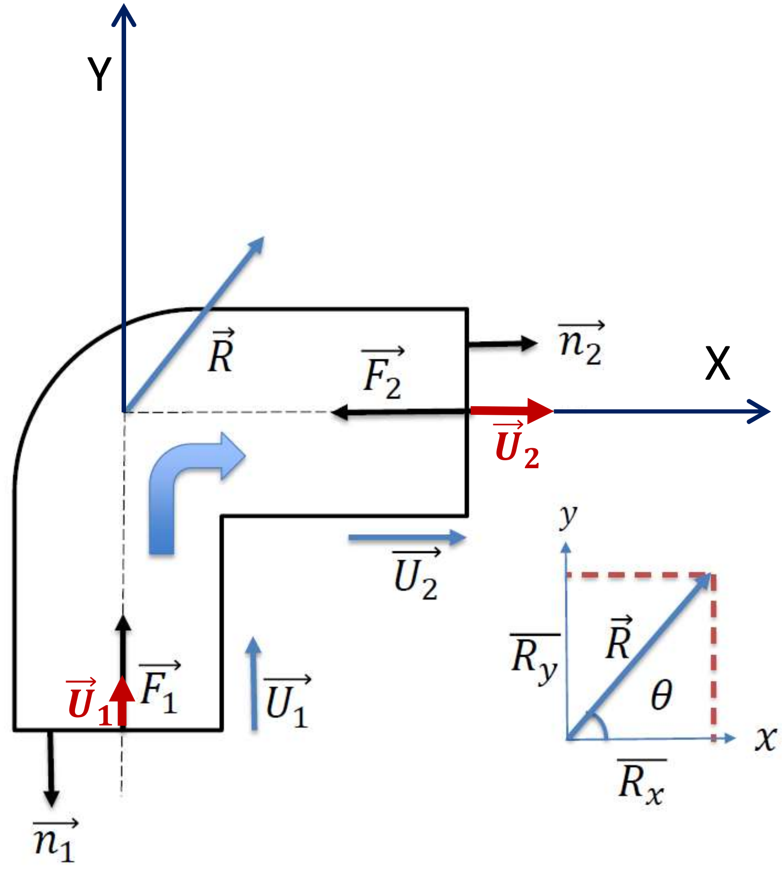
En écrivant l'équilibre de l'ensemble des forces : $\sum \vec{F}$ = Forces d'inertie

$$\boxed{\sum \vec{F} = \sum_i \rho \cdot \vec{V}_i \cdot (\vec{V}_i \cdot \vec{n}_i) \cdot S_i}$$

APPLICATIONS

1. Cas d'un coude 90°:

$$\boxed{\sum \vec{F} = \beta_2 \cdot \rho \cdot Q \cdot \vec{U}_2 - \beta_1 \cdot \rho \cdot Q \cdot \vec{U}_1}$$



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{W} + \vec{R} = \beta_2 \cdot \rho \cdot Q \cdot \vec{U}_2 - \beta_1 \cdot \rho \cdot Q \cdot \vec{U}_1$$

Avec: $\beta_1 = \beta_2 \approx 1$

$\vec{F}_1, \vec{F}_2$: forces de pression

$F_{pression} = P_{eff} \cdot S = (P_{abs} - P_{atm}) \cdot S$

$\vec{W}$: Poids de la masse liquide du volume de contrôle ici, il est négligeable

$\vec{R}$: Réaction des parois du coude sur le liquide ayant les composantes R_x et R_y

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} = \rho \cdot Q \cdot \vec{U}_2 - \rho \cdot Q \cdot \vec{U}_1$$

Projection sur OX

$$-F_2 + R_x = +\rho \cdot Q \cdot U_2 \Leftrightarrow R_x = \rho \cdot Q \cdot U_2 + F_2 = \rho \cdot \frac{Q^2}{S_2} + P_2 \cdot S_2$$

$$\boxed{\Leftrightarrow R_x = \rho \cdot \frac{Q^2}{S_2} + P_2 \cdot S_2}$$

Projection sur OY

$$F_1 + R_y = -\rho \cdot Q \cdot U_1 \Leftrightarrow R_y = -\rho \cdot Q \cdot U_1 - F_1 = -\left(\rho \cdot \frac{Q^2}{S_1} + P_1 \cdot S_1\right)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow R_y = -\left(\rho \cdot \frac{Q^2}{S_1} + P_1 \cdot S_1\right)}$$

Ainsi $R = \|\vec{R}\| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

Et $tg(\theta) = \frac{R_y}{R_x}$

$Si\ S_1 = S_2 = S\ d'où\ U_1 = U_2 = U$

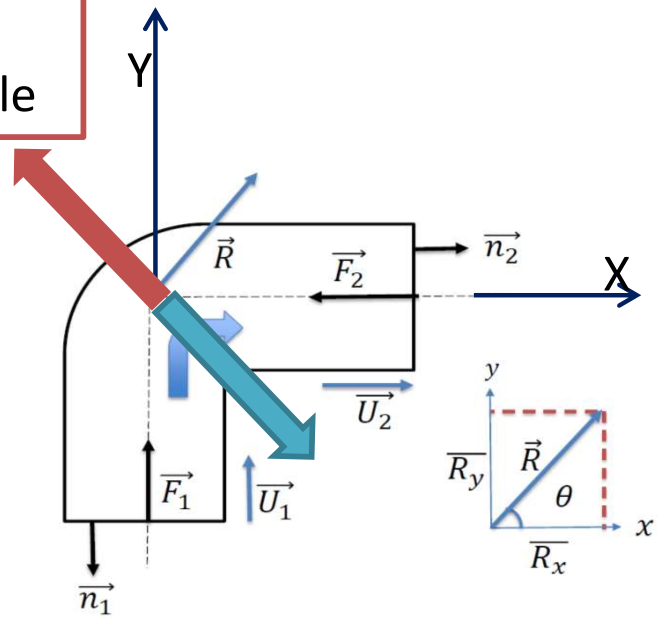
$et\ P_1 = P_2 = P$ car la dénivellation entre S_1 et S_2 est négligeable

$$R_x = \rho \cdot \frac{Q^2}{S} + P \cdot S$$

$$R_y = -\rho \cdot \frac{Q^2}{S} - P \cdot S = -\left(\rho \cdot \frac{Q^2}{S} + P \cdot S\right)$$

Ainsi $R = \|\vec{R}\| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \left(\rho \cdot \frac{Q^2}{S} + P \cdot S\right)\sqrt{2}$

Et $tg(\theta) = \frac{|R_y|}{|R_x|} = 1 \Rightarrow \theta = 45°$

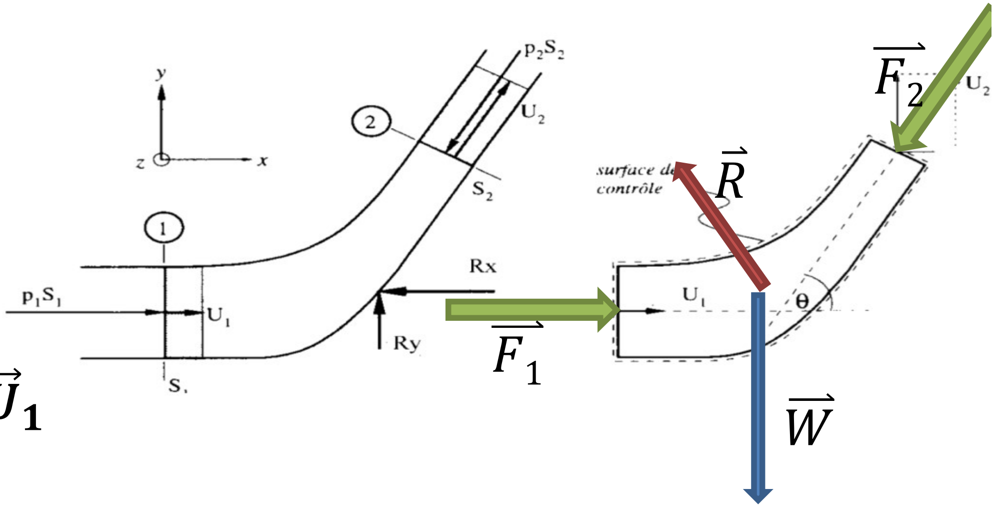


L'action du liquide sur la parois

A=-R

2. Cas d'un coude $\theta°$:

$$\boxed{\sum \vec{F} = \beta_2 \cdot \rho \cdot Q \cdot \vec{U}_2 - \beta_1 \cdot \rho \cdot Q \cdot \vec{U}_1}$$



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{W} + \vec{R} = \beta_2 \cdot \rho \cdot Q \cdot \vec{U}_2 - \beta_1 \cdot \rho \cdot Q \cdot \vec{U}_1$$

Avec: $\beta_1 = \beta_2 \approx 1$

$\vec{F}_1, \vec{F}_2$: forces de pression

$$F_{pression} = P_{eff} \cdot S = (P_{abs} - P_{atm}) \cdot S$$

$\vec{W}$: Poids de la masse liquide du volume de contrôle

ici, il est négligeable

$\vec{R}$: Réaction des parois du coude sur le liquide ayant les composantes R_x et R_y

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} = \rho \cdot Q \cdot \vec{U}_2 - \rho \cdot Q \cdot \vec{U}_1$$

Projection sur OX

$$F_1 - F_2 \cdot \cos(\theta) - R_x = \rho \cdot Q \cdot U_2 \cdot \cos(\theta) - \rho \cdot Q \cdot U_1$$

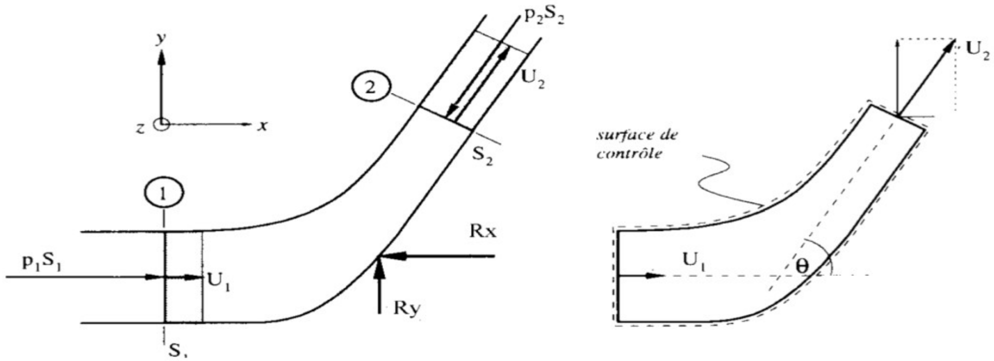
$$\Leftrightarrow R_x = F_1 - F_2 \cdot \cos(\theta) - \rho \cdot Q \cdot U_2 \cdot \cos(\theta) + \rho \cdot Q \cdot U_1$$

$$\Leftrightarrow R_x = P_1 \cdot S_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot \cos(\theta) - \rho \cdot Q \cdot U_2 \cdot \cos(\theta) + \rho \cdot Q \cdot U_1$$

$$\boxed{\Leftrightarrow R_x = P_1 \cdot S_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot \cos(\theta) + \rho \cdot Q \cdot \left(U_1 - U_2 \cdot \cos(\theta)\right)}$$

Projection sur OY

$$-F_2 \cdot sin(\theta) + R_y = \rho \cdot Q \cdot U_2 \cdot sin(\theta)$$
$$\Leftrightarrow R_y = \rho \cdot Q \cdot U_2 \cdot sin(\theta) + F_2 \cdot sin(\theta)$$
$$\Leftrightarrow R_y = (\rho \cdot Q \cdot U_2 + F_2) \cdot sin(\theta)$$

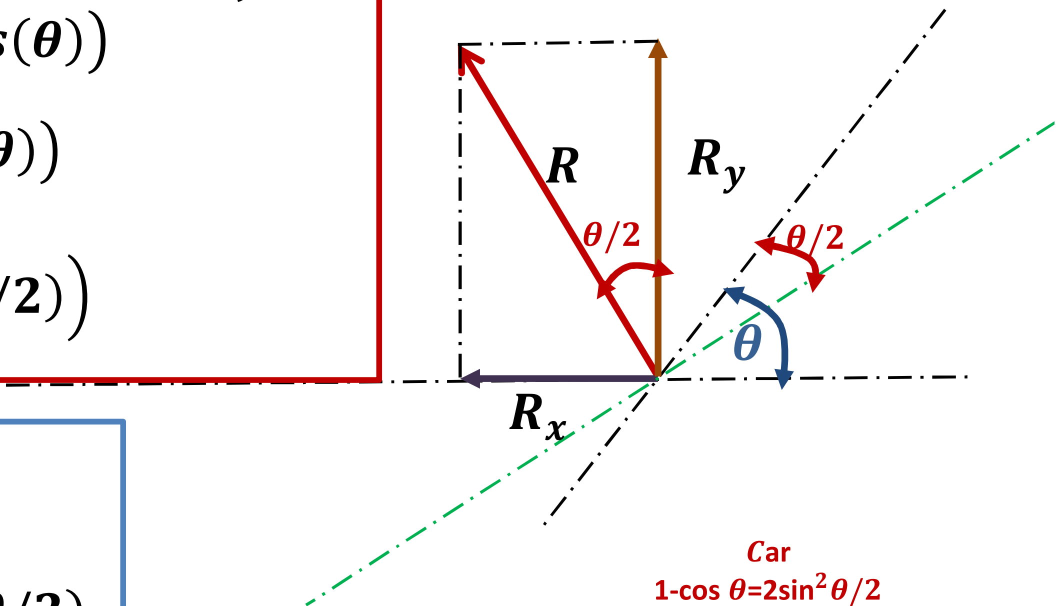


$$\boxed{\Leftrightarrow R_y = \left(\rho \cdot \frac{Q^2}{S_2} + P_2 \cdot S_2\right) \cdot sin(\theta)}$$

$Si\ S_1 = S_2 = S\ d'où\ U_1 = U_2 = U$

$et\ P_1 = P_2 = P$ car la dénivellation entre S_1 et S_2 est négligeable

$$\Leftrightarrow R_x = P \cdot S\big(1 - cos(\theta)\big) + \rho \cdot Q \cdot U \cdot \big(1 - cos(\theta)\big)$$
$$\Leftrightarrow R_x = (P \cdot S + \rho \cdot Q \cdot U)\big(1 - cos(\theta)\big)$$
$$R_x = \left(\rho \cdot \frac{Q^2}{S} + P \cdot S\right)\big(1 - cos(\theta)\big)$$
$$R_x = \left(\rho \cdot \frac{Q^2}{S} + P \cdot S\right)\big(2 \cdot sin^2(\theta/2)\big)$$



$$\Leftrightarrow R_y = \left(\rho \cdot \frac{Q^2}{S} + P \cdot S\right) \cdot sin(\theta)$$
$$R_y = \left(\rho \cdot \frac{Q^2}{S} + P \cdot S\right) \cdot 2 \cdot sin(\theta/2) \cdot con(\theta/2)$$

Car

1-cos θ=2sin$^2\theta/2$

$\frac{1}{2}\sin(\theta) = sin\ \theta/2 \cdot cos\theta/2$

Ainsi

$$R = \|\vec{R}\| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 2\left(\rho \cdot \frac{Q^2}{S} + P \cdot S\right)\sqrt{sin^4(\theta/2) + sin^2(\theta/2) \cdot cos^2(\theta/2)}$$

$$R = \|\vec{R}\| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 2\left(\rho \cdot \frac{Q^2}{S} + P \cdot S\right)\sqrt{sin^2(\theta/2)\,[sin^2(\theta/2) + cos^2(\theta/2)]}$$

$$\boldsymbol{R = \|\vec{R}\| = 2\left(\rho \cdot \frac{Q^2}{S} + P \cdot S\right) sin(\theta/2)}$$

Et $\quad tg(\alpha) = \dfrac{|R_y|}{|R_x|} = \dfrac{sin(\theta/2) \cdot con(\theta/2)}{sin^2(\theta/2)} = \dfrac{cos(\theta/2)}{sin(\theta/2)} = cotg\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 1/tg\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

Ou simplement $\alpha' = \dfrac{\theta}{2}$ et $\alpha = \dfrac{\pi - \theta}{2}$

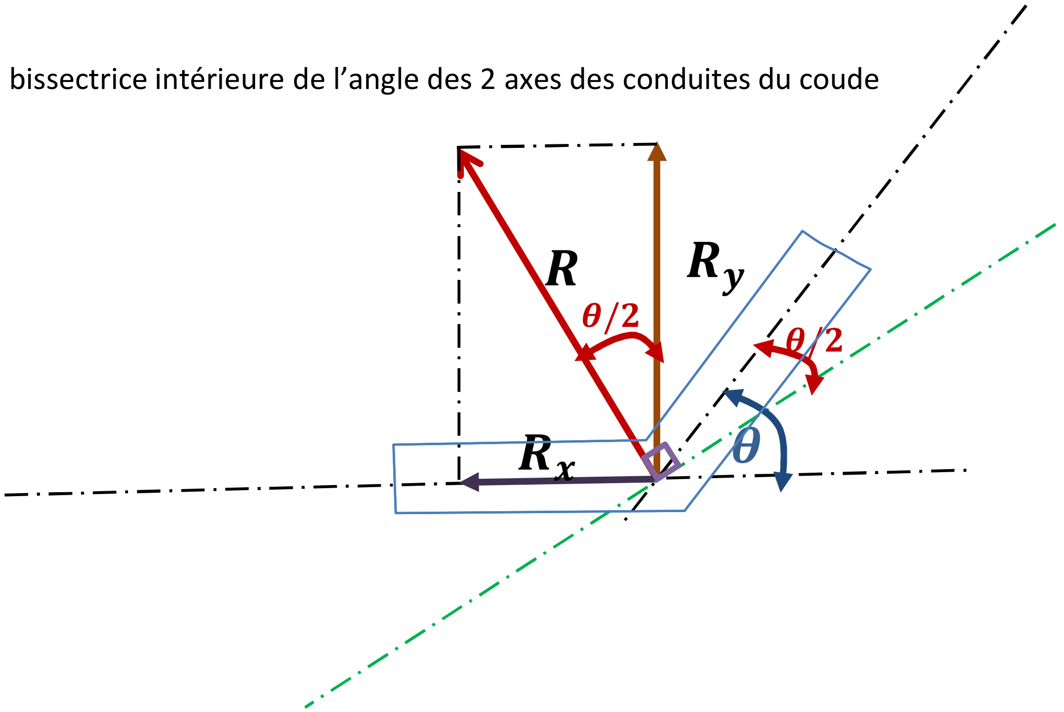
R est dirigé selon la bissectrice intérieure de l'angle des 2 axes des conduites du coude

$$Puisque$$

Et $\quad R = \dfrac{R_y}{cos(\theta/2)} = \dfrac{\left(\rho \cdot \frac{Q^2}{S} + P \cdot S\right) \cdot sin(\theta)}{cos(\theta/2)}$

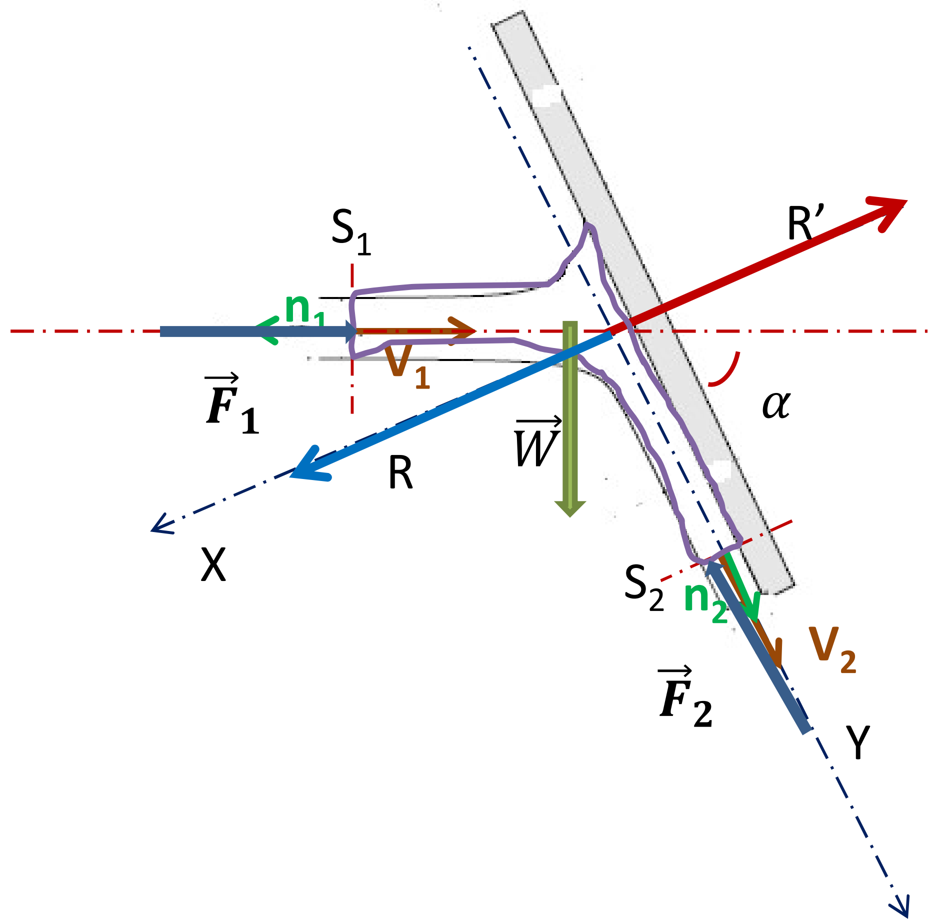
$$= \frac{\left(\rho \cdot \dfrac{Q^2}{S} + P \cdot S\right) \cdot 2 \cdot \sin(\theta/2) \cdot \cos(\theta/2)}{cos(\theta/2)}$$

$$\boldsymbol{R = 2 \cdot \left(\rho \cdot \frac{Q^2}{S} + P \cdot S\right) \cdot \sin(\theta/2)}$$



3. Poussée d'un Jet sur une plaque plane

Considérons un jet de liquide horizontal animé d'une vitesse V heurtant une plaque plane incliné d'une angle α avec l'horizontal (figure en face)
Le jet est supposé cylindrique et à la pression atmosphérique avant d'aborder la plaque
On se propose d'évaluer la poussée du jet « R' " sur la plaque qui égale à R la réaction de la plaque sur le jet en module mais de direction opposée càd $\vec{R'} = -\vec{R}$



Appliquons le théorème d'Euler à la portion fluide comprise entre S et S1

$$\boxed{\sum \vec{F} = \beta_2 \cdot \rho \cdot Q \cdot \vec{V}_2 - \beta_1 \cdot \rho \cdot Q \cdot \vec{V}_1}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{W} + \vec{R} = \rho \cdot Q \cdot \vec{V}_2 - \rho \cdot Q \cdot \vec{V}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{W} - \vec{R'} = \rho \cdot Q \cdot \vec{V}_2 - \rho \cdot Q \cdot \vec{V}_1$$

Projection sur OX

$$-F_1 \cdot sin(\alpha) - R' = +\rho \cdot Q \cdot V_1 \cdot sin(\alpha)$$

$$-P_1 \cdot S_1 \cdot sin(\alpha) - R' = +\rho \cdot Q \cdot V_1 \cdot sin(\alpha) \qquad avec\ \ P_1 = P_{atm} = 0$$

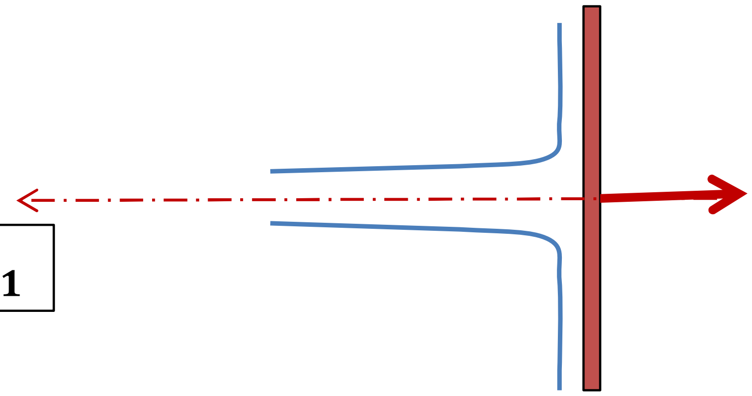
$$Donc \quad R' = -\rho \cdot Q \cdot V_1 \cdot sin(\alpha) \qquad Donc \quad R = \rho \cdot Q \cdot V_1 \cdot sin(\alpha)$$

Si la plaque est verticale (Normale au jet) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

Et la poussée à pour expression:

$$\boldsymbol{Donc} \quad \boldsymbol{R' = \rho \cdot Q \cdot V_1 \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

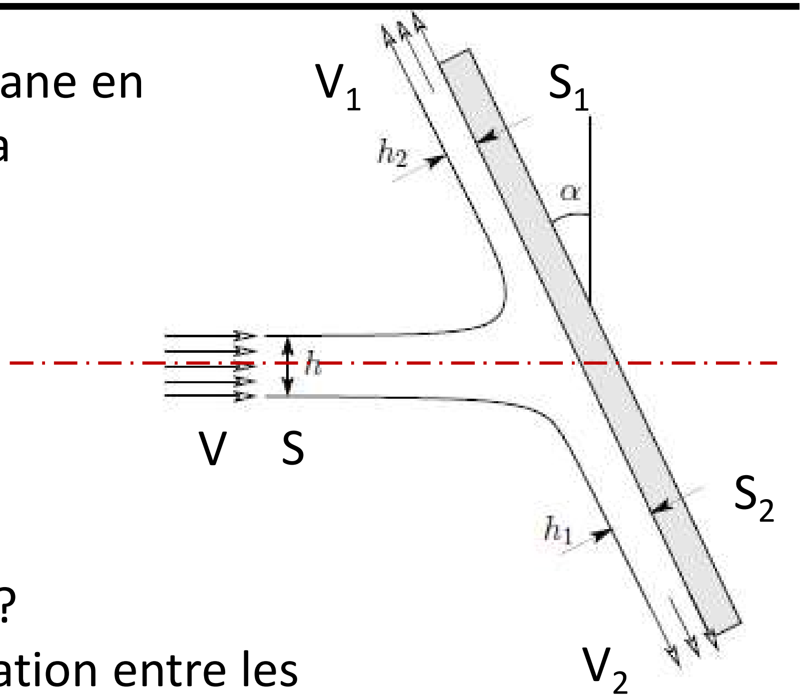
$$\boxed{\boldsymbol{R' = -\rho \cdot Q \cdot V_1}}$$



Si la plaque se déplace avec une vitesse v<V_1

$$\boxed{\boldsymbol{R' = -\rho \cdot Q \cdot (V_1 - v)}}$$

Considérons un jet de liquide 2D sur une plaque plane en forme de lame d'épaisseur h et de largeur L dans la direction Oz perpendiculaire au plan de la figure.

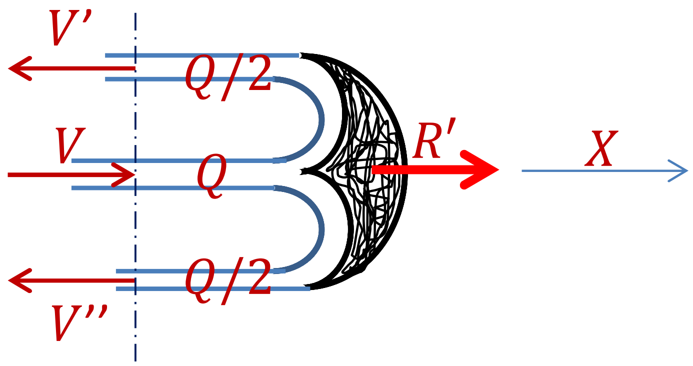


On fait les hypothèses suivantes :
- on néglige les forces de frottement visqueux
- régime permanent
- on néglige les effets de la pesanteur

1. Quelles sont les pressions en sortie et en entrée ?
2. En déduire les vitesses en sortie, ainsi qu'une relation entre les épaisseurs de la lame en entrée et en sortie.
3. Projeter cette force sur la normale et la tangente a la plaque, et en utilisant l'hypothèse de fluide parfait, en déduire les épaisseurs h_1 et h_2.

4. Poussée d'un Jet sur une plaque courbe

Un jet horizontale frappant l'arrête d'une plaque cylindrique à génératrice verticale la directrice à la forme de deux demi-cercles accolés de telle sorte que l'eau soit renvoyée sans perte de vitesse suivant une direction parallèle et opposée à celle du jet



$$\boxed{\sum \vec{F} = \sum_i \rho \cdot \vec{V}_i \cdot (\vec{V}_i \cdot \vec{n}_i) \cdot S_i}$$

$$\vec{F} + \vec{F'} + \vec{F''} + \vec{W} + \vec{R} = \rho \cdot \vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot S + \rho \cdot \vec{V'} \cdot (\vec{V'} \cdot \vec{n'}) \cdot S' + \rho \cdot \vec{V''} \cdot (\vec{V''} \cdot \vec{n''}) \cdot S''$$

$$\vec{F} + \vec{F'} + \vec{F''} - \vec{R'} = \rho \cdot \vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot S + \rho \cdot \vec{V'} \cdot (\vec{V'} \cdot \vec{n'}) \cdot S' + \rho \cdot \vec{V''} \cdot (\vec{V''} \cdot \vec{n''}) \cdot S''$$

Projection sur OX

$$-R' = \rho \cdot V \cdot (-V) \cdot S - \rho \cdot V' \cdot (V') \cdot S' - \rho \cdot V'' \cdot (V'') \cdot S''$$

On sait que Q $= V \cdot S$ et $V' \cdot S' = V'' \cdot S'' = \frac{Q}{2}$ *ainsi que* $V = V' = V''$

$$-R' = -\rho \cdot Q \cdot V - \rho \cdot V \cdot \left(\frac{Q}{2}\right) - \rho \cdot V \cdot \left(\frac{Q}{2}\right) = -2\rho \cdot Q \cdot V$$

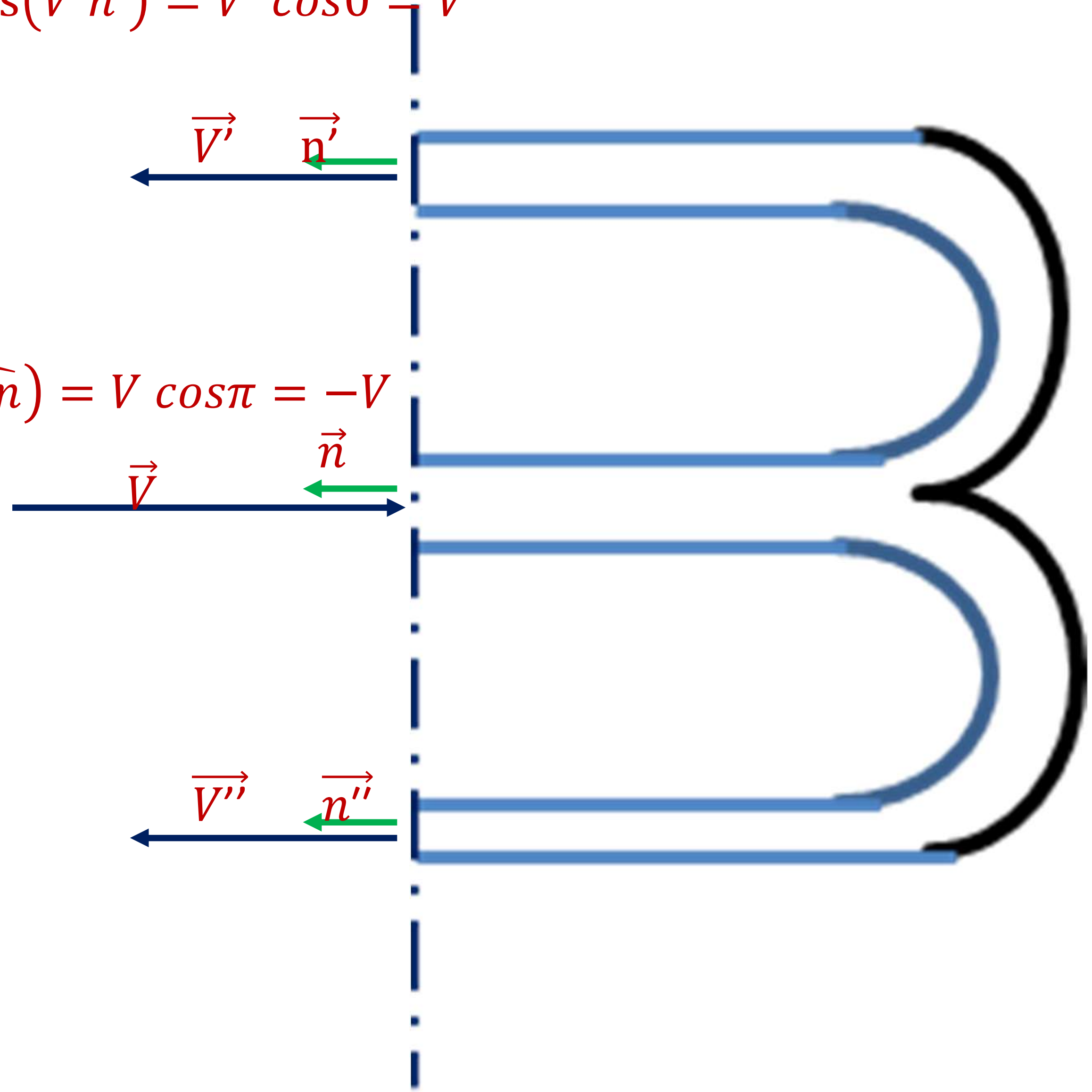
$$\boxed{R' = 2\rho \cdot Q \cdot V}$$

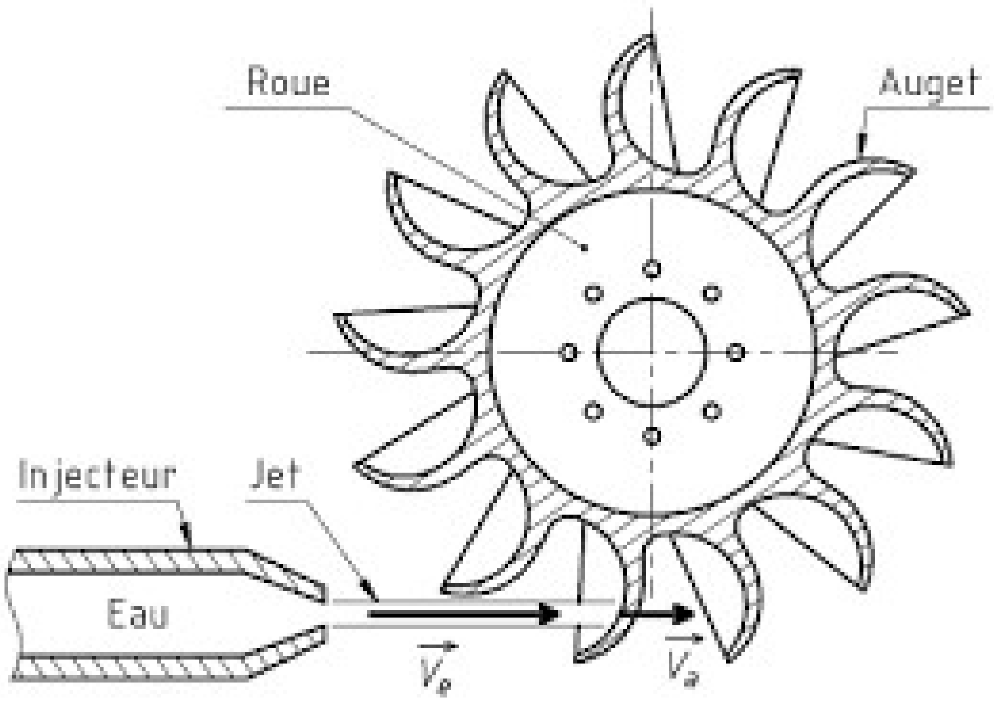
Si la plaque se déplace avec une vitesse v<V (turbine Pelton)

$$\boxed{R' = 2\rho \cdot Q \cdot (V - \mathrm{v})}$$

$$\overrightarrow{V'} \cdot \overrightarrow{n'} = V' \cdot n' \cdot \cos\left(\widehat{V'n'}\right) = V' \, cos0 = V'$$

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = V \cdot n \cdot \cos\left(\widehat{Vn}\right) = V \, cos\pi = -V$$




Roue
Auget
Injecteur
Jet
Eau
$\vec{V_e}$
$\vec{V_a}$

Un jet d'eau de 30 mm de diamètre heurte une plaque carrée articulée pesant 100 N en son centre. Trouvez la vitesse du jet afin de déjoindre la plaque d'un angle de 30 °.