Exercice 1

Trouver le point du cercle, défini par le centre (1,1) et le rayon =1, le plus proche au point $M_0(-1{,}2)$. $x_0 = -1$, $y_0 = 2$

Exemple

s.c $x^2 + y^2 = 1$ représente tous les points appartenant au cercle défini par un centre (0,0) et r=1

$x^2 + y^2 \leq 1$ représente tous les points appartenant au disque défini par un centre (0,0) et r=1

Notre contrainte est : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

$$Min\ f(x,y) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$\leftrightarrow$

$$Min\ f(x,y) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$

$$\text{s.c. } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

Le lagrangien : $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda * ((x-1)^2 + (y-1)^2 - 1)$

$$L(x,y,\lambda) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \lambda * ((x-1)^2 + (y-1)^2 - 1)$$

Exercice 2

Chercher le point, de l'orbite défini par l'intersection de la sphère défini par le centre (0,0,0) et le rayon =1 et le plan $ax + by + cz + d = 0$, le plus proche au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$

La contrainte : le point recherché appartient à la sphère et au plan en même temps.

s.c : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (équation de la sphère du centre (0,0,0) et r=1)

$ax + by + cz + d = 0$ (Équation du plan)

$$Min\ f(x,y,z) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$\leftrightarrow$

$$Min\ f(x,y,z) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$$

$$\text{s.c : } g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$g_2(x,y,z) = ax + by + cz + d = 0$$

Le lagrangien :

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z)$$

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(ax + by + cz + d)$$

Exercice 3 : Trouver les points critiques du problème d'optimisation suivant :

$$Min\ f(x,y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$$

$$x + 2y = 24 --- (C) \quad \leftrightarrow g_1(x,y) = x + 2y - 24 = 0$$

1- Vérification de la régularité de la contrainte

La fonction $g_1(x, y)$ est **affine**, donc la contrainte est un ensemble régulier.

Remarque :

a. Une fonction linéaire est une fonction de la forme $f : x \to ax$ où a est un nombre réel appelé coefficient de la fonction linéaire.
b. Une fonction affine est une fonction de la forme $f : x \to ax + b$ où a est un nombre réel appelé coefficient de la fonction linéaire, et b l'ordonnée à l'origine.
c. Une fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine.

2- Formuler le lagrangien

Les fonctions f et g sont des fonctions continues.

$$L(x, y, \lambda) = 5x^2 + 6y^2 - xy + \lambda(x + 2y - 24)$$

3- Trouver les points critiques

Les fonctions f et g sont des fonctions différentiables (de classe C^1). **Puisque l'ensemble C est régulier**, alors tous les points critiques du problème d'optimisation sont des points critiques du Lagrangien.

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{cases} 10x - y + \lambda \\ 12y - x + 2\lambda \\ x + 2y - 24 \end{cases}$$

Pour trouver les points critiques du L, il faut résoudre le système d'équation :

$$\nabla L(x, y, \lambda) = 0^{R^3} \leftrightarrow \nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{matrix} 10x - y + \lambda = 0 \\ 12y - x + 2\lambda = 0 \\ x + 2y - 24 = 0 \end{matrix}$$

Pour les systèmes d'équations linéaires :

1ère Méthode : La méthode de Cramer

2ème Méthode : Pivot de Gauss

3ème Méthode : Matrice inverse

1ère Méthode : La méthode de Cramer

Notre système devient :

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 \\ -1 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Pour utiliser cette méthode, il faut que $\det(A) \neq 0$

$$\det A = -56 \neq 0$$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 12 & 2 \\ 24 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{-56}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\det\begin{pmatrix} 10 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 24 & 0 \end{pmatrix}}{-56}, \quad \lambda = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\det\begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 12 & 0 \\ 1 & 2 & 24 \end{pmatrix}}{-56}$$

$$x = 6$$

$$y = 9$$

$$\lambda = -51$$

2ème Méthode : Pivot de Gauss

$$\begin{cases} 10x - y + \lambda = 0 ------ (L1) \\ -x + 12y + 2\lambda = 0 ----(L2) \\ x + 2y + 0\lambda = 24 ------ (L3) \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 10x - y + \lambda = 0 ------ (L1) \\ \frac{119}{10}y + \frac{21}{10}\lambda = 0 ----(L2 = L2 + \frac{1}{10}L1) \\ 14y + 2\lambda = 24 ------ (L3 = L3 + L2) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 10x - y + \lambda = 0 ------ (L1) \\ 119y + 21\lambda = 0 ----(L2 = L2 + \frac{1}{10}L1) \\ 14y + 2\lambda = 24 ------ (L3 = L3 + L2) \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 10x - y + \lambda = 0 ------ (L1) \\ 119y + 21\lambda = 0 ----(L2) \\ -\frac{56}{119}\lambda = 24 ------ (L3 = L3 - \frac{14}{119}L2) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 9 \\ \lambda = -51 \end{cases}$$

Le point (6,9) est un point critique du problème d'optimisation.

Exercice 4 : Soit le problème d'optimisation (P1) suivant :

$$Min\, f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$x^2 + y^2 = 1 --- (C) \quad \leftrightarrow g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

P1 est un problème d'optimisation à deux dimensions avec une seule contrainte d'égalité.

1- Montrer que P1 admet au moins une solution.
2- Est-elle unique ?
3- Etudier la régularité de la contrainte.
4- Trouvez les points critiques de ce problème.
5- A quels points P1 admet un minimum ?

1- Montrer que P1 admet au moins une solution.

Pour cela,:

1- il faut montrer que f est continu sur C.
2- il faut montrer que C est fermée.
3- il faut que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

   a. f est coércive
   b. C est borné.

1- Montrer que f est continu sur C.

f est un polynome de 2ème dégrée, donc f est continu sur R^2, par conséquent f est **continu** sur C ($C \subset R^2$).

2- Montrer que C est fermé.

$$C = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 = 1\}$$

L'ensemble $\{1\}$ est fermé, et donc son image réciproque par la fonction $x^2 + y^2$ (qui est continue sur R^2), est un ensemble fermée.
Ainsi, l'ensemble C est **fermé**.

3- f est-elle coércive ? ou bien C est-elle borné ?

- f est-elle coércive ?

Posons : $\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \end{cases}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0,2\pi[$

La fonction radiale Φ_f associée à f est

$$\Phi_f(r,\theta) = r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta) + 2r^2\cos(\theta).\sin(\theta)$$
$$= r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) + 2\cos(\theta).\sin(\theta)\right)$$
$$= r^2(1 + 2\cos(\theta).\sin(\theta))$$

$$\lim_{||(x,y)||\to+\infty} f(x,y) = \lim_{r\to+\infty} \Phi_f(r,\theta)$$
$$= \lim_{r\to+\infty} r^2(1 + 2\cos(\theta).\sin(\theta))$$

Etudier le signe du $1 + 2\cos(\theta).\sin(\theta)$

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$$
$$-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$$
$$-1 \leq \cos(\theta).\sin(\theta) \leq 1$$
$$-2 \leq 2\cos(\theta).\sin(\theta) \leq 2$$
$$-1 \leq 1 + 2\cos(\theta).\sin(\theta) \leq 3$$

Le signe de $1 + 2\cos(\theta).\sin(\theta)$ **dépend de θ**, par conséquent, $\lim_{||(x,y)||\to+\infty} f(x,y)$ **dépend de θ** et donc f **n'est pas coércive**.

- C est-elle bornée ?

L'ensemble C est un cercle de centre (1,1) et rayon=1, donc C est bornée.

Par conséquent : le problème P1 admet au moins une solution

2- La solution est-elle unique ?

Il faut montrer que f est strictement convexe et C est convexe

$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2y + 2x \end{pmatrix}$, $\nabla^2 f(X) = Hess\, f(X) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \Delta_1 = \mathbf{2} > 0 \\ \Delta_2 = \mathbf{0} \end{cases}$

La matrice hessienne est semi-définie positive et donc **la fonction f est convexe.**

***f* n'est strictement convexe. Par conséquent, le problème P1 admet plusieurs solutions.**

3- Etudier la régularité de la contrainte

Nous avons **une seule contrainte** : $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$\nabla g(X) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Il faut résoudre le système d'équation : $\nabla g(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Le système d'équation admet une seule solution, mais cette solution n'appartient pas à l'ensemble C, donc $\forall X \in C, \nabla g(X) \neq 0$, par conséquent $\boldsymbol{C}$ **est un ensemble régulier**. .Donc, tous les points critiques du Lagrangien sont des points critiques du problème d'optimisation (P1).

4- Trouvez les points critiques du P1

a. Calcul du lagrangien

Les fonctions f et g sont continues et différentiables (de classe C^1).

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

b. Trouver les points critiques du Lagrangien

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \begin{cases} 2x + 2y + 2\lambda x \\ 2y + 2x + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

Pour trouver les points critiques du L, il faut résoudre le système d'équation :

c. $\nabla L(x,y,\lambda) = 0^{R^3} \leftrightarrow \nabla L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{matrix} 2x + 2y + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{matrix}$

$\leftrightarrow \begin{matrix} x + y + \lambda x = 0 \quad (1) \\ y + x + \lambda y = 0 \quad (2) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (3) \end{matrix}$

On a 3 équations à 3 inconnus. C'est un système non-linéaire.

Remarque : Si on a p contraintes g_i, donc on a 2^p cas à étudier.

On distingue dans notre problème ($p = 1$), 2 cas.

Le 1er cas : $\boldsymbol{\lambda = 0}$

$\begin{matrix} x + y = 0 \\ y + x = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} x = -y \quad (4) \\ 2x^2 - 1 = 0 \quad (5) \end{matrix}$

(5) et (4)$\leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Le 1er cas : $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$

(1)-(2) : $\lambda(x - y) = 0 \leftrightarrow x - y = 0 \leftrightarrow x = y \quad (6)$

Dans ce cas : (3) $\leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0$

$\leftrightarrow x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad x_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Les point critiques du Lagrangien sont : $X_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $X_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $X_3(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $X_4(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Puisque la contrainte C est régulier, donc les points critiques du Lagrangien sont considérés des points critiques de notre problème d'optimisation P1.

Pour déterminer le minimum de f, il faut calculer les images des points critiques :

$$f(X_1) = 0 = f(X_2)$$

$$f(X_3) = 2 = f(X_4)$$

Donc, notre problème admet un minimum global au point X_1 et X_2.

Exercice 5 : Soit le problème d'optimisation (P2) suivant :

$$Min\ f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\text{s.c. } 4x + 3y = 5 - - - (C)$$

1- Montrer que P2 admet au moins une solution.
2- Est-elle unique ?
3- Etudier la régularité de la contrainte
4- Trouvez les points critiques de ce problème.
5- Déterminer leur nature

1- Montrer que P2 admet au moins une solution.

Pour cela:

1- il faut montrer que f est continu sur C.
2- il faut montrer que C est fermé.
3- il faut que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :
   a. f est coércive
   b. C est borné.

1- Montrer que f est continu sur C.

f est un polynome de 2ème dégré, don f est continu sur R^2, par conséquent f est continu sur C.

2- Montrer que C est fermée.

1- $C = \{(x, y) \in R^2, 4x + 3y = 5\}$

L'ensemble $\{5\}$ est fermé, et donc son image réciproque par la fonction $4x + 3y$ (qui est continue sur R^2), est un ensemble fermé.

Ainsi, l'ensemble C est fermé.

3- f est-elle coércive ? ou bien C est-elle borné ?

- *f est-elle coércive ?*

Posons : $\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \end{cases}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0,2\pi[$

La fonction radiale Φ_f associée à f est

$\Phi_f(r, \theta) = r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) = r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r^2$

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = \lim_{r\to+\infty} \Phi_f(r,\theta)$$
$$= \lim_{r\to+\infty} r^2 = +\infty$$

Ainsi, f est coércive

Nous avons trouvé que f est continu et coércive, et C est fermé, ainsi, le problème (P2) admet au moins une solution.

2- La solution est-elle unique ?

Il faut montrer que f est strictement convexe et C est convexe.

La fonction f est deux fois différentiables (de classe C^2) sur R^2.

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(X) = Hess\, f(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \begin{cases} \Delta_1 = \mathbf{2} > 0 \\ \Delta_2 = \mathbf{4} > 0 \end{cases}$$

La matrice hessienne est définie positive et donc la fonction f est **strictement convexe**.

L'ensemble C est représenté par une seule contrainte d'égalité qui est linéaire, ainsi C est **convexe**.

Exercice 6 : Soit le problème d'optimisation (P3) suivant :

$$Min\, f(x,y) = x^4 + y^4$$
$$\text{s.c. } x^2 + y^2 = 1 - - - (C)$$

1- Montrer que P3 admet au moins une solution.
2- Est-elle unique ?
3- Etudier la régularité de la contrainte
4- Trouvez les points critiques de ce problème.
5- Déterminer leur nature